Los Caminos del Saber

Matemáticas 6

SANTILLANA

Matemáticas 6 para educación básica secundaria, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el Departamento Editorial de Santillana S. A., bajo la dirección de **Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento**.

EQUIPO EDITORIAL

Diana Constanza Salgado Ramírez. *Editora ejecutiva*
Carlos David Sánchez. *Editor júnior*
Edgar Alexander Olarte Chaparro. *Editor júnior*
Andrea Perdomo Pedraza. *Editora externa*
Daniel Rojas Ruiz. *Editor TIC*
Juan Gabriel Aldana Álvarez. *Asistente editorial*
Óscar Fernando Cruz, Isabel Hernández Ayala. *Revisores de contenidos*

AUTORES

Ludwig Gustavo Ortiz Wilches
Licenciado en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en docencia e investigación. Universidad Sergio Arboleda.
Ricardo Joaquín de Armas Costa
Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad EAFIT. Estudios de doctorado en Matemáticas Aplicadas. Universidad de La Habana, Cuba.
Marysol Ramírez Rincón
Especialista en Matemática Aplicada. Universidad Sergio Arboleda.
Martha Lucía Acosta
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Magíster en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
Juan de Jesús Romero Roa
Especialista en Estadística. Magíster en Economía. Universidad Nacional de Colombia.
Jeinsson Giovanni Gamboa Sulvara
Licenciado en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Dorys Jeannette Morales Jaime
Doctora en Ingeniería Informática. Universidad Pontificia de Salamanca. Especialista en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Cundinamarca. .

El especialista encargado de avalar este texto desde el punto de vista de la disciplina específica y desde su pedagogía fue Mauricio Bautista Ballén. *Licenciado con estudios mayores en Matemáticas y Física. Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Magíster en docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.*

La especialista encargada de avalar este texto desde la equidad de género y de su adecuación a la diversidad cultural fue María Ivonne Wilches Mahecha. *Psicóloga. Universidad Nacional de Colombia. Magíster en estudios de género. Universidad Nacional de Colombia.*

EQUIPO GRÁFICO Y TÉCNICO

Iván Merchán Rodríguez. *Coordinador de arte creativo y diseñador del modelo gráfico*
Pep Carrió. *Creador gráfico de las cartulas*
Mauricio García Duque. *Coordinador de contenidos digitales*
Martha Jeanet Pulido Delgado, Orlando Bermúdez Rodríguez. *Correctores de estilo*
Alveiro Javier Bueno Aguirre. *Analista de soporte técnico*
Luis Nelson Colmenares Barragán. *Documentalista y operador de escáner*
Lady Midlennis Sánchez Yopazá, Anacelia Blanco Suárez. *Asistentes de documentación*
Sandra Patricia Acosta Tovar, Juan Carlos López Gómez. *Diseñadores*
ITA. *Diagramación*
Sandra Ballén Ramos. *Digitadora*
Diomedes Guilombo Ramírez, Edwin Hernando Cruz Delgado, Danilo Ramírez Parra, Juan Wiesner. *Ilustradores*
Jairo Sanabria, Tulio Pizano, Ana María Restrepo, Pedro Felipe. *Fotógrafos*
Repositorio Santillana, Editora Moderna Ltda., Archivo Santillana, Getty Images, Corel professional Photos, Images provided by Photodisc, Inc., Corbis Images, Archivo Santillana. *Fotografía*
Francisco Rey González. *Jefe de producción*

Carrera 11A No. 98-50
Bogotá, Colombia
ISBN 978-958-24-2267-7 Obra completa
ISBN 978-958-24-2288-2 Edición para el alumno
ISBN 978-958-24-2289-9 Edición para el docente

Este libro está elaborado de acuerdo con las normas ICONTEC NTC-4724 y NTC-4725 para textos escolares.
Depósito legal en trámite.
Impreso en Colombia por

PRESENTACIÓN DEL MODELO

Proyecto Los Caminos del Saber

Es un **programa de educación** que te ofrece múltiples recursos, impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro.

¿Qué te ofrece el programa para el área de Matemáticas?

Un libro del estudiante
que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de tus competencias.

Un sitio Web
www.santillanaplus.com.co con más recursos ***interactivos*** y ***multimedia*** que agregan valor a tu desarrollo escolar.

Un Libromedia en DVD, que:

- Contiene una amplia variedad de recursos digitales.
- Es fácil de manejar y no requiere conectividad.
- Se vincula a tu salón de clases y a tu hogar como una oportunidad para aumentar tu eficacia en el aprendizaje.

¿Cómo está organizado tu libro?

Para que juntos alcancemos las metas educativas que nos hemos propuesto, el programa de educación te ofrece un libro organizado en siete unidades y estas se presentan así:

Página inicial

Al comienzo de cada unidad, encontrarás una doble página de apertura donde se presentan los temas que abordarás y los logros que vas a alcanzar. También se enumeran los contenidos y las actividades que desarrollarás en tu Libromedia, así como las evaluaciones que te ayudarán a afianzar tus conocimientos y competencias.

Tu plan de trabajo…
Presenta los temas y logros que vas a desarrollar en la unidad.

Encuentra en libromedia
Relaciona los objetos digitales y las evaluaciones que complementan tu libro.

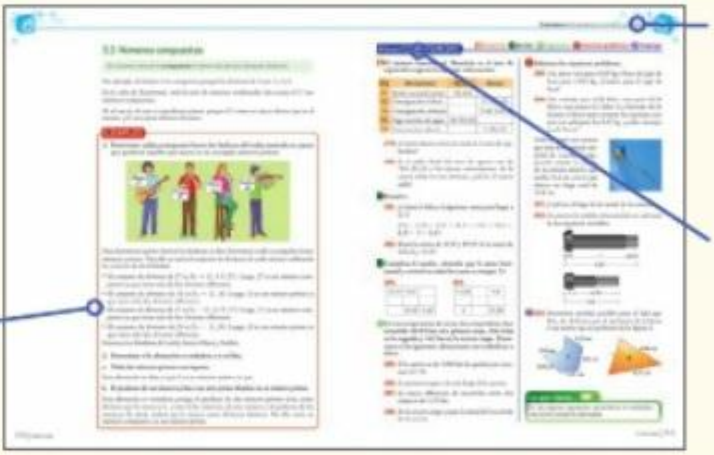
Lo que sabes
Es una autoevaluación de conceptos que debes saber para que aprendas con mayor facilidad lo que se va a trabajar.

Cronología
Es una línea de tiempo que te muestra cómo ha sido estudiado un tema de la unidad, en diferentes épocas y lugares del mundo.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?
Es una lectura de motivación que te informa sobre una aplicación práctica del tema de la unidad.

Desarrollo de temáticas

El desarrollo de los contenidos está acompañado de ejercicios y de situaciones en contexto, cuya solución se explica paso a paso. Además, encuentras actividades para desarrollar tus competencias.



Te indica el tipo de estándar o estándares que se trabajan en cada página.

Afianzo competencias
Son actividades para interpretar, argumentar y proponer. También para ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas.

Ejemplos
Son ejercicios de aplicación de la teoría que se está trabajando.

En el desarrollo de las temáticas también encuentras:

En estos recuadros encontrarás datos acerca de los acontecimientos históricos relacionados con la temática que se está trabajando.

Este cuadro te recuerda información clave para que puedas comprender mejor la teoría.

En esta sección encontrarás preguntas acerca de la teoría que se está trabajando.

Lo que viene...

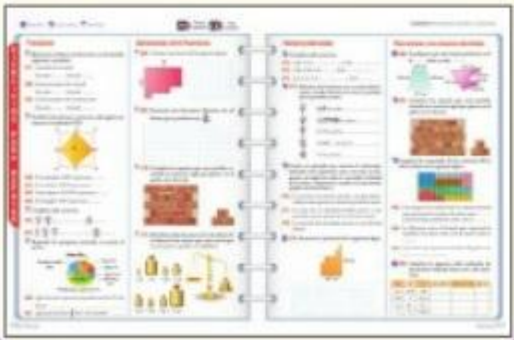
En las siguientes páginas aprenderás a qué se le denomina factorización de un número y dos métodos para hacerla.

En estos cuadros encuentras una pregunta acerca del tema siguiente para que te prepares para la próxima clase.

Al final de la unidad encuentras:

Ejercicios para repasar

Es una selección de actividades de cada tema, para que repases y respondas allí mismo.



Problemas para repasar

Te presenta un problema resuelto acerca de una de las temáticas de la unidad y algunos problemas para que apliques lo aprendido.

Secciones especiales

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
En ella podrás leer y analizar situaciones que tienen aplicación con la temática estudiada.

Trabaja con
En ella encuentras actividades para que trabajes los temas de la unidad en diferentes programas informáticos.

Hiperpágina
Doble página en la que se abordan los temas de una manera más visual con el propósito de facilitar su comprensión

CONTENIDOS

Pensamientos numérico y variacional

1 Lógica y conjuntos

Estándares: pensamientos numérico y variacional

Tu plan de trabajo...

- Identificar y utilizar **conectivos lógicos** para formar proposiciones compuestas.
- Determinar el **valor de verdad de una proposición**.
- Determinar **conjuntos** por comprensión y extensión.
- Realizar **operaciones entre conjuntos** de forma gráfica y analítica.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ Diagnóstica

✓ De desempeño

4 Multimedia

1 Galería

9 Actividades

1 Audio

10 Imprimibles

3 Enlaces web

Lo que sabes...

1. Escribe los elementos de cada conjunto.

a. $A = \{$números pares menores que 10$\}$

b. $B = \{$números primos menores que 15$\}$

c. $C = \{$divisores de 17$\}$

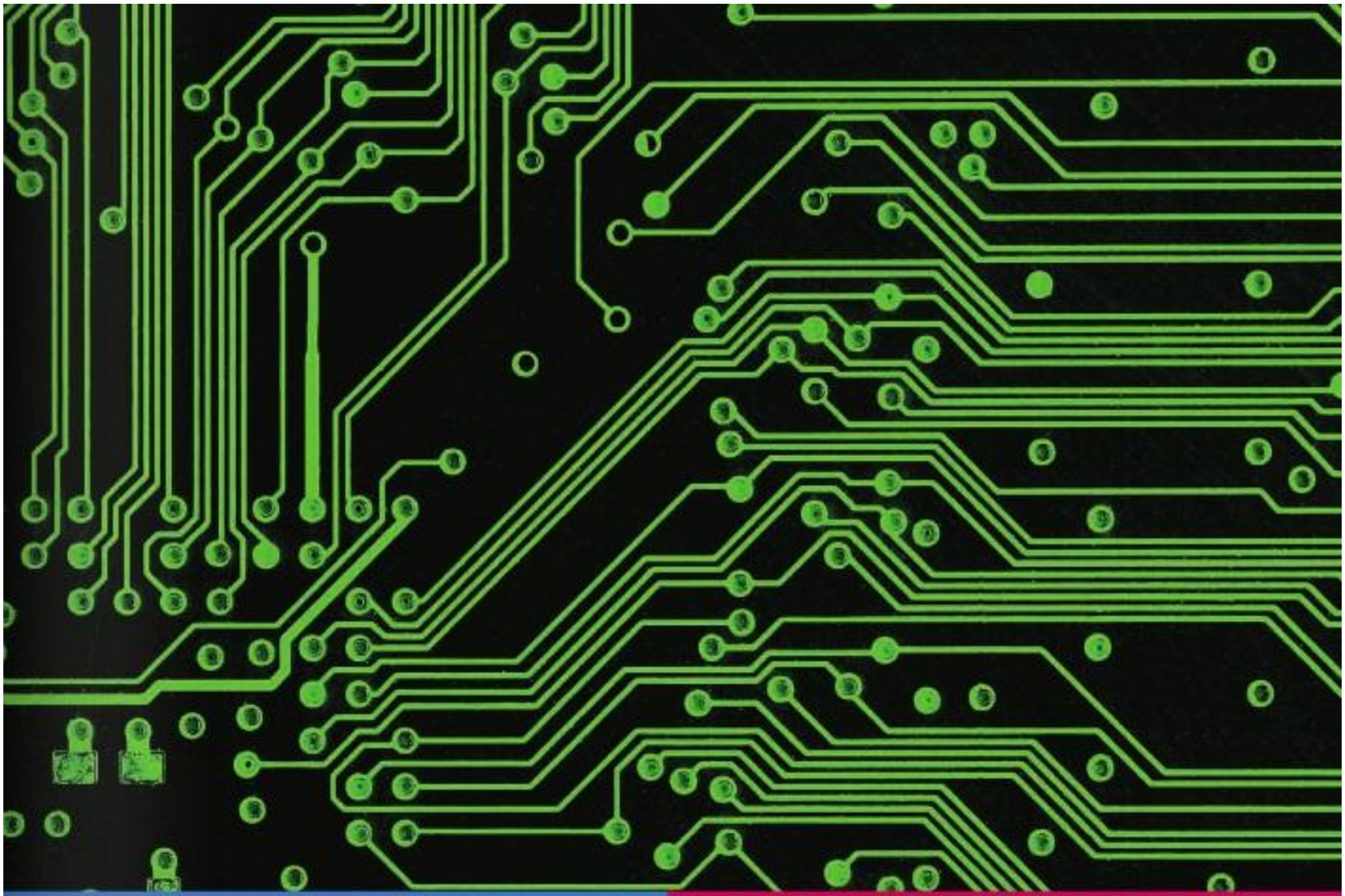
d. D = {múltiplos de 5 menores que 20}

2. Elabora una lista de elementos que cumplan cada condición.

- Es un animal carnívoro y vive en la selva.
- Es una vocal de la palabra hierbabuena.
- Es un animal que vive en el Polo Norte.
- Es un ave que habita en las costas.

3. Marca con una ✗ los números pares y encierra los números impares.

56	36	73	69	120	105
89	58	59	12	13	28



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para crear ideas que están fuera del pensamiento habitual.

Existe una nueva técnica para crear ideas que están fuera del pensamiento normal. Esta técnica se denomina *pensamiento lateral*. El pensamiento lateral permite llegar a la solución de problemas a partir de la lógica de las situaciones que se pueden presentar en un caso específico.

Esta técnica es muy útil para los abogados e investigadores en la resolución de un caso. Gracias a ella, pueden tomar todas las posibilidades para resolver su caso, analizarlas e investigarlas hasta llegar a una solución de forma creativa.

⁘ Lee más acerca de este tema en la página 46.

Cronología de lógica y conjuntos

Mesopotamia. Se escribe el manual médico *Esagil-kin-apli* basado en axiomas lógicos para examinar a un paciente.

Grecia. Se crea la lógica estoica y la lógica proposicional.

Alemania. George Cantor es reconocido como el creador de la teoría de conjuntos.

Gran Bretaña. Se encuentran diversas paradojas de la teoría de conjuntos formulada por Cantor.

Estados Unidos. Se inician pruebas de algoritmos lógicos en la computación y se crean computadores capaces de realizar conteos.

Estados Unidos. Paul Cohen y Kurt Gödel comprueban los axiomas de la teoría de conjuntos y dan paso a una nueva rama de la lógica matemática llamada teoría de modelos.

1. Proposiciones

Ampliación multimedia Recurso imprimible Enlace web

La lógica matemática se ocupa del estudio de las reglas que nos permiten distinguir los razonamientos válidos de los que no lo son. En la actualidad, la lógica tiene aplicaciones en informática, en el desarrollo de programas de computación, inteligencia artificial, robótica, entre otros.

Una **proposición** es una afirmación de la que se puede decir si es falsa o verdadera.

Las preguntas, órdenes o exclamaciones no son consideradas proposiciones porque no se puede afirmar que son verdaderas o falsas.

Para nombrar proposiciones, se utilizan letras minúsculas. Las más empleadas son *p*, *q*, *r*, *s* y *t*, aunque no son las únicas.

El **valor de verdad** de una proposición se determina asignándole verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

EJEMPLOS

1. **Determinar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones.**

a. Los gases de invernadero afectan el clima en la Tierra.

Es una proposición porque se puede decir de ella que es una afirmación verdadera o falsa.

b. ¿Qué estás haciendo?

No es una proposición porque no se puede afirmar si la pregunta es verdadera o falsa.

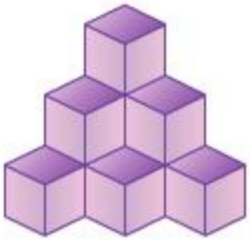
c. ¡Felicitaciones!

No es una proposición, ya que a las exclamaciones no se les puede asignar un valor de verdad.

d. Los quarks no existen.

Es una proposición porque se puede afirmar que es verdadero o es falso que los quarks no existen.

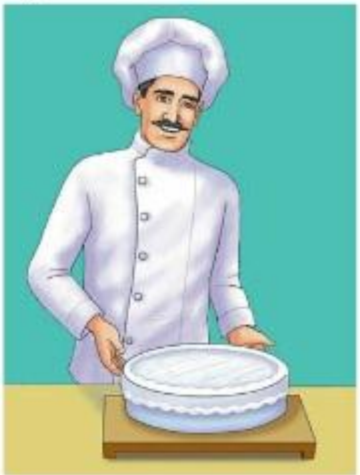
e. En la siguiente figura se aprecian siete cubos.



Es una proposición porque se puede afirmar si es verdadero o es falso que en la figura se observan siete cubos.

2. **Representar cada expresión como una proposición. Luego, determinar su valor de verdad.**

a. Con tres cortes de esta torta es posible obtener ocho porciones iguales.



p: con tres cortes de esta torta es posible obtener ocho porciones iguales.

Es una proposición verdadera ya que, en efecto, es posible obtener ocho porciones iguales a partir de tres cortes.

b. En el arcoíris se observan cuatro colores.

q: En el arcoíris se observan cuatro colores.

Es una proposición falsa ya que en el arcoíris se observan más de cuatro colores.

1.1 Proposiciones simples

Una **proposición simple** es una afirmación que consta de una sola oración gramatical, es decir, no tiene palabras de enlace tales como: *y*, *o*, *entonces*, *si* y *sólo si*, entre otras.

Por ejemplo, la proposición *p*: El científico Raúl Cuero inventó la tecnología usada en la planta nuclear de Fukushima para descontaminarla, es una proposición simple ya que está formada por una sola oración.

La proposición *q*: Los rectángulos tienen dos lados de igual medida y tienen cuatro ángulos rectos, no es una proposición simple ya que está formada por dos oraciones.

EJEMPLOS

1. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son simples.

a. *p*: Albert Einstein es considerado el científico más importante del siglo XX.

Es una proposición simple ya que está formada por una sola oración gramatical.

b. *m*: El idioma oficial de Colombia es el castellano y el idioma oficial de la India es el hindi.

No es una proposición simple ya que está compuesta por dos oraciones gramaticales.

La primera es: El idioma oficial de Colombia es el castellano.

La segunda es: El idioma oficial de la India es el hindi.

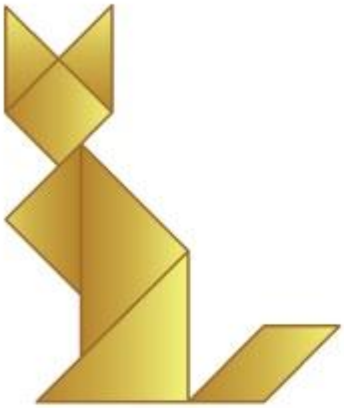
c. *n*: El número 25 es primo o es un número impar.

No es una proposición simple ya que está compuesta por dos oraciones gramaticales: El número 25 es primo y El número 25 es un número impar.

d. *q*: Todos los meses del año tienen 28 días.

Es una proposición simple ya que está formada por una sola oración gramatical.

2. Obtener dos proposiciones simples de la siguiente figura.



p: El gato está formado por siete figuras geométricas.

q: Con las figuras geométricas que conforman el gato se construye un cuadrado.

Recuerda que…

Una paradoja es una afirmación que aparentemente es verdadera pero también puede ser falsa lo que lleva a una contradicción. Por ejemplo, la paradoja del mentiroso, que dice: "Esta frase es falsa".

Negación de proposiciones simples

Para negar una proposición simple, se le antepone la expresión "no es verdad que" o se le incluye un "no" para que cambie su significado a exactamente lo contrario.

Si p representa una proposición simple, la negación de esta proposición se simboliza $\neg p$; se lee "*no p*".

Por ejemplo, si q: El *Tyrannosaurus rex* presenta el olfato más desarrollado de todos los dinosaurios carnívoros.

La negación de la proposición q es: $\neg q$: No es verdad que el *Tyrannosaurus rex* presenta el olfato más desarrollado de todos los dinosaurios carnívoros.

Cuando se niega una proposición simple se cambia su valor de verdad. Es decir, si una proposición era verdadera su negación se vuelve falsa y si una proposición era falsa su negación se vuelve verdadera.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Matemática*mente*

Un rey todo poderoso propone un acertijo a sus tres genios. Luego de ubicarlos en fila india les dice: "Dispongo de cinco sombreros, tres blancos y dos negros, colocaré a cada uno de ustedes uno de estos sombreros en lo alto de su cabeza, de manera que serán capaces de ver el sombrero que lleva el que está enfrente pero no el propio (así, el último sabio de la fila ve a los otros dos, el segundo al primero y el primer sabio no ve a ninguno de los otros dos). El rey pregunta al tercer sabio por el color del sombrero y este responde que no sabe. Luego, pregunta al segundo sabio y obtiene la misma respuesta. Finalmente, pregunta al primer sabio y este responde de forma acertada el color del sombrero que lleva. ¿Cómo adivinó el primer sabio el color del sombrero sin verlo?

EJEMPLOS

1. Escribir la negación de las siguientes proposiciones.

a. p: La orquídea es la flor nacional de Colombia.

La negación de la proposición p es:

$\neg p$: La orquídea no es la flor nacional de Colombia.

b. q: El petróleo es un recurso natural renovable.

La negación de la proposición q es:

$\neg q$: No es verdad que el petróleo es un recurso natural renovable.

c. s: Los dinosaurios no se extinguieron.

La negación de la proposición s es:

$\neg s$: No es verdad que los dinosaurios no se extinguieron.

d. r: Todos los gatos son traviesos.

La negación de la proposición r es:

$\neg r$: No todos los gatos son traviesos.

2. Determinar el valor de verdad de la siguiente proposición. Luego, escribir la negación y su valor de verdad.

r: Sincelejo no es la capital de Sucre.

El valor de verdad de la proposición es falso, porque Sincelejo sí es la capital de Sucre.

La negación de la proposición r es:

$\neg r$: Sincelejo es la capital de Sucre.

El valor de verdad de la negación de r es verdadero ya que Sincelejo sí es la capital de Sucre.

1.2 Proposiciones compuestas

Actividades

Una **proposición compuesta** es una afirmación conformada por dos o más proposiciones simples que se conectan mediante las palabras "y", "o", "si… entonces", "si y sólo si" y "no".

Es importante tener en cuenta que en una proposición compuesta se combinan las ideas de las proposiciones simples que la forman para dar origen a una nueva idea más elaborada.

Así que si se tienen dos proposiciones simples como:

p: Colombia es un país latino.

q: Colombia es un país cafetero.

Se puede generar una proposición compuesta, que integre las dos ideas, que diga: Colombia es un país latino y es un país cafetero. La palabra que se emplea para conectar las dos proposiciones simples es y.

La mayoría de los robots funcionan siguiendo una secuencia lógica. Partiendo de las condiciones que los rodean, las cuales son recibidas mediante sensores, los robots realizan la actividad para la que fueron diseñados.

Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos o conectores son las palabras de enlace usadas para unir dos o más proposiciones simples.

Por ejemplo, 5 es un número primo, si y sólo si, 5 tiene dos divisores, el conectivo lógico es *si y sólo si*.

Cada conectivo lógico tiene un símbolo que lo representa y recibe un nombre especial por la función que desempeña dentro de la proposición.

Conectivo lógico	Símbolo	Nombre
y	$\wedge$	Conjunción
o	$\vee$	Disyunción
si… entonces	$\Rightarrow$	Implicación
si y sólo si	$\Leftrightarrow$	Equivalencia
negación	$\neg$	Negación

EJEMPLOS

Escribir las siguientes proposiciones compuestas usando los símbolos lógicos.

a. En Colombia un árbol crece tres veces más rápido que en Chile y nueve veces más rápido que en Canadá.

Las proposiciones simples que forman la proposición son:

p: En Colombia un árbol crece tres veces más rápido que en Chile.

q: En Colombia un árbol crece nueve veces más rápido que en Canadá.

La proposición se puede escribir como $p \wedge q$.

b. Un pentágono es regular, si y sólo si, el pentágono tiene todos sus lados de igual medida.

Las proposiciones simples que forman la proposición son:

r: Un pentágono es regular.

s: El pentágono tiene todos sus lados de igual medida.

La proposición se puede escribir como $r \Leftrightarrow s$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • M Modelo • E Ejercito • S Soluciono problemas

Responde. Luego, escribe un ejemplo en cada caso.

1. ¿Cuál es la importancia de la lógica matemática?
2. ¿Qué es una proposición?
3. ¿Cuál es la diferencia entre una proposición simple y una proposición compuesta?
4. ¿Cuáles son los conectivos lógicos?

Identifica los enunciados que son proposiciones.

5. ¡Estudie!
6. Ningún mamífero vive en el agua.
7. Mañana lloverá.
8. Suramérica es una isla gigantesca.

M **Escribe un proposición simple de acuerdo con cada imagen.**

9.

10.

Lee el siguiente texto, luego, escribe el valor de verdad de cada proposición. Justifica tu respuesta.

Un granjero debía cruzar un río llevando consigo un gato, un loro y un saco de maíz. Pero el bote solo resistía el peso del granjero y uno de sus bienes.

Además, no podía dejar al gato solo con el loro, porque se lo comería. Tampoco podía dejar solos al loro y al saco de maíz. A pesar de estas condiciones, el granjero pudo cruzar el río sin mayores dificultades.

11. El granjero cruza el río con el gato y el loro.
12. El granjero cruza el río con el saco de maíz.
13. El primer viaje que hace el granjero es con el loro.
14. El granjero realiza el último viaje con el gato.
15. El granjero debe realizar ocho viajes para cruzar el río con todos sus bienes.

Relaciona cada expresión de la columna izquierda con una expresión de la derecha, para formar tres proposiciones verdaderas y dos proposiciones falsas. Luego, escríbelas en tu cuaderno.

16. 28	**a.** es un cuerpo geométrico.
17. El delfín	**b.** es un múltiplo de 7.
18. El cubo	**c.** vive en el agua.
19. La estrella de mar	**d.** es un divisor de 17.
20. 34	**e.** tiene forma de pentágono.

E **Escribe una proposición compuesta que contenga las proposiciones simples dadas y el conector lógico indicado.**

p: El 20 de julio se celebra el día de la Independencia de Colombia.
q: El día de la raza se celebra el 12 de octubre.
s: El 12 de octubre es un día festivo.
t: El 20 de julio es una fiesta patria.

21. $p \wedge q$ **22.** $q \vee t$ **23.** $p \Rightarrow t$ **24.** $q \Leftrightarrow s$

S **Resuelve.**

Andrés vive en Bogotá y realiza un recorrido por algunas ciudades del norte del país. La ruta que sigue Andrés está descrita en las siguientes proposiciones compuestas:

- Viaja a Montería, si y sólo si, pasa por Medellín.
- Se detiene en Santa Marta y no pasa por el río Magdalena.
- Si conoce Bucaramanga, entonces, pasa por la capital del Cesar.

25. Escribe las proposiciones simples que conforman cada proposición compuesta.
26. Encuentra las ciudades que conoció Andrés y conéctalas en un mapa por medio de una línea.

S **Pablo le regala a su prima Laura una manilla que está escondida en una de las tres cajas de colores con una proposición en cada una, pero solo una es verdadera.**

27. ¿En qué caja está la manilla? Justifica tu respuesta.

1.3 Conjunción

Ampliación multimedia
Recurso imprimible

La **conjunción** es una operación lógica que usa el conectivo y para relacionar dos proposiciones simples y construir una proposición compuesta. Para simbolizar la conjunción entre dos proposiciones p y q, se escribe $p \wedge q$ y se lee "p y q".

Cuando se establece la conjunción entre dos proposiciones p y q, se da a entender que tanto la idea que expresa p como la que expresa q deben cumplirse.

Por ejemplo, si p, q son las proposiciones:

p: Diego es honesto. q: Diego es confiado.

Se escribe $p \wedge q$ y se lee: Diego es honesto y confiado.

Tabla de verdad para la conjunción

El valor de verdad de una conjunción depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones simples que la conforman.

En la conjunción $p \wedge q$ es importante tener en cuenta que la proposición compuesta es verdadera solo si p y q son verdaderas, en cualquier otro caso es falsa. Las diferentes posibilidades son:

Tabla de verdad para la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Historia de las matemáticas

La lógica en frases

La lógica tuvo su origen desde Aristóteles (384-322 a. C.) con la teoría silogística, la cual se basaba en razonamientos a partir de cuantificadores.

Le siguió Crisipo de Soli (281-206 a. C.) quien introdujo los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$, sin embargo, al morir Crisipo, desapareció el trabajo desarrollado por los estoicos. La lógica de proposiciones fue descubierta de nuevo y desarrollada a mediados del siglo XIX por Augustus de Morgan y George Boole. Boole descubrió las tablas de verdad y trabajó el álgebra binaria que consiste en asociar los valores 0 y 1 a los valores de verdad, F y V.

EJEMPLOS

1. Representar simbólicamente la siguiente conjunción:

a. Los pingüinos son excelentes nadadores y alcanzan velocidades de 8 km por hora.

Primero, se determinan las proposiciones simples.

p: Los pingüinos son excelentes nadadores.

q: Los pingüinos alcanzan velocidades de 8 km por hora.

Luego, se escribe la proposición usando el símbolo de la conjunción "$\wedge$": $p \wedge q$.

b. Los celulares sirven para realizar videoconferencias y navegar en Internet.

Primero, se determinan las proposiciones simples.

r: Los celulares sirven para realizar videoconferencias.

s: Los celulares sirven para navegar en Internet.

Luego, se escribe la proposición usando el símbolo de la conjunción "$\wedge$": $r \wedge s$.

2. Construir las conjunciones indicadas a partir de las siguientes proposiciones simples.

m: El oso panda vive en regiones montañosas al suroeste de China.

n: Los osos panda son una especie en peligro de extinción.

s: El oso panda es un animal omnívoro.

a. $m \wedge n$.

El oso panda vive en regiones montañosas al suroeste de China y es una especie en peligro de extinción.

b. $m \wedge \neg s$.

El oso panda viven en regiones montañosas al suroeste de China y no es un animal omnívoro.

3. Formar la conjunción con las proposiciones dadas y determinar el valor de verdad de la conjunción.

a. p: La pirámide es un cuerpo redondo.

q: 42 es divisible entre 4.

Primero, se forma la conjunción con p y q, así,

$p \wedge q$: La pirámide es un cuerpo redondo y 42 es divisible entre 4.

Segundo, se asigna el valor de verdad a cada proposición simple.

La proposición p es falsa ya que la pirámide no es un cuerpo redondo y la proposición q es falsa, porque 42 no se puede dividir entre 4.

Por tanto, el valor de verdad de la conjunción $p \wedge q$ es falsa.

b. r: El elefante es un paquidermo.

s: El elefante es un animal herbívoro.

Primero, se forma la conjunción con r y s, así,

$r \wedge s$: El elefante es animal paquidermo y herbívoro.

Segundo, se asigna el valor de verdad a cada proposición simple.

La proposición r es verdadera ya que los elefantes son animales paquidermos y la proposición s es verdadera, porque el elefante es un animal herbívoro.

Por tanto, el valor de verdad de la conjunción $r \wedge s$ es verdadera.

4. Observar el dibujo. A partir de él formar una conjunción verdadera y una conjunción falsa.

Primero, se forman las proposiciones simples.

p: En las basuras se desarrollan enfermedades.

q: Las llantas se degradan con facilidad.

r: Los perros y gatos son animales domésticos.

Por tanto, la conjunción verdadera es $p \wedge r$: En las basuras se desarrollan enfermedades y los perros y gatos son animales domésticos.

La conjunción falsa es $p \wedge q$: En las basuras se desarrollan enfermedades y las llantas se degradan con facilidad.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

28. ¿Qué es la conjunción?

29. ¿Cómo se obtiene el valor de verdad de una conjunción?

30. ¿Cómo se obtiene la proposición $p \wedge q$, a partir de las proposiciones dadas?

Responde y explica con un ejemplo.

31. Si la conjunción $m \wedge n$ es falsa, ¿cuáles son los posibles valores de verdad de m y de n?

32. Si la conjunción $p \wedge q$ es verdadera, ¿cuál es el valor de verdad de $\neg p \wedge \neg q$?

E **Forma las conjunciones indicadas a partir de las siguientes proposiciones:**

h: El Emma Maersk es el barco de carga más grande del mundo.

j: El Emma Maersk fue construido en Dinamarca.

k: Los barcos de carga solo transportan alimentos.

l: El Emma Maersk puede atracar en cualquier puerto.

33. $h \wedge j$

34. $j \wedge k$

35. $l \wedge k$

36. $\neg h \wedge l$

37. $l \wedge \neg k$

38. $\neg j \wedge \neg h$

R **Determina el valor de verdad de las conjunciones formadas por las proposiciones p y q.**

p: Los triángulos escalenos tienen todos sus ángulos menores de 90°.

q: Los triángulos acutángulos tienen un ángulo mayor que 90°.

39. $p \wedge q$

40. $p \wedge \neg q$

41. $\neg p \wedge q$

42. $\neg p \wedge \neg q$

43. Observa el dibujo. Luego, a partir de él, forma tres conjunciones verdaderas y tres conjunciones falsas.

R **Completa cada proposición para que la conjunción sea verdadera.**

44. 36 es múltiplo de 3 y 25 es divisible entre ______.

45. 48 es divisible entre 4 y 14 es divisible entre ____.

46. 72 es múltiplo de 9 y 56 es múltiplo de ______.

R **Lee el siguiente texto. Luego, resuelve.**

Colombia tiene dos océanos: el Pacífico y el Atlántico, los cuales son ricos en corales y especies marítimas endémicas y migratorias, como las tortugas marinas y las ballenas yubarta, que vienen entre julio y octubre a visitar las costas colombianas.

47. Determina cuatro proposiciones simples y simbolízalas.

48. Escribe con ellas todas las posibles conjunciones.

49. Escribe el valor de verdad de cada conjunción.

50. Completa la siguiente tabla de verdad.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

S **Observa y lee las pistas. Luego, resuelve.**

- Los detectives Sagaz, Sutil y Astuto llevan sombrero.
- Los detectives Hábil, Astuto y Sabio no usan anteojos.
- Los detectives Sagaz, Astuto y Sabio llevan corbata.

51. Organiza la información en una tabla.

52. Escribe el nombre de cada detective.

1.4 Disyunción

Actividad Enlace web

La **disyunción** de dos proposiciones simples se obtiene usando el conectivo lógico "o". Si p y q son dos proposiciones simples la disyunción se escribe $p \vee q$ y se lee "p o q".

Por ejemplo, si p y q son las proposiciones:

p: 24 es un número par.

q: 24 es un múltiplo de 10.

Se escribe $p \vee q$ y se lee:

24 es un número par o es un múltiplo de 10.

Tabla de verdad para la disyunción

Es importante tener en cuenta que la proposición $p \vee q$ es falsa, únicamente cuando las dos proposiciones p y q son falsas.

Al igual que la conjunción, la disyunción también tiene cuatro posibles valores de verdad.

Tabla de verdad para la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLOS

1. Formar las disyunciones que se indican, a partir de las proposiciones simples dadas.

p: Los delfines rosados habitan en el río Amazonas.

q: Las ballenas jorobadas tienen sus crías en el Pacífico colombiano.

r: Cada ballena jorobada tiene un diseño único en su cola.

a. $p \vee q$

La disyunción formada por p y q es: Los delfines rosados habitan en el río Amazonas o las ballenas jorobadas tienen sus crías en el Pacífico colombiano.

b. $p \vee r$

La disyunción formada por p y r es: Los delfines rosados habitan en el río Amazonas o cada ballena jorobada tiene un diseño único en su cola.

c. $q \vee r$

La disyunción formada por q y r es: Las ballenas jorobadas tienen sus crías en el Pacífico colombiano o cada ballena jorobada tiene un diseño único en su cola.

2. Determinar el valor de verdad de cada disyunción.

a. $p \vee q$: 4 es un divisor de 15 o 2 es un divisor de 14.

Primero, se determina el valor de verdad de cada proposición simple que conforma la disyunción.

El valor de verdad de la proposición p: 4 es divisor de 15, es falso y el valor de verdad de la proposición q: 2 es divisor de 14, es verdadero.

Por tanto, la disyunción $p \vee q$ es verdadera.

b. $r \vee s$: Los cocodrilos son vertebrados o son reptiles.

Primero, se asigna el valor de verdad a cada proposición simple.

El valor de verdad de r: Los cocodrilos son vertebrados, es verdadero y el valor de verdad de s: Los cocodrilos son reptiles, es verdadero.

Por tanto, el valor de verdad de $r \vee s$ es verdadero.

3. Leer el siguiente texto. Luego, determinar las disyunciones.

Generalmente, cuando se habla de contaminación, se olvida citar un elemento frecuente en las ciudades: los sonidos desagradables o ruidos. Los sonidos muy intensos y continuos ocasionan trastornos físicos, como la sordera o los trastornos psíquicos como la irritabilidad.

Por tanto, las disyunciones que se identifican en el texto son:

Un tipo de contaminación son los sonidos desagradables o ruidos.

Los ruidos ocasionan trastornos como la sordera o la irritabilidad.

4. Dadas las proposiciones k, l y m, escribir cada disyunción y establecer su valor de verdad.

k: El cuadrado de 5 es 25, l: 32 dividido entre 4 es 7, m: El doble de 15 es 30.

a. $k \vee \neg l$.

La disyunción $k \vee \neg l$ se forma así:

El cuadrado de 5 es 25 o no es cierto que 32 dividido entre 4 sea 7.

Como el valor de verdad de k es verdadero y el valor de verdad de $\neg l$ es verdadero, entonces, que la disyunción $k \vee \neg l$ es verdadero.

b. $\neg k \vee m$.

La disyunción $\neg k \vee m$ se forma así:

El cuadrado de 5 no es 25 o el doble de 15 es 30.

Como el valor de verdad de $\neg k$ es falso y el valor de verdad de m es verdadero, se tiene que la disyunción $\neg k \vee m$ es verdadera.

c. $\neg m \vee l$.

La disyunción $\neg m \vee l$ se forma así:

El doble de 15 no es 30 o 32 dividido en 4 es 7.

El valor de verdad de $\neg m \vee l$ es falso, porque el valor de verdad de $\neg m$ es falso y el valor de verdad de l es falso.

Historia de las matemáticas

Augustus De Morgan (1806-1871)

Augustus De Morgan fue un matemático y lógico inglés nacido en la India. Escribió varias obras de lógica en las que planteó diversas leyes.

Una de las leyes de Morgan es: "La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones".

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

53. ¿Cómo se forma la disyunción entre las proposiciones p y q?

54. Dadas dos proposiciones p y q, una verdadera y la otra falsa, ¿cuál es el valor de verdad de $p \lor q$?

55. Si $m \lor n$ es falsa, ¿cuáles son los valores de verdad de las proposiciones m y n?

56. Si m es verdadera y n es falsa, ¿cuál es el valor de verdad de $\neg m \lor \neg n$?

Dadas las proposiciones verdaderas p, q y r, escribe las disyunciones indicadas y determina su valor de verdad.

p: Colombia es el tercer productor mundial de banano.

q: Colombia es el cuarto país productor de carbón.

r: Colombia ocupa el segundo lugar en diversidad de aves.

57. $p \lor q$

58. $\neg p \lor q$

59. $q \lor \neg r$

60. $\neg p \lor \neg r$

61. $\neg q \lor \neg p$

62. $\neg r \lor \neg q$

Observa las fotografías y escribe los nombres del animal o animales que hacen verdadera cada disyunción. Justifica tu respuesta.

63. Es un animal que sale a la superficie del agua para tomar el oxígeno del aire o tiene aletas.

64. Es un ave nocturna o es un animal que se alimenta de nueces.

65. Es un mamífero cuyas extremidades anteriores le permiten volar o es un insecto con alas de colores.

66. Es un animal que carga a su cría en su vientre en una bolsa o es un mamífero que tiene similitudes con el ser humano.

67. Es un animal doméstico o es un animal anfibio.

68. **Completa la tabla de verdad.**

$\neg p \lor q$	$p \lor q$	p	q	$\neg p$	$\neg q$
	V			V	F
	V		F		
	F				V
				F	F

Lee el texto y responde.

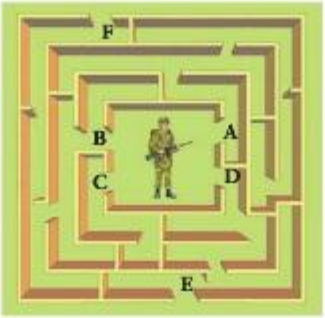
Angélica quiere celebrar su cumpleaños con una fiesta temática. Las opciones que tiene son:

Opción 1. Un festival del chocolate, en el que todos los productos preparados son a base de chocolate, o una fiesta de disfraces.

Opción 2. Una fiesta de arcoíris a la que todos van vestidos con colores del arcoíris, o una fiesta con trajes de los años ochenta.

69. Si la fiesta no se realiza con disfraz, ¿cuál opción es la más conveniente?

Propón una salida del laberinto para el soldado. Tiene cuatro opciones A, B, C y D, pero solo una es verdadera: la que lo llevará a la salida (E o F).



70. Determina cuál de las siguientes secuencias llevan al soldado a la salida. Justifica tu respuesta.

- **a.** A lo lleva a C o A lo lleva a E.
- **b.** B lo lleva a A o B lo lleva a E.
- **c.** C lo lleva a D o C lo lleva a B.
- **d.** D lo lleva a F o D lo lleva a E.

Plantea valores de verdad para las proposiciones simples y para las disyunciones.

71. Mariana es profesora o contadora.

72. Gerardo tiene 17 o 18 años de edad.

73. O Andrea está en Bogotá o está en Cali.

1.5 Implicación

Actividad

La **implicación** de dos proposiciones simples se obtiene utilizando el conectivo lógico *si… entonces.* La implicación entre dos proposiciones simples p y q se escribe $p \Rightarrow q$ y se lee "si p entonces q".

En la implicación $p \Rightarrow q$, p es condición suficiente para q, y q es condición necesaria para p. A p se le denomina antecedente y a q consecuente.

Por ejemplo, en la expresión *Si un animal es mamífero, entonces, es vertebrado*, es una implicación, en la cual ser mamífero es condición suficiente para ser vertebrado, pero ser mamífero no es condición necesaria para ser vertebrado; en cambio, para ser mamífero sí es necesario ser vertebrado, pero ser vertebrado no es suficiente para ser mamífero.

Tabla de verdad para la implicación

Los posibles valores de verdad para la implicación son:

Tabla de verdad para la implicación

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Es necesario tener en cuenta que la implicación entre dos proposiciones simples p y q es falsa solo cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso.

Recuerda que…

En una **implicación**, al antecedente se le denomina causa y al consecuente, efecto.

EJEMPLOS

1. Formar las implicaciones, teniendo en cuenta las proposiciones k, l y m.

k: El agua de río es dulce.

l: El agua de río es para el consumo humano.

m: El agua de río sirve para regar los cultivos de papa.

a. $k \Rightarrow l$.

La implicación $k \Rightarrow l$ se forma así:

Si el agua de río es dulce, entonces, es para el consumo humano.

b. $\neg m \Rightarrow \neg k$.

La implicación $\neg m \Rightarrow \neg k$ se forma así:

Si el agua de río no sirve para regar los cultivos de papa, entonces, el agua de río no es dulce.

2. Establecer el valor de verdad de cada implicación.

a. Si un terremoto mueve el fondo marino en forma vertical, entonces, se forma un *tsunami* con olas gigantescas.

La implicación está formada por dos proposiciones verdaderas, por tanto, el valor de verdad de la implicación dada es verdadero.

b. Si 100 es un múltiplo de 8, entonces, 25 es múltiplo de 5.

El valor de verdad del antecedente es falso y el valor de verdad del consecuente es verdadero. Por tanto, el valor de verdad de la implicación es verdadero.

c. Si la neblina aumenta, la visibilidad disminuye, entonces, la disminución de la visibilidad ocasiona accidentes en la carretera.

El valor de verdad del antecedente es verdadero y el valor de verdad del consecuente es verdadero. Por tanto, el valor de verdad de la implicación es verdadero.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto · R Razono · S Soluciono problemas

I **Responde.**

74. ¿Qué es la implicación y cómo se aplica?

75. Si el antecedente de una implicación es falso, ¿cuál debe ser el valor de verdad del consecuente para que la implicación sea verdadera?

76. Si el valor de verdad de una implicación es falso, ¿cuáles son los valores de verdad del antecedente y del consecuente?

77. Si $p \Rightarrow q$ es falso, ¿cuál será el valor de verdad de $\neg q \Rightarrow \neg p$?

R **Dadas las proposiciones verdaderas *p*, *q*, *r* y *s*, escribe las implicaciones y determina los valores de verdad respectivos.**

p: Los mayas habitaron la península de Yucatán.

q: Yucatán es un estado de México.

r: *El Popol Vuh* es un libro que recoge las tradiciones mayas.

s: Los mayas vivieron en México.

78. $p \Rightarrow q$ **80.** $p \Rightarrow \neg r$ **82.** $\neg q \Rightarrow \neg p$

79. $q \Rightarrow s$ **81.** $\neg s \Rightarrow r$ **83.** $\neg r \Rightarrow s$

S **84. Hay situaciones que para ser resueltas basta con aplicar la lógica. Lee el siguiente problema y responde.**

Para ejecutar a un condenado a muerte solamente hay dos opciones: la horca o la silla eléctrica.

Llegado el momento de la ejecución, los verdugos le piden al condenado que hable, y le manifiestan: "Si dices una verdad, te mataremos en la horca, y si mientes, morirás en la silla eléctrica". El preso dice: "Me van a matar en la silla eléctrica". ¿Qué pasó con el condenado a muerte?

S **Lee y resuelve.**

Camilo, Andrea y Liz beben siempre jugo de mora o de mango.

- Si Camilo bebe jugo de mango, entonces, Liz bebe siempre lo mismo que Andrea.
- Si Liz bebe jugo de mora, entonces, Camilo bebe el jugo que no pide Andrea.
- Si Andrea bebe jugo de mango, entonces, Camilo bebe el mismo jugo que Liz.

Al menos uno de ellos toma un sabor diferente al de los otros dos.

85. Completa la tabla a partir de las anteriores implicaciones.

86. ¿Alguno de ellos pide siempre el mismo jugo?

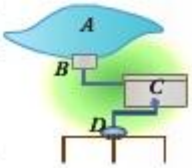
Camilo	Liz	Andrea
Mango		
	Mango	
		Mango

87. Carmen, Diana, María, Angélica, Claudia y Lina realizan un viaje por parejas a Cali, Pasto y Tunja.

- Si Carmen no va a Cali, entonces, viaja con Lina que no va a Tunja.
- Si Diana no viaja con Claudia, entonces, Claudia no viaja a Tunja.
- Si Angélica viaja, entonces, viaja a Tunja.

Si las anteriores afirmaciones son verdaderas, ¿quiénes viajan a Cali, a Pasto y a Tunja?

88. El siguiente es un sistema de riego, en el que A es la fuente de agua, B es la compuerta de entrada del agua, C es el tanque de almacenamiento y D es la compuerta para el riego del cultivo.



Analiza las siguientes afirmaciones y explica por qué son falsas:

- Si la compuerta B está cerrada, entonces, hay riego en el cultivo.
- Si la compuerta D está abierta, entonces, no hay riego en el cultivo.

1.6 Equivalencia

La **equivalencia** entre dos proposiciones simples se establece utilizando el conectivo lógico "si y sólo si". Para representar la equivalencia entre dos proposiciones p y q se escribe $p \Leftrightarrow q$ y se lee p si y sólo si q.

Cuando dos proposiciones p y q son equivalentes, se da a entender que p es condición necesaria y suficiente para que se cumpla q, y a su vez, q es condición necesaria y suficiente para que se cumpla p. Por tanto, se cumple que $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.

Por ejemplo, es posible formar una equivalencia con las proposiciones:

m: El polígono es un triángulo y n: El polígono tiene tres lados. Así,

$m \Leftrightarrow n$: El polígono es un triángulo, si y sólo si, tiene tres lados.

En efecto, ser triángulo es condición necesaria y suficiente para tener tres lados, y a su vez, tener tres lados es condición necesaria y suficiente para ser triángulo.

Tabla de verdad para la equivalencia

Los posibles valores de verdad para la equivalencia son:

Tabla de verdad para la equivalencia

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es necesario tener en cuenta que la equivalencia entre dos proposiciones simples p y q es verdadera solo cuando las dos proposiciones son verdaderas o cuando las dos son falsas.

EJEMPLOS

1. Construir las equivalencias a partir de las proposiciones simples dadas. Luego, determinar su valor de verdad.

p: La Tierra gira alrededor del Sol.

q: La Tierra es un planeta del sistema solar.

r: La Luna es un satélite natural de la Tierra.

a. $p \Leftrightarrow q$.

La equivalencia $p \Leftrightarrow q$, es:

La Tierra gira alrededor del Sol, si y sólo si, la Tierra es un planeta del sistema solar.

Como el valor de verdad de las dos proposiciones es verdadero, entonces, se tiene que el valor de verdad de la equivalencia $p \Leftrightarrow q$ es verdadero.

b. $\neg q \Leftrightarrow \neg r$.

La equivalencia $\neg q \Leftrightarrow \neg r$ es: La Tierra no es un planeta del sistema solar, si y sólo si, la Luna no es su satélite natural.

El valor de verdad de las proposiciones $\neg q$ y $\neg r$ es falso, entonces, la equivalencia $\neg q \Leftrightarrow \neg r$ es verdadera.

2. Establecer el valor de verdad de cada equivalencia.

a. 28 es múltiplo de 4, si y sólo si, 4 es primo.

La proposición 28 es múltiplo de 4, es verdadera. La proposición 4 es primo, es falsa. Por tanto, el valor de verdad de la equivalencia es falso.

b. La naranja es rica en vitamina C, si y sólo si, es una fruta cítrica.

El valor de verdad de las proposiciones es verdadero. Por tanto, la equivalencia es verdadera.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

89. ¿Qué es la equivalencia entre dos proposiciones?

90. ¿Cuándo la equivalencia entre dos proposiciones es falsa?

91. Si una de las proposiciones que conforman una equivalencia es falsa, ¿cuál debe ser el valor de verdad de la otra proposición para que la equivalencia sea verdadera?

Lee el siguiente texto. Luego, determina el valor de verdad de las equivalencias dadas.

El ciclo del agua comienza con la evaporación del agua de los océanos, ríos y lagos que al contacto con el aire se condensa formando las nubes.

El agua de las nubes se precipita en forma de lluvia, granizo o nieve, que cae nuevamente en las fuentes de agua.

92. El agua se condensa formando nubes, si y sólo si, el agua pasa de estado líquido a gaseoso.

93. El agua se precipita en forma de lluvia, si y sólo si, el cielo no está nublado.

94. El ciclo del agua comienza con la evaporación del agua, si y sólo si, aumenta la temperatura.

Escribe los valores de verdad de cada equivalencia a partir de las siguientes proposiciones.

k: 42 es múltiplo de 6.
m: 42 es el producto de 6 por 4.
n: 42 es divisible entre 6.
p: 42 dividido entre 7 es 6.

95. $k \Leftrightarrow m$

96. $\neg k \Leftrightarrow \neg n$

97. $m \Leftrightarrow p$

98. $\neg m \Leftrightarrow \neg k$

99. $\neg p \Leftrightarrow \neg k$

100. $\neg m \Leftrightarrow n$

Lee y responde. Justifica tu respuesta.

Jorge, Raúl y Diana han decidido comprar un automóvil, cada uno diferente: Chevrolet, Mazda y Fiat. Analiza lo que dicen:

Jorge: Compraré un Mazda, si y sólo si, Raúl compra un Fiat.

Diana: compraré un Chevrolet, si y sólo si, Jorge no compra un Fiat.

101. Si Diana compra un Mazda, ¿qué marca de carro comprarán Jorge y Raúl?

Resuelve.

El grado sexto tiene tres representantes para presidente, vicepresidente y secretario, Melisa, Catalina y Sebastián. Para elegirlos se plantearon las siguientes situaciones:

Catalina es presidente, si y sólo si, Melisa es secretaria.

Sebastián es presidente, si y sólo si, Catalina es vicepresidente.

Sebastián es vicepresidente, si y sólo si, Catalina no es secretaria.

102. Completa la tabla con la información anterior.

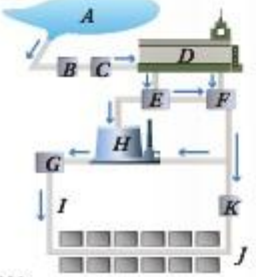
Catalina	Melisa	Sebastián
Presidente		
		Presidente
		Secretario

103. ¿Quién tiene más opciones de ser presidente del curso?

104. ¿Quién definitivamente no será el secretario o la secretaria?

Observa, lee y resuelve.

La siguiente gráfica muestra el sistema de acueducto de una ciudad.



A. Fuente de agua
B. Captador
C. Compuerta 1
D. Planta de agua sin tratar
E. Filtros
F. Desinfección con cloro
G. Compuerta 2
H. Tanque de almacenamiento
I. Tubería
J. Red de distribución de agua potable
K. Compuerta 3

105. Si la ciudad no recibe el servicio de agua potable, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

p: El agua es potable, si y sólo si, pasa de F a K.

q: La ciudad no recibe servicio de agua, si y sólo si, la compuerta G no se abre.

1.7 Cuantificadores

Recurso imprimible

A las expresiones: *para todo, todos, cualquier, existe, uno, algún* y *algunos*, se les denomina **cuantificadores**.

Los cuantificadores se clasifican en dos grupos: **cuantificadores universales y cuantificadores existenciales.**

Cuantificadores			
Universales		**Existenciales**	
Para todo Todos Cualquier	Símbolo	Existe Algunos Uno	Símbolo
	∀		∃

Por ejemplo, las proposiciones p y q que aparecen a continuación, tienen los cuantificadores universal y existencial, respectivamente:

p: Todos los animales necesitan agua para vivir.

q: Existe un número que es primo y par.

Para negar una proposición que involucra un cuantificador, se cambia el cuantificador universal por el existencial o el cuantificador existencial por el universal y se niega la proposición.

Por ejemplo, si r: Existen peces que son mamíferos, entonces: $\neg r$: Todos los peces no son mamíferos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Ejercito · Razono

Escribe, sobre la línea, el cuantificador adecuado para cada proposición.

106. ____________ los números pares son divisibles entre dos.

107. En Cartagena ____________ un castillo llamado San Felipe.

108. ____________ un virus que ataca el sistema respiratorio.

Lee el texto. Luego, determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.

Las plantas se clasifican en plantas con flores y plantas sin flores. Las plantas con flores son las que se reproducen a partir de semillas, y las plantas sin flores se reproducen por medio de esporas.

109. Todas las plantas tienen flores.

110. Algunas plantas sin flores se reproducen por medio de semillas.

111. Existen plantas que se reproducen por medio de semillas.

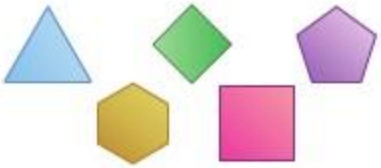
Determina la negación de las siguientes proposiciones. Luego, indica su valor de verdad.

112. Algunos cuadrados son rectángulos.

113. Todos los rectángulos son cuadrados.

114. Existen cuadrados que no tienen sus lados iguales.

Observa las figuras. Luego, escribe el cuantificador adecuado en cada proposición para que sea verdadera.



115. ____________ las figuras son polígonos.

116. ____________ un polígono que es regular.

117. ____________ polígonos tienen cuatro lados.

118. ____________ polígono es una figura plana formada por segmentos de recta.

2. Conjuntos

Actividad

Ampliación multimedia

La importancia de la **teoría de conjuntos** radica en su capacidad para dotar a las matemáticas de un lenguaje formal, claro y preciso.

2.1 Noción de conjunto

Un **conjunto** es una agrupación de objetos, llamados elementos. En la mayoría de los casos la agrupación de los elementos de un conjunto, se realiza con un criterio que permite identificar cuándo un objeto determinado pertenece o no a la agrupación.

Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas *A, B, C,… X, Y, Z* y los elementos que forman el conjunto se simbolizan con letras minúsculas: a, b, c,… x, y, z.

Cuando un elemento x pertenece a un conjunto *A* se escribe $x \in A$. Si x no pertenece al conjunto *A* se escribe $x \notin A$.

Determinación de conjuntos

Recurso imprimible

Cuando se expresa un conjunto es importante determinarlo de tal forma que se pueda decir si un elemento le pertenece o no. Un conjunto se puede determinar de dos maneras:

- Por **extensión**, nombrando uno a uno todos los elementos del conjunto si se conocen. Por ejemplo, $M = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$
- Por **comprensión**, nombrando la propiedad común a todos los elementos. Por ejemplo, como *M* es el conjunto formado por todos los múltiplos de 4 menores que 30, se escribe, $M = \{x/x$ es un múltiplo de 4 menor que $30\}$. En donde el símbolo / se lee "tal que".

Cuando un conjunto se determina por comprensión, es importante enunciar la propiedad con tal precisión, que permita identificar cada uno de los elementos que hacen parte del conjunto.

Historia de las matemáticas

George Cantor
1845-1918

Las ideas de Cantor llevaron al primer plano la pregunta: "¿Qué son los objetos que estudia la matemática?" Cantor creía que la matemática era una libre exploración intelectual de objetos, cuya existencia puede ser limitada solo por la lógica. Él pensaba que "La esencia de la matemática es la libertad".

Recurso imprimible

EJEMPLOS

1. Determinar por extensión cada conjunto.

a. $P = \{x/x$ **es un número par menor que** $11\}$

Para determinar por extensión el conjunto *P* hay que identificar los números pares menores que 11. Luego, se escribe $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

b. $A = \{x/x$ **es una letra de la palabra aroma**$\}$

Para determinar por extensión el conjunto *A* hay que identificar las letras de la palabra aroma.

Por tanto, el conjunto *A* por extensión es $A = \{a, m, o, r\}$.

Es importante anotar que en la palabra aroma, la *a* es un elemento que aparece dos veces, pero al nombrar al conjunto por extensión, este elemento se escribe una sola vez.

2. Determinar por comprensión cada conjunto.

a. $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

La característica común de los elementos del conjunto *D* es que son divisores de 12, entonces *D* se escribe por comprensión así: $D = \{x/x$ es un divisor de $12\}$

b. $C = \{$**pato, pavo, ganso, codorniz, pollo**$\}$

La característica común de los elementos del conjunto *C* es que son aves de corral, entonces, *C* se determina por comprensión así:

$C = \{x/x$ es un ave de corral$\}$.

Representación de conjuntos

Actividad

Un conjunto se puede representar gráficamente en un diagrama conocido como diagrama de Venn; en el caso de los conjuntos numéricos también se pueden representar mediante un diagrama lineal. Por ejemplo, el conjunto $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se puede representar así:

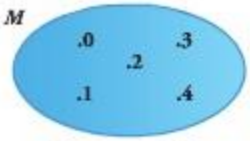


Diagrama de Venn

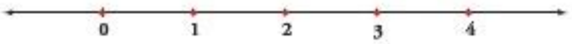


Diagrama lineal

Clasificación de conjuntos

Los conjuntos se clasifican según su cantidad de elementos.

- **Conjunto universal** o **referencial**: es el conjunto que sirve como referencia para otros conjuntos con características comunes. Se simboliza con la letra U.
- **Conjunto unitario**: es un conjunto formado por un solo elemento.
- **Conjunto vacío**: es un conjunto que carece de elementos. Se simboliza con la letra griega $\varnothing$ que se lee "fi", o con un par de llaves sin elementos en su interior { }.
- **Conjunto finito**: es un conjunto que está formado por un número determinado de elementos que se puede contar.
- **Conjunto infinito**: es un conjunto que está formado por un número indeterminado de elementos, por tanto, no se pueden contar.

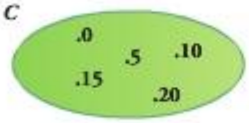
Recuerda que...

El símbolo $\mathbb{N}$ se utiliza para denotar el conjunto de los números naturales.

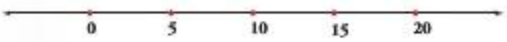
EJEMPLOS

1. **Representar el conjunto $C = \{0, 5, 10, 15, 20\}$ en un diagrama de Venn y en un diagrama lineal.**

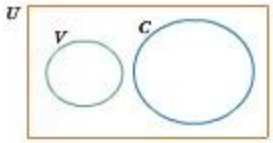
Para representar el conjunto C en un diagrama de Venn, se traza el óvalo y se escriben los elementos, así,



El diagrama lineal es:



2. **Determinar el conjunto universal por comprensión, que sirve como referencia a los conjuntos representados en el siguiente diagrama.**



$V = \{x/x$ es una vocal$\}$

$C = \{x/x$ es una consonante$\}$

Por tanto, el conjunto universal corresponde a:

$U = \{x/x$ es una letra del abecedario$\}$

3. **Determinar por extensión cada conjunto y hallar el número de elementos. Luego, clasificarlo.**

a. **$R = \{x/x \in \mathbb{N}, x > 100\}$.**

$R = \{101, 102, 103, 104, 105,\ldots\}$

Como existen infinitos números mayores que 100, entonces, el conjunto es infinito.

b. **$O = \{x/x$ es un mamífero, venenoso y pone huevos$\}$.**

O = {ornitorrinco} porque el ornitorrinco es el único mamífero que es venenoso y se reproduce por huevos. El conjunto O tiene un elemento. Por tanto, el conjunto O es unitario.

c. **$K = \{x/x \in \mathbb{N}, 99 < x < 100\}$**

$K = \{\ \}$ o $K = \varnothing$ ya que no existe ningún número natural entre dos números naturales consecutivos.

d. **$L = \{x/x \in \mathbb{N}, x$ es un divisor de 28$\}$.**

$L = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

Como el conjunto L tiene seis elementos, entonces, es finito.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

119. ¿Qué palabras se pueden cambiar por agrupación en la definición de conjunto?

120. ¿Cómo se determina un conjunto?

121. ¿Qué diagramas se utilizan para representar conjuntos?

122. ¿Qué clase de conjunto es el conjunto formado por todos los múltiplos de un número?

123. ¿Qué clase de conjunto es el conjunto formado por las ciudades de un país determinado?

Indica las expresiones que determinan conjuntos. Explica tu respuesta.

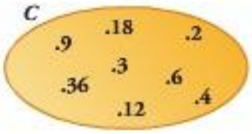
124. Los estudiantes mayores de 11 años.

125. Las flores más bonitas.

126. Las pruebas difíciles.

127. Los países de América del Sur.

Observa el diagrama de Venn. Luego, determina el valor de verdad de cada proposición.



128. $C = \{x/x$ es un múltiplo de 9$\}$.

129. C es un conjunto infinito.

Escribe el conjunto que representa cada imagen y exprésalo por comprensión.

130.

131.

Escribe cada conjunto por extensión y clasifícalo en finito, infinito, unitario o vacío.

132. $A = \{x/x$ es un número par$\}$

133. $B = \{x/x$ es un número primo entre 20 y 25$\}$

134. $C = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 0\}$

135. $D = \{x/x$ es un baile típico de Colombia$\}$

Lee y resuelve.

Juan realiza durante todo el año las actividades registradas en el siguiente planeador.

Enero	Febrero	Marzo	Abril
Viaja a Tolú de vacaciones	Inicia clases en el colegio	Participa en una obra de teatro	Presenta exámenes trimestrales
Mayo	**Junio**	**Julio**	**Agosto**
Realiza un campamento ecológico	Participa en un torneo de fútbol	Realiza una excursión de vacaciones	Presenta evaluaciones trimestrales
Septiembre	**Octubre**	**Noviembre**	**Diciembre**
Organiza un baile para un evento	Participa en un torneo de ajedrez	Presenta evaluaciones finales	Sale a vacaciones y va a la playa

Determina por extensión los conjuntos que cumplen las siguientes características:

136. $A = \{x/x$ es un mes para presentar evaluaciones$\}$

137. $B = \{x/x$ es un mes para participar de torneos$\}$

138. $C = \{x/x$ es un mes de vacaciones$\}$

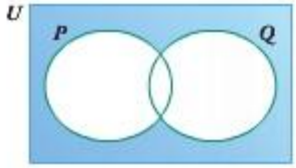
139. $D = \{x/x$ es un mes para realizar un campamento$\}$

140. $E = \{x/x$ es un mes para realizar una peregrinación$\}$

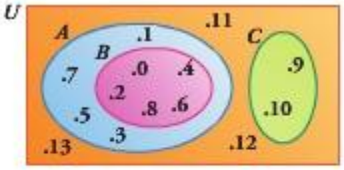
141. ¿Cuáles de los anteriores conjuntos son unitarios?

142. Ubica los elementos en cada conjunto según la clave.

- d $\in P$ • d $\notin Q$
- p $\in P$ • p $\in Q$
- n $\notin P$ • n $\in Q$
- m $\notin P$ • m $\notin Q$



143. Observa el diagrama. Luego, completa las afirmaciones para que sean verdaderas.



- _______ $\in U$
- _______ $\in A$
- _______ $\notin B$
- 7 $\notin$ _______
- _______ $\notin C$

2.2 Relaciones entre conjuntos

Actividad Recurso imprimible

En los conjuntos se pueden dar dos tipos de relaciones: una entre un elemento y un conjunto y otra, entre dos conjuntos.

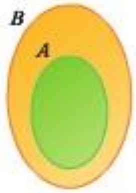
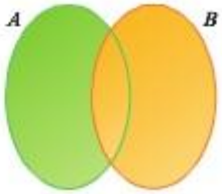
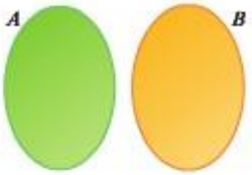
Relación entre un elemento y un conjunto

La relación que se establece entre un elemento y un conjunto se conoce con el nombre de **relación de pertenencia**, la cual permite establecer, como su nombre lo indica, si un elemento pertenece o no pertenece al conjunto.

Si un elemento pertenece a un conjunto se usa el símbolo $\in$ que significa *pertenece*. Si un elemento no pertenece al conjunto se usa el símbolo $\notin$ que significa *no pertenece*.

Relación entre dos conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, entre ellos se pueden presentar las siguientes relaciones:

Inclusión: un conjunto A está incluido en B o es subconjunto de B, si y sólo si, todos los elementos de A son elementos de B y se simboliza $A \subset B$. Es decir, $A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x, x \in A \Rightarrow x \in B$.	
Igualdad: dos conjuntos A y B son iguales, si y sólo si, todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A. La igualdad entre dos conjuntos se simboliza $A = B$ y se lee "A es igual a B".	
Intersecantes: dos conjuntos A y B son intersecantes cuando tienen elementos comunes, pero $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Es decir, A no está contenido en B y B no está contenido en A.	
Disyuntos: dos conjuntos A y B son disyuntos cuando no tienen ningún elemento en común.	

Si $A \subset B$, entonces, B es un conjunto referencial o universal para A.

$\varnothing \subset \mathrm{A}$, para cualquier conjunto A. Esto es, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier subconjunto.

La notación $A \subseteq B$, significa que A es subconjunto de B, o que A es igual a B.

EJEMPLOS

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{1, 2, 3, 6\}$

$B = \{x/x$ es un divisor de $9\}$

$D = \{x/x$ es un divisor de $6\}$

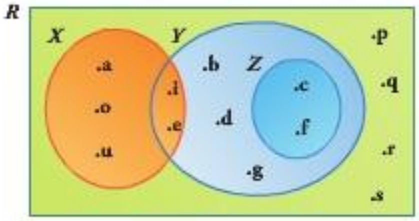
$E = \{x/x$ es un número menor que $6\}$

Cuando se comparan los conjuntos, se tiene que:

$A = E$, porque todos los elementos de A son elementos de E y todos los elementos de E son elementos de A.

$C = D$, porque todos los elementos de C son elementos de D y todos los elementos de D son elementos de C.

2. Determinar las relaciones entre cada par de conjuntos, teniendo en cuenta el siguiente diagrama.



a. La relación entre X y Y.

Los conjuntos X y Y son intersecantes, pues tienen los siguientes elementos en común: i y e. Además, $X \not\subset Y$ y $Y \not\subset X$.

b. La relación entre X y Z.

Los conjuntos X y Z son disyuntos porque no tienen elementos comunes.

c. La relación entre Y y Z.

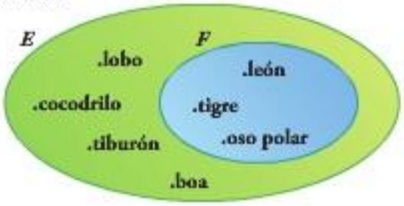
La relación entre los conjuntos Z y Y es de inclusión, debido a que todos los elementos del conjunto Z pertenecen al conjunto Y. Por esto, se escribe $Z \subset Y$.

3. Determinar la relación entre los conjuntos indicados. Luego, realizar el diagrama de Venn de la relación entre ellos.

$E = \{x/x$ es un animal carnívoro$\}$ y $F = \{$oso polar, león, tigre$\}$

Los elementos del conjunto F cumplen la característica del conjunto E, pero no todos los animales carnívoros están en F. Por tanto, se tiene que la relación entre E y F es de inclusión, así, $F \subset E$.

El diagrama de la relación es:



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

144. ¿Por qué es necesario relacionar dos conjuntos?

145. ¿Cuáles son las relaciones que se presentan entre dos conjuntos?

146. Si todos los elementos de A pertenecen a B, pero no todos los elementos de B pertenecen a A, ¿cuál es la relación que existe entre los dos conjuntos A y B?

147. Si dos conjuntos tienen todos sus elementos en común, ¿cómo son los conjuntos?

Establece el valor de verdad para cada proposición. Justifica tu respuesta con un ejemplo.

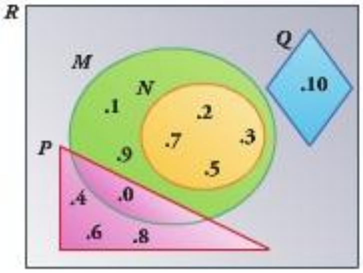
148. Si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces, $A = B$.

149. Si $A \subset B$ y $B \not\subset A$, entonces, A y B son disyuntos.

150. Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces, $C \subset A$.

151. Para todo A, se cumple que $\varnothing \subset A$.

E Observa el diagrama de Venn y escribe $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, según la relación que existe entre elemento y conjunto o entre cada par de conjuntos.



152. 2 ____ N

153. 8 ____ Q

154. 2 ____ M

155. N ____ M

156. Q ____ P

157. P ____ N

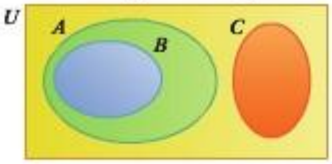
R Determina por extensión cada par de conjuntos y realiza el diagrama de Venn que representa la relación que hay entre ellos.

158. $A = \{x/x$ es un número par, $x \leq 16\}$
$B = \{x/x$ es un divisor de $16\}$

159. $J = \{x/x$ es una vocal de la palabra pacífico$\}$
$K = \{x/x$ es una vocal de la palabra castillo$\}$

160. $V = \{x/x$ es un mes con 30 días$\}$
$W = \{x/x$ es un mes del año$\}$

R Nombra cada conjunto a partir de las relaciones que se establecen en el siguiente diagrama de Venn.



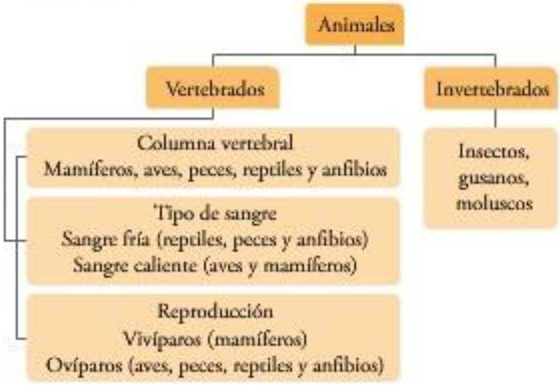
161. ____ $= \{x/x$ es una ciudad de Suramérica$\}$

162. ____ $= \{x/x$ es una ciudad de América$\}$

163. ____ $= \{x/x$ es una ciudad de Norteamérica$\}$

164. ____ $= \{x/x$ es una ciudad de Colombia$\}$

El siguiente esquema presenta la clasificación de los animales:



165. Organiza las clases de animales en un diagrama de Venn teniendo en cuenta que:

- A es el conjunto de animales
- V es el conjunto de vertebrados
- I es el conjunto de invertebrados
- C es el conjunto de animales de sangre caliente
- F es el conjunto de animales de sangre fría
- O es el conjunto de ovíparos

S Resuelve.

166. Realiza un diagrama de Venn para ilustrar las siguientes relaciones.

- Todos los cereales son alimentos.
- Ningún lácteo es carne.
- Existen alimentos que no son lácteos ni frutas.

167. Establece las relaciones entre cada par de conjuntos representados en el diagrama anterior.

Actividad

Ampliación multimedia

3. Operaciones entre conjuntos

Las operaciones entre conjuntos permiten combinar dos o más conjuntos para formar nuevos conjuntos con reglas bien definidas. Se pueden definir las siguientes operaciones: unión, intersección, complemento, diferencia y diferencia simétrica.

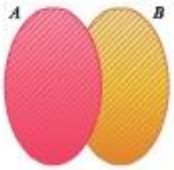
3.1 Unión entre conjuntos

Recurso imprimible

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, a B o ambos.

La unión de dos conjuntos A y B se simboliza $A \cup B$ y se determina por comprensión así, $A \cup B = \{x/x \in A \lor x \in B\}$

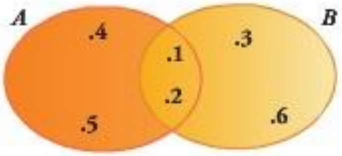
Para representar gráficamente la unión entre los conjuntos A y B se dibujan los conjuntos de acuerdo con la relación que hay entre ellos, y se sombrea con líneas la región de la gráfica donde se encuentran ubicados los elementos de A o de B, como se indica a continuación:

***A* y *B* son intersecantes**	***A* y *B* son disyuntos**	***B* es subconjunto de *A***
Cuando los conjuntos tienen elementos comunes.	Cuando los conjuntos no tienen elementos comunes	Cuando los elementos de B son elementos de A
		
$A \cup B$	$A \cup B$	$A \cup B = A$

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 6\}$, se tiene que:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, los elementos repetidos se escriben solo una vez.

La representación gráfica de $A \cup B$ es:



Propiedades de la unión entre conjuntos

En la unión de conjuntos se cumplen las siguientes propiedades:

- $A \cup B = B \cup A$. La unión es conmutativa.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. La unión es asociativa.
- $A \cup \varnothing = A$, para todo A.
- $A \cup U = U$, para todo A.

EJEMPLOS

1. Representar gráficamente la unión de los conjuntos que se indican en cada caso.

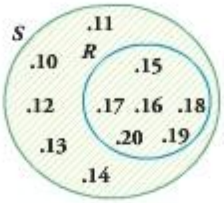
a. $R = \{x/x \in \mathbb{N}, 15 \leq x \leq 20\}$

$S = \{x/x \in \mathbb{N}, 10 \leq x \leq 20\}$

Primero, se determina por extensión cada conjunto.

$R = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ y $S = \{10, 11, 12, \ldots, 20\}$
Como $R \subset S$, se tiene que: $R \cup S = \{10, 11, 12, \ldots, 20\}$

Por tanto, la gráfica es:



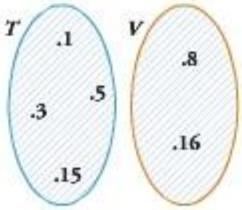
b. $T = \{x/x$ **es un divisor de** $15\}$ **y**
$V = \{x/x$ **es un múltiplo de 8 menor que** $20\}$

Primero, se determinan los conjuntos por extensión,

$T = \{1, 3, 5, 15\}$ y $V = \{8, 16\}$

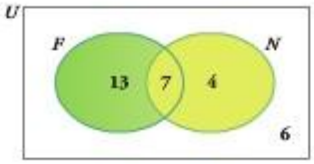
Luego, los conjuntos son disyuntos.

Por tanto, $T \cup V = \{1, 3, 5, 8, 15, 16\}$ y su representación es:



2. Determinar la cantidad de estudiantes del siguiente grupo:

- Fútbol: F
- Natación: N
- Fútbol y natación: 7
- Solo fútbol: 13
- Solo natación: 4
- Ni natación ni fútbol: 6

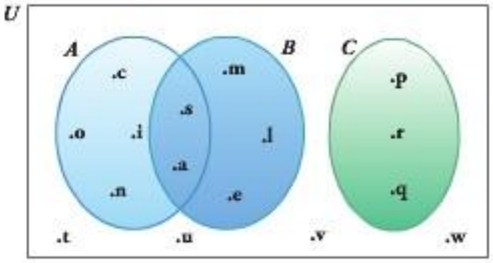


Para determinar la cantidad de estudiantes, se suma la cantidad de elementos que forman cada parte. Así:

$13 + 7 + 4 + 6 = 30$

Por tanto, la cantidad de estudiantes del grupo es 30.

3. Observar el siguiente diagrama de Venn. Luego, determinar las uniones y verificar las igualdades.



a. $A \cup B = B \cup A$

$A \cup B = \{c, o, i, n, a, s, m, e, l\}$, se escriben los elementos de A y B.

$B \cup A = \{m, e, l, s, a, c, o, i, n\}$, se escriben los elementos de A y B.

Como $A \cup B$ y $B \cup A$ tienen los mismos elementos, entonces, se cumple que $A \cup B = B \cup A$.

b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Primero, se determina $(A \cup B) \cup C$, así:

$$(A \cup B) \cup C = \{c, o, i, n, a, s, m, e, l\} \cup \{p, r, q\}$$
$$= \{c, o, i, n, a, s, m, e, l, p, r, q\}$$

Segundo, se determina $A \cup (B \cup C)$, así:

$$A \cup (B \cup C) = \{c, o, i, n, a, s\} \cup \{s, a, m, l, e, p, r, q\}$$
$$= \{c, o, i, n, a, s, m, l, e, p, r, q\}$$

Por tanto, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

c. $A \cup \varnothing = A$

Se determina, $A \cup \varnothing$, así:

$$A \cup \varnothing = \{c, o, i, n, a, s\} \cup \{\,\}$$
$$= \{c, o, i, n, a, s\}$$

Por tanto, se tiene que $A \cup \varnothing = A$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono · **S** Soluciono problemas

Responde.

168. ¿Cuáles son las operaciones que se pueden definir entre dos conjuntos?

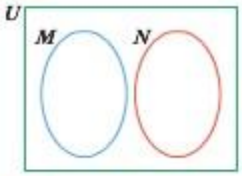
169. ¿Cómo se determina la unión entre dos conjuntos?

170. ¿Qué relación hay entre los conjuntos P y Q si la unión entre ellos es el conjunto Q?

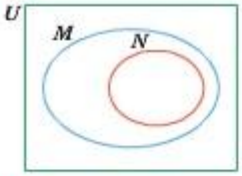
171. ¿En qué situaciones la unión entre dos conjuntos tiene más elementos que cada uno de los conjuntos?

E **Sombrea con líneas la región del diagrama de Venn que corresponde a la unión entre los conjuntos M y N.**

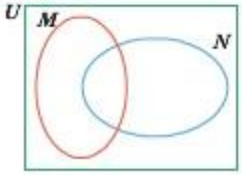
172.



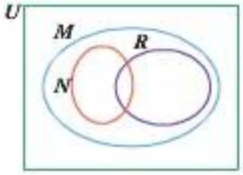
174.



173.



175.



R **Determina por extensión cada unión. Luego, realiza el diagrama de Venn correspondiente.**

176. $A = \{x/x$ es un divisor de $54\}$
$B = \{x/x$ es un divisor de $48\}$

177. $C = \{x/x \in \mathbb{N}, 5 \leq x \leq 12\}$
$D = \{x/x \in \mathbb{N}\ x \leq 12\}$

178. $G = \{x/x$ es un pez de agua dulce$\}$
$H = \{x/x$ es un pez de agua salada$\}$

R **Encuentra las uniones a partir de los siguientes conjuntos.**

$M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$N = \{2, 4, 6, 8\}$
$R = \{2, 3, 5, 7\}$

179. $M \cup N$

180. $N \cup R$

181. $(M \cup N) \cup R$

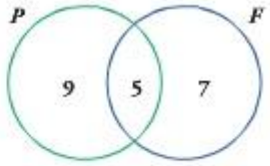
182. $M \cup R$

183. $M \cup (N \cup R)$

184. $(M \cup N) \cup \varnothing$

S **Resuelve.**

El siguiente diagrama de Venn representa a los estudiantes que tienen iPod, iPhone o los dos, donde P es el conjunto de los estudiantes que usan iPod y F, los que usan iPhone.



185. ¿Cuántos estudiantes usan en total iPod?

186. ¿Cuántos estudiantes usan en total iPhone?

187. ¿Cuántos estudiantes hay en total?

Lee y resuelve.

Para el día del amor y la amistad el grado sexto A realiza una fiesta, 8 estudiantes piden solo pizza, 7 estudiantes piden pizza y helado y 5 estudiantes piden solo helado.

188. Realiza un diagrama de Venn para determinar cuántos estudiantes hay en el curso.

S **Soluciona.**

La pastelería "La cocina de la abuela" ofrece una variedad de postres de diferente sabor como se muestra en la tabla.

Tipo de postre	Sabor
Cheesecake	Vainilla Chocolate Frutos rojos
Tres leches	Vainilla Frutos rojos Arequipe
Ponqué	Chocolate Fresa Frutos rojos

189. Representa en diagramas de Venn los tipos de postres.

190. ¿Qué sabores hay de *cheesecake* o tres leches?

191. ¿Qué sabores hay en común entre tres leches y ponqué?

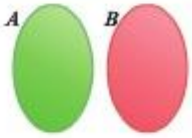
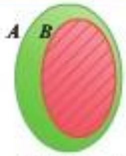
192. ¿Qué sabores se comparten entre los tres tipos de pasteles?

3.2 Intersección entre conjuntos

Recurso imprimible

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos comunes de A y B. La intersección entre A y B se simboliza $A \cap B$ y se determina por comprensión así, $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$.

Para representar gráficamente la intersección entre los conjuntos A y B, se dibujan los conjuntos de acuerdo con la relación que hay entre ellos, y se hacen líneas sobre la región de la gráfica donde se encuentran ubicados los elementos comunes.

A y *B* son intersecantes	*A* y *B* son disyuntos	*B* es subconjunto de *A*
		
$A \cap B$	$A \cap B = \varnothing$	$A \cap B = B$

Propiedades de la intersección de conjuntos

Las propiedades de la intersección son:

- $A \cap B = B \cap A$.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, para todo A.
- $A \cap U = A$, para todo A.

EJEMPLOS

1. **Encontrar la intersección entre los siguientes conjuntos:**

$M = \{x/x$ es un primo menor que $20\}$ y $N = \{x/x$ es un número par menor que $10\}$

Primero, se determinan los conjuntos M y N por extensión,

$M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $N = \{2, 4, 6, 8\}$.

Luego, se forma $M \cap N$ con los elementos comunes, así, $M \cap N = \{2\}$.

2. **En un restaurante, 12 personas almuerzan plato principal, 7 personas almuerzan entrada y 5 personas almuerzan plato principal y entrada. ¿Cuántas personas almorzaron solo una opción en el restaurante?**

Primero, se realiza la gráfica de dos conjuntos intersecantes, P, plato principal y E, entrada. Para ello, se ubica la información de tal manera que en $P \cap E$ se ubiquen los que almuerzan plato principal y entrada.

Los que solo almuerzan plato principal son $12 - 5 = 7$.

Los que almuerzan solo entrada son $7 - 5 = 2$.

Luego, la gráfica de la situación se muestra en la figura 1.

Por tanto, 9 personas almuerzan solo una opción en el restaurante.

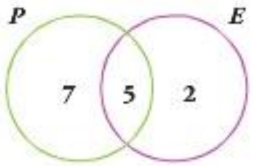


Figura 1.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono · **S** Soluciono problemas

Responde.

193. Si A y B son conjuntos disyuntos, ¿cuál es la intersección entre A y B?

194. ¿Cuál es la intersección entre un conjunto P y el conjunto $\varnothing$?

E Hallar la intersección entre cada par de conjuntos.

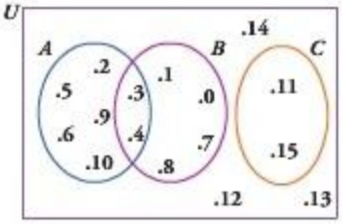
195. $A = \{x/x$ es un divisor de $28\}$ y
$B = \{x/x$ es un divisor de $35\}$

196. $C = \{x/x \in \mathbb{N}, 12 \leq x \leq 20$ y x es par$\}$ y
$D = \{x/x \in \mathbb{N}, 12 \leq x \leq 20\}$

197. $E = \{x/x$ es una vocal de la palabra renacuajo$\}$ y
$F = \{x/x$ es una consonante de palabra estanque$\}$

198. $G = \{x/x$ es una flor$\}$
$H = \{x/x$ es un árbol$\}$

Observa el diagrama de Venn y determina el valor de verdad de las expresiones dadas. Justifica tu respuesta.



199. $A \cap B = B \cap C$.

200. $A \cap \varnothing = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

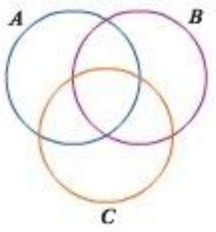
201. $A \cap (B \cup C) = \{3, 4\}$

202. $A \cap U = \{12, 13, 14\}$

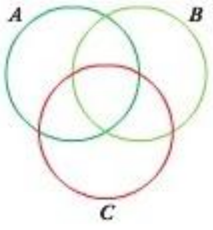
203. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B$

R Sombrea con líneas, en el diagrama, cada operación y compara los resultados.

204. $A \cap (B \cup C)$



205. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



S Observa la siguiente tabla que contiene el listado de algunas películas por género.

Película	Género
Avatar *The Terminator* *Star Wars*	Ciencia ficción
Cars *Toy Story* *Shrek*	Animación
Batman *Hulk* *Hombre araña*	Superhéroes
Avatar *Shrek* *Hombre araña*	Aventuras

206. ¿Cuántas películas son de ciencia ficción y aventuras a la vez?

207. ¿Cuántas películas son de superhéroes y ciencia ficción a la vez?

S En un concurso de baile participaron 35 personas. Si 28 personas bailaron *ballet* y 21 bailaron flamenco, responde:

208. ¿Cuántas personas bailaron solamente *ballet*?

209. ¿Cuántas bailaron solamente flamenco?

S Resuelve.

210. A una conferencia sobre el medio ambiente asisten 45 biólogos y 85 ecologistas. Si 30 de los asistentes poseen el título de biólogo-ecologista, ¿cuántas personas son solo biólogos y cuántas solo ecologistas?

211. Se aplicó una encuesta a un grupo de personas sobre el consumo de tres bebidas: A, B y C, y se obtuvieron los siguientes resultados: a 33 personas les gusta la bebida A, a 38 personas les gusta la bebida B, 30 personas les gusta la bebida C, 18 personas beben tanto A como B, 12 personas beben A y C, y 15 personas beben B y C. Además, 6 personas expresaron tener gusto por las tres bebidas. ¿Cuántas personas consumen solo una bebida?

212. Escribe dos conjuntos que cumplan la condición dada.

$A \cup B = \{0\}$ y $A \cap B = \varnothing$

3.3 Complemento de un conjunto

El **complemento de un conjunto** A contenido en un conjunto universal U, es el conjunto formado por todos los elementos que están en U pero que no están en el conjunto A. El complemento del conjunto A se simboliza A^C y se determina por comprensión de la siguiente manera $A^C = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$.

El complemento de un conjunto A se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 2, en este caso es la región rayada.

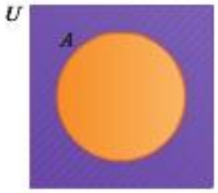


Figura 2.

Leyes de De Morgan

Las leyes de De Morgan son propiedades que relacionan la unión, la intersección y el complemento de dos conjuntos A y B. Estas leyes son las siguientes:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

EJEMPLOS

1. Verificar que $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$ para los siguientes conjuntos.

$U = \{x/x$ es un dígito$\}$, $A = \{x/x$ es un divisor de $8\}$, $B = \{x/x$ es un dígito par$\}$

Primero, se determinan por extensión los tres conjuntos así:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 4, 8\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Segundo, se encuentran A^C y B^C.

$A^C = \{0, 3, 5, 6, 7, 9\}$ Se escriben los elementos de U que no pertenecen a A.

$B^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ Se escriben los elementos de U que no pertenecen a B.

Tercero, se determina $A^C \cap B^C$, así:

$A^C \cap B^C = \{3, 5, 7, 9\}$ Se escriben los elementos que pertenecen a A^c y a B^c.

Cuarto, se halla $A \cup B$ así:

$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$ Se escriben los elementos que pertenecen a A o a B.

Luego, se obtiene $(A \cup B)^C$ así:

$(A \cup B)^C = \{3, 5, 7, 9\}$

Finalmente, se comparan los dos conjuntos $A^C \cap B^C$ y $(A \cup B)^C$:

Como $A^C \cap B^C = \{3, 5, 7, 9\}$ y $(A \cup B)^C = \{3, 5, 7, 9\}$, se tiene que los conjuntos son iguales. Luego, se verifica que $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$.

2. En un salón de clase hay 20 estudiantes, 12 tienen gafas, 8 tienen cabello negro y 5 tienen gafas y pelo negro. ¿Cuántos estudiantes no tienen gafas ni pelo negro?

Primero, se dibuja un diagrama de Venn para dos conjuntos intersecantes (figura 3).

Luego, se obtienen los datos para cada parte del diagrama así:

Los que usan solo gafas y son $12 - 5 = 7$. Los que solo tienen pelo negro corresponden a $8 - 5 = 3$. Los que no tienen ni gafas ni pelo negro corresponden a $(G \cup N)^C$ y se hallan con la operación $20 - (7 + 5 + 3) = 5$.

Finalmente, se concluye que del total de 20 estudiantes, 5 no tienen gafas ni pelo negro.

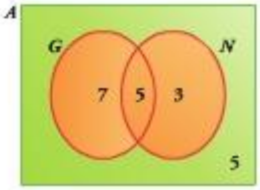


Figura 3.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono

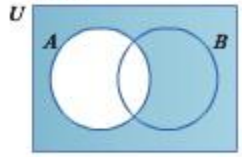
Responde.

213. ¿Cuál es el complemento del conjunto vacío?

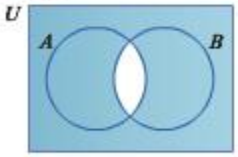
214. ¿Cuál es el complemento de la intersección de dos conjuntos P y Q?

Escribe la operación que representa la región sombreada.

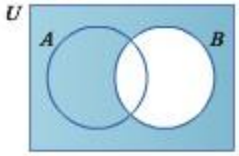
215.



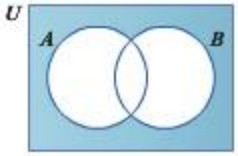
217.



216.



218.



Representa en un diagrama de Venn los siguientes conjuntos.

$U = \{a, b, c, e, i, j, m, n, o, p, s, l\}$
$A = \{c, a, j, o, n\}$
$B = \{m, e, s, a\}$
$C = \{s, i, l, a\}$

Luego, realiza las operaciones entre conjuntos.

219. A^C **221.** C^C **223.** $(B \cap C)^C$

220. B^C **222.** $(A \cup B)^C$ **224.** $(A \cap B \cap C)^C$

Dado el conjunto universal, determina por extensión el complemento de cada conjunto.

225. $U = \{x/x$ es un múltiplo de 5 menor que 50$\}$
$H = \{x/x$ es un múltiplo de 10 menor que 50$\}$
$H^C = \{$_______________$\}$

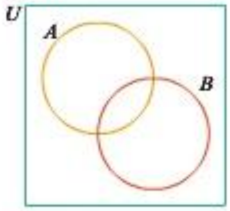
226. $U = \{x/x \in \mathbb{N}, 10 \leq x \leq 20\}$
$L = \{x/x \in \mathbb{N}, 10 \leq x \leq 15\}$
$L^C = \{$_______________$\}$

227. $U = \{x/x$ es una región de Colombia$\}$
$M = \{x/x$ es la región Andina$\}$
$M^C = \{$_______________$\}$

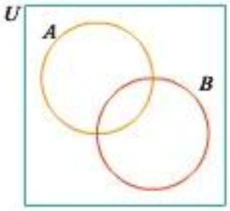
228. $U = \{x/x$ es un polígono de menos de diez lados$\}$
$N = \{x/x$ es un triángulo$\}$
$N^C = \{$_______________$\}$

Ubica los conjuntos $U = \{e, u, c, a, l, i, p, t, o\}$, $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{c, a, l, i\}$ en cada diagrama de Venn y sombrea con líneas las operaciones indicadas.

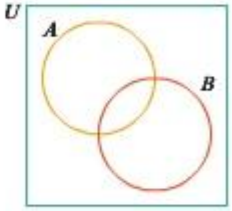
229. $(A^C \cup B)^C$



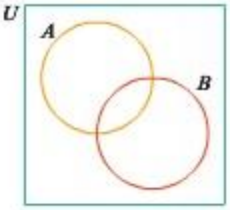
231. $(A^C \cap B^C)^C$



230. $(A \cap B^C)^C$



232. $(A^C \cup B^C)^C$



Representa cada situación en el diagrama de Venn y resuelve.

233. Una galería presenta las obras de Karen y de Henry. A la exposición asisten 185 personas, de las cuales 75 personas aprecian las obras de Karen, 80 aprecian las obras de Henry y 20 observan las dos obras. ¿Cuántas personas no observaron ninguna de las dos obras?

234. Se realizó una encuesta a 200 personas sobre su canal de televisión nacional preferido.
Los resultados obtenidos fueron los siguientes: 105 personas prefieren el canal A, 98 prefieren el canal B, 90 prefieren el canal C, 45 prefieren el canal A y B, 35 prefieren el canal A y C, 40 prefieren el canal B y C y 25 personas prefieren los tres canales. ¿Cuántas personas prefieren un canal solamente? ¿Cuántas personas de las encuestadas no ven ninguno de los tres canales?

3.4 Diferencia entre conjuntos

Enlace web
Recurso imprimible

La **diferencia** entre los conjuntos A y B, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. La diferencia entre A y B se simboliza $A - B$ y se determina por comprensión de la siguiente manera:

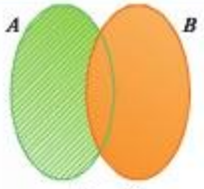
$$A - B = \{x/x \in A \land x \notin B\}$$

Matemática*mente*

Si $A \subset U$, ¿qué operación entre conjuntos resulta de $U - A$?

La diferencia entre los conjuntos A y B se representa dibujando los conjuntos de acuerdo con la relación que hay entre ellos y rayando la región de la gráfica donde se encuentran ubicados los elementos que están en A y no están en B.

A y B son intersecantes

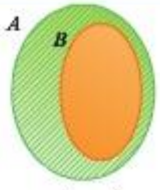


$A - B$

A y B son disyuntos

$A - B = A$

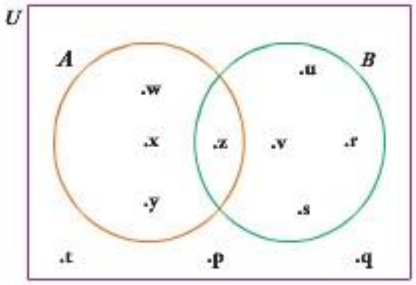
B es subconjunto de A



$A - B$

EJEMPLOS

1. **Observar la gráfica y realizar las siguientes operaciones entre los conjuntos.**



a. $A - B$

Se escriben los elementos que solo pertenecen al conjunto A.

$$A - B = \{w, x, y\}$$

b. $B - A$

Se escriben los elementos que solo pertenecen al conjunto B.

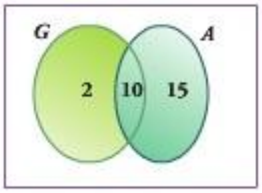
$$B - A = \{u, v, r, s\}$$

c. $(A - B)^C$

Se escriben los elementos que no pertenecen al conjunto $A - B$.

$$(A - B)^C = \{p, q, r, s, t, u, v, z\}$$

2. **A una fiesta asisten 27 personas: 12 personas con gorro y 25 personas con antifaz. Si 10 personas tienen antifaz y gorro, ¿cuántas personas asistieron solo con gorro? ¿Cuántas personas asistieron solo con antifaz?**



Primero, se realiza un diagrama con dos conjuntos intersecantes, G representa a los que usan gorro, A representa a los que usan antifaz y el conjunto $G \cap A$ son los que usan gorro y antifaz.

Luego, las personas que solo asistieron con gorro son $12 - 10 = 2$. Y las personas que asistieron con antifaz únicamente son $25 - 10 = 15$.

3. **Representar por medio de conjuntos la siguiente situación. Susana, Carlos, Andrés, Felipe, Andrea y Juan viven en el mismo edificio. Si Susana, Carlos y Andrea viven en el mismo piso, ¿quiénes no viven en el mismo piso?**

El conjunto que representa la situación es $A - M$.

Luego, los que no viven en el mismo piso de los demás son Andrés, Felipe y Juan.

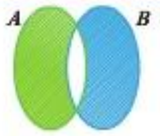
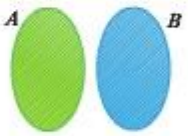
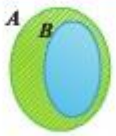
3.5 Diferencia simétrica

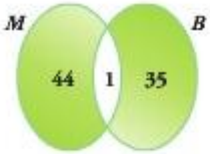
Actividad

La **diferencia simétrica** entre los conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a la unión de *A* y *B* y no pertenecen a la intersección entre *A* y *B*. La diferencia simétrica se nota $A \triangle B$. La diferencia simétrica de *A* y *B* se determina por comprensión así:

$$A \triangle B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

La diferencia simétrica entre los conjuntos *A* y *B* se representa dibujando los conjuntos de acuerdo con la relación que hay entre ellos, y rayando la región de la gráfica donde se encuentran los elementos que están en $A \cup B$ y que no están en $A \cap B$.

A y *B* son intersecantes	*A* y *B* son disyuntos	*B* es subconjunto de *A*
 $A \triangle B$	 $A \triangle B$	 $A \triangle B$



M: Matemáticas
B: Biología
Figura 4.

Propiedades de la diferencia simétrica

Las propiedades de la diferencia simétrica son:

- $A \triangle B = B \triangle A$.
- Si *A* y *B* son conjuntos disyuntos, entonces, $A \triangle B = A \cup B$.
- $A \triangle \varnothing = A$, para todo *A*.
- $A \triangle U = U - A = A^C$.

EJEMPLOS

1. Determinar la diferencia simétrica entre los conjuntos $V = \{x/x$ es un múltiplo de 3 menor que $20\}$ y $W = \{x/x$ es un múltiplo de 2 menor que $20\}$.

Primero, se determinan por extensión los conjuntos dados.

$V = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ y
$W = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

Segundo, se halla la unión entre los dos conjuntos.

$V \cup W = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

Tercero, se halla la intersección entre los conjuntos,

$V \cap W = \{6, 12, 18\}$

Luego, se halla la diferencia de la unión menos la intersección de los conjuntos.

$(V \cup W) - (V \cap W) = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16\}$

Por último, se establece la diferencia simétrica así,

$V \triangle W = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16\}$

2. En un curso hay 80 personas de las cuales, 45 estudian matemáticas, 36 estudian biología y algunos estudian las dos materias. ¿Cuántas personas solo estudian matemáticas o solo estudian biología?

Primero, se dibuja un diagrama de Venn (ver figura 4) de dos conjuntos intersecantes.

Segundo, se calcula el número de los que solo estudian matemáticas, así: $80 - 36 = 44$, que es la diferencia entre el total y los que estudian biología.

Tercero, se calcula el número de los que solo estudian biología, así $80 - 45 = 35$, que es la diferencia entre el total menos los que estudian matemáticas.

Luego, los que estudian una o dos materias son:
$M \cup B = 44 + 1 + 35 = 80$. Los que estudian las dos materias son $M \cap B = 1$.

Por tanto, los que estudian una sola materia corresponden a $M \triangle B = 80 - 1 = 79$. Entonces, 79 personas estudian una sola materia.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

Responde.

235. Si $A \subset B$, ¿qué conjunto resulta de $A - B$?

236. Si $A \cap B = \varnothing$, ¿qué conjunto resulta de $A - B$?

E **Determina por extensión los conjuntos *M*, *N* y *R*. Luego, realiza las operaciones indicadas.**

$M = \{x/x$ es una letra de la palabra jaguar$\}$
$N = \{x/x$ es una letra de la palabra tigrillo$\}$
$R = \{x/x$ es una letra de la palabra nutria$\}$

237. $M - N$

238. $N - R$

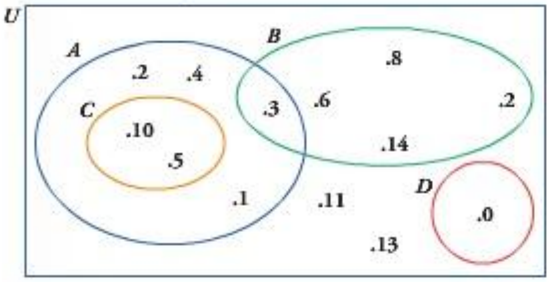
239. $M \Delta R$

240. $M - (N \Delta R)$

241. $(M - N) \cup (R - M)$

242. $(R \Delta N) \cup (N \Delta M)$

R **Observa el diagrama de Venn y realiza las operaciones entre conjuntos.**



243. $(A - B) \cup (A - C)$

244. $(B - D) \Delta A$

245. $U - (D - C)$

246. $(A \Delta C) - B$

247. $(A - B)^C - D$

248. $U - (B \Delta A)$

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

249. Si $A \subset B$, entonces, $B - A = A$.

Es una proposición ______________.

250. $U - A = A \Delta U$.

Es una proposición ______________.

251. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Es una proposición ______________.

252. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces, $A \Delta B = \varnothing$.

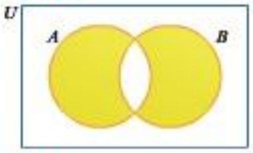
Es una proposición ______________.

253. Si $A \subset B$, entonces, $A \Delta B = A - B$.

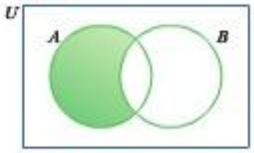
Es una proposición ______________.

R **Relaciona cada diagrama de Venn con la operación correspondiente.**

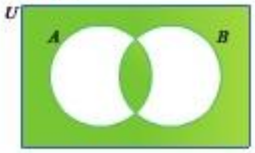
254.



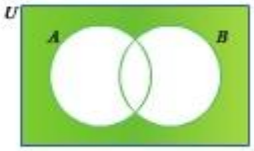
256.



255.



257.



a. $U - (A \cup B)$

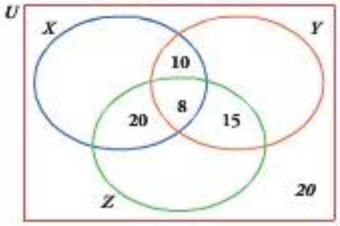
b. $(A - B) \cup (B - A)$

c. $(A \Delta B)^C$

d. $(A \Delta B) - B$

Resuelve.

La siguiente gráfica muestra algunos resultados de una encuesta que se aplicó a 120 personas sobre su preferencia por tres marcas de chicle *X*, *Y* y *Z*.



Si 60 personas prefieren el chicle *X* y 40 prefieren el chicle *Y*.

258. ¿Cuántas personas prefieren solo el chicle *X*?

259. ¿Cuántas personas prefieren solo el chicle *Y*?

260. ¿Cuántas personas solo prefieren el chicle *Z*?

S **En un conjunto residencial viven 150 personas de las cuales 120 personas trabajan, 65 estudian y 50 estudian y trabajan.**

261. Representa la situación en un diagrama de Venn.

262. ¿Cuántas personas solo trabajan?

263. ¿Cuántas personas ni estudian ni trabajan?

Proposiciones

Completa con la palabra Sí o No.

264. La raíz cúbica de 125 es 5.

_____ es una proposición.

265. 8 es un número natural.

_____ es una proposición.

266. Mide 120 cm.

_____ es una proposición.

267. La mitad de 240 es 120.

_____ es una proposición.

268. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

_____ es una proposición.

269. El único número primo par es 2.

_____ es una proposición.

270. El símbolo del conjunto de los números naturales es $\mathbb{N}$.

_____ es una proposición.

Lee la siguiente información.

Las fuentes de energía se clasifican en renovables y no renovables. Observa la siguiente tabla:

Fuentes no renovables	Fuentes renovables
Carbón	Energía hidráulica
Petróleo	Energía solar
Gas natural	Energía eólica
Energía nuclear	Energía mareomotriz

Escribe el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

271. El carbón es una fuente de energía y todas las fuentes de energía son renovables.

Es una proposición _______________

272. Si la energía nuclear no es renovable, entonces, el petróleo se puede agotar.

Es una proposición _______________.

273. La energía solar es renovable, si y sólo si, algunas fuentes de energía son no renovables.

Es una proposición _______________.

Conjuntos

Determina por extensión los siguientes conjuntos.

274. $V = \{x/x$ es un número natural$\}$

$V =$ _______________

275. $P = \{x/x$ es un múltiplo de 4 menor que 20$\}$

$P =$ _______________

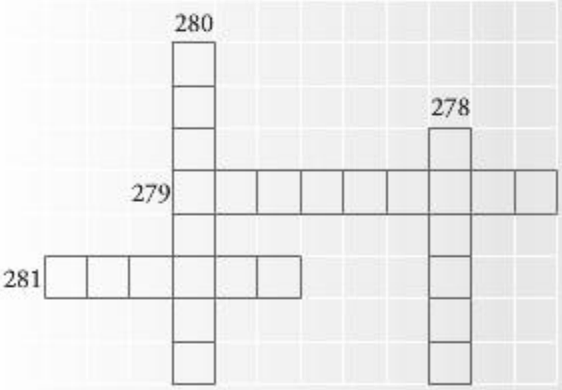
276. $Q = \{x/x$ es un número par menor o igual que 20$\}$

$Q =$ _______________

277. $R = \{x/x$ es un divisor primo de 14$\}$

$R =$ _______________

Completa el crucigrama teniendo en cuenta los conjuntos V, P, Q y R de los numerales 274 a 277.



278. El conjunto Q se clasifica como un conjunto _______________.

279. La relación entre los conjuntos P y Q es de _______________.

280. El conjunto V se clasifica como un conjunto _______________.

281. R es un conjunto _______________.

Resuelve.

En una bolsa se depositan cinco balotas numeradas de uno a cinco y se pide a una persona que saque dos balotas.

282. Escribe el conjunto formado por todas las parejas que se puedan formar donde la suma de las balotas sea 9.

____

Operaciones entre conjuntos

283. Dados los siguientes conjuntos y la tabla, ubica los elementos en el diagrama de Venn.

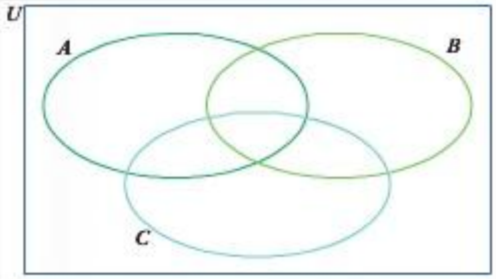
$U = \{x/x \text{ es un alimento}\}$

$A = \{x/x \text{ es un alimento que contiene vitamina } A\}$

$B = \{x/x \text{ es un alimento que contiene vitamina } B\}$

$C = \{x/x \text{ es un alimento que contiene vitamina } C\}$

Alimentos con vitamina A	durazno, zanahoria, espinaca
Alimentos con vitamina B	arveja, espinaca, zanahoria
Alimentos con vitamina C	fresa, guayaba, espinaca



Teniendo en cuenta el diagrama anterior, realiza las operaciones entre conjuntos.

284. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

285. $(A - C) \cap B$

286. $(A \cup B) - C$

287. $(A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

288. $(A \Delta B) \Delta C$

289. $(A \cup B \cup C) - (A \cap B)$

Dados los siguientes conjuntos:
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 9\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$

290. Con la información suministrada, ¿es posible encontrar los conjuntos A y B? ______

Explica tu respuesta. ______

______

291. Con relación al numeral anterior, ¿qué información es necesaria? ______

______

Explica tu respuesta. ______

______

292. Si se sabe que $A - B = \{0, 2\}$, ¿es posible hallar A y B?

______

En caso afirmativo encuéntralos; en caso negativo justifica tu respuesta. ______

______

293. Grafica la situación anterior en un diagrama de Venn.

294. Si existe un conjunto C, de tal forma que:

$A \cap B \cap C = \{4\}$, $A \cap C = \{0, 4\}$, ¿es posible encontrar el conjunto C? ______

Justifica tu respuesta. ______

PROBLEMAS PARA REPASAR

En un colegio de 400 estudiantes se observó que al finalizar el primer bimestre, 200 reprobaron matemáticas; 190 reprobaron español y 150 reprobaron ciencias. Además, 50 estudiantes reprobaron las tres asignaturas, 90 reprobaron matemáticas y español, 120 reprobaron matemáticas y ciencias y 10 reprobaron solo español y ciencias.

¿Cuántos estudiantes reprobaron matemáticas o ciencias?

¿Cuántos estudiantes reprobaron español pero no matemáticas?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántos estudiantes reprobaron matemáticas o ciencias? ¿Cuántos estudiantes reprobaron español pero no matemáticas?

¿Cuáles son los datos del problema?

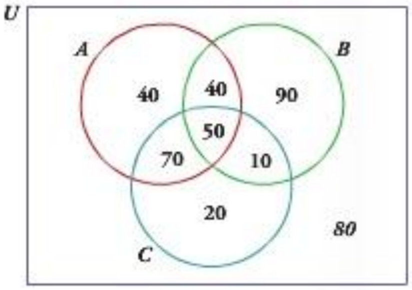
El colegio tiene 400 estudiantes. 200 estudiantes reprobaron matemáticas; 190 reprobaron español y 150 reprobaron ciencias; 50 estudiantes reprobaron las tres asignaturas, 90 reprobaron matemáticas y español, 120 reprobaron matemáticas y ciencias y 10 reprobaron solo español y ciencias. Esta información se puede organizar en un diagrama de Venn así:

U es el conjunto formado por los estudiantes del colegio.

A es el conjunto formado por los estudiantes que reprobaron matemáticas.

B es el conjunto formado por quienes reprobaron español.

C es el conjunto formado por quienes reprobaron ciencias.



Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para determinar cuántos estudiantes reprobaron matemáticas o ciencias se debe hallar la cantidad de elementos de la unión entre los conjuntos *A* y *C*.

Así, $A \cup C = 40 + 40 + 50 + 70 + 10 + 20 = 230$.

Para determinar cuántos estudiantes reprobaron español pero no matemáticas se debe hallar la diferencia entre *B* y *A*. En este caso, se suma la cantidad de elementos que pertenecen a *B* pero no al conjunto *A*.

Así, $B - A = 90 + 10 = 100$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones estén realizadas correctamente. Luego, se tiene que 230 estudiantes reprobaron matemáticas o ciencias y 100 estudiantes reprobaron español pero no matemáticas.

Resuelve las preguntas 295 y 296, de acuerdo con la siguiente información.

Seis amigos fueron a cenar, Laura, Érica, Sara, Ricardo, Pedro y Alex. Ninguna mujer se sentó al lado de otra mujer y todos tienen al frente un compañero del sexo opuesto.

295. Si Pedro está al frente de Sara y Sara no está en el mismo lado de la mesa con Érica ni Laura, ¿quiénes están sentados al lado de Sara?

296. Si Laura está al frente de Alex, ¿quién está sentado al frente de Ricardo?

Resuelve las preguntas 297 y 298 de acuerdo con el siguiente enunciado.

Tres buses salen de la ciudad B hacia la ciudad M con sus respectivos conductores, José, Manuel y Jaime. El bus de José es más rápido que el de Manuel y tiene más kilómetros recorridos que el de Jaime. El bus de Manuel es más rápido que el de Jaime y tiene más kilómetros recorridos que José. El bus de Jaime es nuevo.

297. ¿Quién conduce el bus más rápido?

298. ¿Quién conduce el bus con más kilómetros?

299. En un club deportivo se practica *squash* y bolos. Si de 45 personas que asisten al club, 28 practican *squash* y 16 ambos deportes, ¿cuántas personas practican solamente bolos?

300. Un instituto de idiomas ofrece cursos de inglés y francés. En total, hay inscritos 325 estudiantes, de los cuales 150 están inscritos solamente en inglés y 120 están inscritos solamente en francés.

¿Cuántos estudiantes están inscritos tanto en inglés como en francés?

Resuelve las preguntas 301 a 303, de acuerdo con la siguiente información.

Cierto restaurante ofrece en su menú carnes, pescados y mariscos. Para el día del padre, asistieron 400 personas, de los cuales 180 consumieron carne, 250 consumieron pescado, 95 consumieron mariscos, 45 consumieron carne y pescado, 60 pescado y mariscos, 55 carne y mariscos y 25 los tres tipos.

301. ¿Cuántas personas consumieron solo carne?

302. ¿Cuántas personas consumieron solo pescado?

303. ¿Cuántas personas no consumieron ningún producto?

Responde las preguntas 304 a 306 de acuerdo con la siguiente información.

En una encuesta acerca de diferentes actividades preferidas por los niños, se determinó que 30 prefieren juegos de video e Internet, 90 prefieren juegos de video, 100 prefieren juegos de Internet y 150 prefieren actividades distintas a estas dos.

304. ¿Cuántos niños prefieren únicamente juegos de video?

305. ¿Cuántos niños prefieren únicamente juegos de Internet?

306. ¿Cuántos niños prefieren los dos tipos de juegos?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para crear ideas que están fuera del pensamiento habitual.

Existe una nueva técnica para crear ideas que están fuera del pensamiento normal. Esta técnica se denomina *pensamiento lateral*. El pensamiento lateral permite llegar a la solución de problemas a partir de la lógica de las situaciones que se pueden presentar en un caso específico.

Esta técnica es muy útil para los abogados e investigadores en la resolución de un caso. Gracias a ella, pueden tomar todas las posibilidades para resolver su caso, analizarlas e investigarlas hasta llegar a una solución de forma creativa.

Para desarrollar el pensamiento lateral se deben tener en cuenta los siguientes procesos:

Comprobar suposiciones: es necesario que la factibilidad de cada una de las posibles soluciones propuestas sean puestas a consideración hasta llegar a una respuesta correcta.

Realizar preguntas correctas: para llegar a una solución adecuada se debe iniciar haciendo preguntas generales para enmarcar el problema y después, se realizan preguntas específicas.

Pensamiento lógico: antes de desarrollar un pensamiento lateral, se requiere de un pensamiento lógico en donde las implicaciones, equivalencias, conjunciones y disyunciones son requeridas para enmarcar el problema en una solución específica.

Creatividad: es la herramienta más importante ya que para hallar la solución es necesario ingeniarse posibles soluciones y, a partir de ellas, plantear las preguntas y llegar a una solución que a nadie se le haya ocurrido antes.

Por ejemplo, la siguiente situación:

En un campo abierto se encuentra una persona tendida en el césped sin vida. Lo único que se observa es que la persona tiene un paquete sin abrir en su espalda y no hay ninguna otra criatura viva en el campo. ¿Cómo murió?

En esta situación se deben analizar las diferentes posibilidades:

Primero, se verifica si la persona tiene impactos de bala o de arma blanca. Como esto no se menciona en la información, entonces, se supone que no las tiene.

Segundo, no se puede decir que la persona fue atacada por un animal, ya que los datos indican que no hay ninguna criatura viva en el campo.

Tercero, la única pista es el paquete sin destapar que la persona lleva en su espalda. Por ello, se deben conocer las características de ese paquete, como su tamaño y material. Es entonces el momento de plantearse preguntas generales para resolver el problema.

Por último, ya descubierto qué podría ser el paquete sin destapar, se puede dar una solución a partir de una proposición lógica.

Como es un paquete sin destapar y que se encuentra en la espalda de la persona, si es de tela y parece una maleta, puede ser un paracaídas, ***entonces****, podemos decir que se trata de una persona que seguramente se lanzó de un avión y murió al caer al piso porque no se abrió su paracaídas.*

Lee la siguiente situación e indica cuál de las soluciones presentadas es la más lógica. Luego explica tu respuesta.

Un hombre vive en el décimo piso de un edificio y todas las mañanas toma el ascensor para bajar al primer piso, pero, cuando llega en la tarde y está solo, toma el ascensor hasta el séptimo piso y sube los tres pisos restantes por la escalera. El hombre detesta subir escaleras, pero lo hace porque:

1. **Requiere hacer ejercicio todos los días de la semana.**
2. **Es de baja estatura y no alcanza el botón del décimo piso.**
3. **Quiere cambiar la monotonía de su rutina diaria cuando puede.**

Trabaja con AnallogicA

Objetivo: construir tablas de verdad de proposiciones compuestas.

Descripción: construir tablas de verdad de las proposiciones lógicas mediante el programa AnallogicA. Determinar en qué casos se forman proposiciones verdaderas y en qué casos se forman proposiciones falsas.

Para acceder a AnallogicA, ingresa y descarga el programa en: www.sourceforge.net/projects/anallogica/files/latest/download

❶ Haz clic en **Inicio** y luego haz clic en el ícono **AnallogicA**.

❷ Haz clic en el botón **Listo** para entrar la opción **Edición**.

Terminología por defecto

Conjuncion /\
Conjuncion Negativa &
Disjuncion V
Disjuncion Negativa ||
Disjuncion Exclusiva #
Implicacion =>
Bicondicional <=>
Negacion ¬

❸ El área de trabajo se despliega automáticamente y debe verse como la siguiente:

❹ En el cuadro en blanco de la parte superior, digita la proposición de la cual quieres construir la tabla de verdad. Por ejemplo, para la proposición $p \wedge q$. Primero digita p, luego, oprime la opción **Conjunción** y finalmente, digita q. Esto se debe ver así:

p/\q

❺ Haz clic en la opción **Hacer** para obtener la tabla de verdad de la conjunción $p \wedge q$.

❻ Luego, la tabla de verdad aparecerá de la siguiente manera:

p/\q

p	q	p/\q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

```
p/\q
 A   p/\q  ->  A
```

```
Contingencia
Cantidad de operadores binarios -> 1
Cantidad de operadores unarios -> 0
Cantidad de variables logicas -> 2
Cantidad de combinaciones -> 4
```

En la parte inferior derecha, puedes observar una relación del número de objetos de la tabla de verdad. Aparecerá de esta manera:

- Cantidad de operadores binarios, que indica que hay un operador que corresponde a la conjunción ($\wedge$).
- Cantidad de operadores unarios, que indica que no hay ninguno (podría ser la negación).
- Cantidad de variables lógicas, que indica que hay dos que son p y q.
- Cantidad de combinaciones, que indica las opciones de verdadero y falso. En este caso son 4.

❼ Utiliza el programa AnallogicA para construir la tabla de verdad de la disyunción, la implicación y la equivalencia. En cada caso comprueba cuándo cada proposición es verdadera.

❽ Elabora la tabla de verdad para otras proposiciones como las siguientes.

a. $(p \wedge q) \Rightarrow q$ **b.** $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$

2 Sistemas de numeración

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender las relaciones y las conversiones que se presentan entre los **sistemas de numeración**.
- Realizar las **operaciones aditivas y multiplicativas con números naturales**, utilizando las propiedades correspondientes.
- Establecer **relaciones entre potencias, raíces y logaritmos**.
- **Resolver problemas** mediante la aplicación de relaciones y operaciones básicas entre números naturales.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

6 Multimedia	**1** Audio
1 Galería	**10** Imprimibles
11 Actividades	**3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Escribe con cifras.

a. Cuatrocientos quince mil doscientos dos.

b. Setecientos cincuenta y dos millones novecientos mil.

2. Ordena de mayor a menor los siguientes números.

617.751.860, 617.800.003, 70.998.567, 618.003.703

3. Realiza las operaciones indicadas.

a. 348.798 + 678.904

b. 398.997 − 69.632

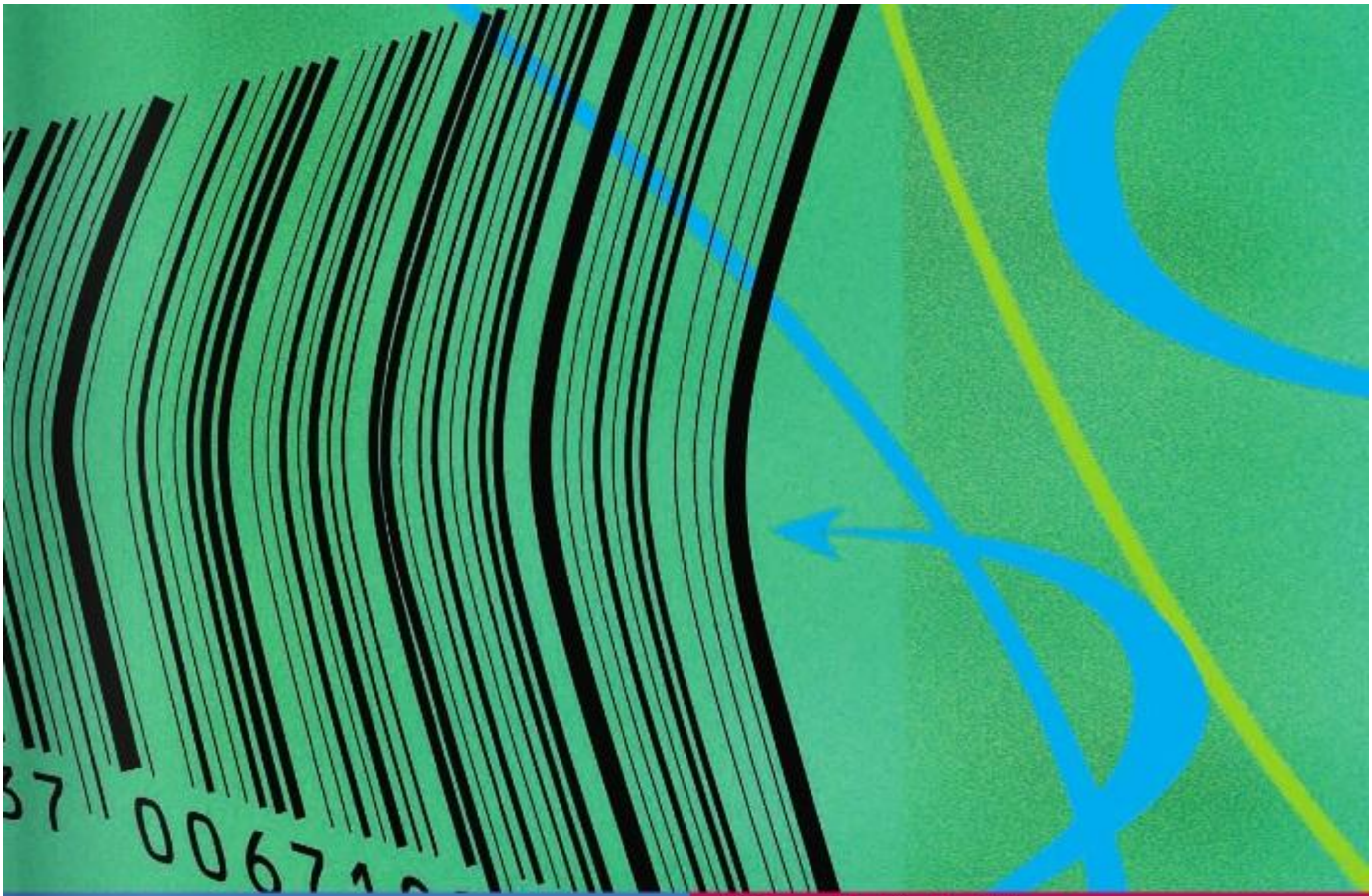
c. 54.535 × 908

d. 65.400 ÷ 12

4. Resuelve.

a. Álvaro pesa 34,75 kilos y Marta pesa 32,67 kilos. ¿Cuánto pesa Álvaro más que Marta?

b. Manuel compró seis galones de gasolina para su carro. Si el galón cuesta $8.760, ¿cuánto pagó Manuel por la gasolina?



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para identificar un producto por medio del código de barras.

El código de barras o de seguridad es un sistema de identificación que tienen los productos del mercado, el cual ofrece información general del producto como país de fabricación, nombre de la empresa y consecutivo del producto fabricado. Este código identifica y caracteriza el producto sin necesidad de observar su contenido, además es global y por ello puede ser reconocido en cualquier parte del mundo.

- Lee más acerca de este tema en la página 88.

Cronología de sistemas de numeración

Valle del Nilo. Aparecen cálculos de multiplicación y división por dos, en el hueso de Ishango.

Mesopotamia. Los sumerios utilizan el primer sistema de numeración posicional.

Inglaterra. Robert Recorde inventa el signo = y populariza en Europa los símbolos + y −.

India. Brahmagupta escribe un libro donde aparece por primera vez el cero.

Francia. Blaise Pascal inventa la primera calculadora digital. El aparato es llamado Pascalina.

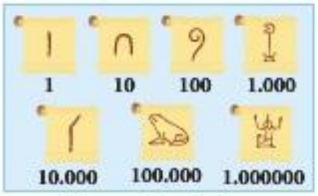
Alemania. Christoph Rudolff publica un tratado sobre álgebra donde aparece por primera vez el signo $\sqrt{\ }$.

1. Sistema de numeración

Enlace web

Contar es importante en muchas actividades y también lo era para los pueblos que vivieron hace cientos de años. En los vestigios que han dejado las culturas antiguas se encuentran evidencias de cómo llevaban el registro de sus cuentas: piedras con rayas esculpidas, nudos en cuerdas, jeroglíficos en estelas y otros más.

Los sistemas de numeración han sido la respuesta que las diferentes culturas a través del tiempo han dado a la necesidad de contar.



Numeración egipcia

1	一	6	六	100	百
2	二	7	七	1.000	千
3	三	8	八	10.000	万
4	四	9	九	1.000.000	百万
5	五	10	十		

Numeración china

Numeración maya

Matemática*mente*

¿Cuántos símbolos diferentes usaban los romanos antiguos para representar números menores que 2.000?

El conjunto de los símbolos y las reglas con las que ellos se combinan y operan se conoce como **sistema de numeración** y como se observa en la figura anterior, han sido varios en la historia del ser humano, ya que se han usado diferentes códigos y bases numéricas.

1.1 Sistema de numeración decimal

En la actualidad, el sistema de numeración más conocido y empleado en el mundo es el **sistema de numeración decimal**, también conocido como sistema en base diez, el cual utiliza los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 como elementos para escribir cualquier número.

El sistema de numeración decimal es **posicional**, es decir, que el valor que representa cada dígito depende de la posición que ocupa en el número. Por ejemplo, en el número 4.587 el dígito 5 representa quinientos, mientras que el dígito 8 representa ochenta.

Las características del sistema de numeración decimal permiten que un número se pueda representar de diferentes maneras: teniendo en cuenta el nombre de la posición de cada cifra, en notación exponencial o en notación polinómica.

Por ejemplo, para escribir el número quinientos cuarenta y un mil trescientos veintiocho en los diferentes tipos de representación, se tiene que el número que se quiere representar es 541.328.

- **Notación según el nombre de la posición de cada cifra:** se nombra cada cifra acompañada del nombre de la posición que ocupa, normalmente se usa una abreviatura. Así, la representación del número 541.328 es:

$$5CM + 4DM + 1UM + 3C + 2D + 8U$$

- **Notación exponencial:** el número se expresa teniendo en cuenta el valor de posición de cada una de sus cifras en forma de potencias de la base en la que se está trabajando, en este caso base 10. Por tanto, el número 541.328 en forma exponencial es:

$$(5 \times 10^5) + (4 \times 10^4) + (1 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (8 \times 10^0)$$

- **Notación polinómica:** el número se expresa teniendo en cuenta el valor de cada una de sus cifras. Luego, el número en forma polinómica es:

$$500.000 + 40.000 + 1.000 + 300 + 20 + 8$$

En la siguiente tabla se muestra el valor posicional de un número de hasta siete cifras en el sistema numérico decimal, aunque es posible escribir números más grandes.

Nombre de la posición	Unidades de millón (Um)	Centenas de mil (CM)	Decenas de mil (DM)	Unidades de mil (UM)	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
Notación exponencial	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Valor	1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1

EJEMPLOS

1. Escribir el número correspondiente a cada representación:

a. $9 \times 10^6 + 6 \times 10^4 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Se realizan las operaciones indicadas.

$(9 \times 1.000.000) + (6 \times 10.000) + (4 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1)$

$= 9.000.000 + 60.000 + 400 + 20 + 5 = 9.060.425.$

Entonces:

$9 \times 10^6 + 6 \times 10^4 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 9.060.425.$

b. 5Dm + 2CM + 7UM + 5C + 3U

Se remplaza el valor de cada expresión.

$(5 \times 10.000.000) + (2 \times 100.000) + (7 \times 1.000) + (5 \times 100) + (3 \times 1)$

Se resuelven las operaciones indicadas.

$50.000.000 + 200.000 + 7.000 + 500 + 3 = 50.207.503$

Entonces:

5Dm + 2CM + 7UM + 5C + 3U = 50.207.503.

2. Representar en forma exponencial los números que aparecen en la siguiente situación.

La Tierra recorre unos 30 km por segundo en su giro alrededor del Sol. En un día recorre más de 2.500.000 km. El recorrido anual de la Tierra alrededor del Sol es cerca de mil millones de km. Un niño de diez años de edad ha viajado casi diez mil millones de km, aunque nunca haya salido de su ciudad.

Los números que aparecen son: 30, 2.500.000, 1.000.000.000, 10, 10.000.000.000.

Por tanto, la representación exponencial de cada número es:

$30 = 3 \times 10$

$2.500.000 = 2 \times 10^6 + 5 \times 10^5$

$1.000.000.000 = 1 \times 10^9$

$10 = 1 \times 10^1 = 10$

$10.000.000.000 = 1 \times 10^{10}$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • **E** Ejercito • Propongo • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

Responde.

1. ¿Por qué surgieron los sistemas de numeración?

2. ¿Qué significa la expresión: el sistema de numeración decimal es posicional?

3. ¿Cuáles son las formas de representar un número decimal?

E **Escribe la cifra que se indica en cada uno de los siguientes números.**

4. Centenas en 126.346.

5. Decenas de millón en 485.903.040.

6. Unidades de mil en 783.774.

7. Decenas en 108.

8. Centenas de mil en 4.581.002.

E **Escribe cada número en notación polinómica, exponencial y de acuerdo con el nombre de la posición de sus cifras.**

9. 8.128.695
10. 606.049
11. 2.391.233
12. 13.801.093
13. 73.010.004
14. 210.002.003

E **Escribe el número que corresponde en cada caso.**

15. $8.000 + 200 + 40 + 8$

16. $5 \times 10^4 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^0$

17. $30.000 + 4.000 + 20 + 5$

R **Determina para cada caso dos números que cumplan las condiciones dadas.**

18. Ocho cifras, 7 unidades de millón, 6 decenas de mil y 2 unidades.

19. Nueve cifras, 9 decenas de millón, 3 unidades de millón, 4 centenas de mil y 2 centenas.

20. Cuatro cifras donde las unidades y las centenas son iguales.

E **Resuelve.**

21. Nombra tres sistemas numéricos diferentes al sistema de numeración decimal.

22. Escribe los símbolos que se empleaban para representar los números del 1 al 10 en cada uno de los sistemas numéricos que nombraste.

E **23. Escribe en notación polinómica los datos del Sol.**

Edad	5 × mil millones de años.
Diámetro	$1 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 2 \times 10^4$ km
Masa	$3 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^1$ kg
Distancia a la Tierra	$1 \times 10^8 + 5 \times 10^7$ km
Temperatura del núcleo	$1 \times 10^7 + 4 \times 10^6$ °C
Temperatura de la superficie	$5 \times 10^3 + 5 \times 10^2$ °C
Esperanza de vida	5×10^9 años.

Lee y responde. Se llama número capicúa o palíndromo a cualquier número que se lee igual de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Por ejemplo, 97879.

24. ¿Cuántos números de dos cifras son capicúas? Justifica tu respuesta.

25. ¿Cuántos números de tres cifras son capicúas? Justifica tu respuesta.

26. ¿Cuántos números capicúas hay de cuatro cifras?

R **Analiza las siguientes situaciones.**

27. Una persona decide cambiar en el número 611 la cifra de las centenas por un 5, y obtiene un nuevo número. ¿Cuál es la diferencia entre estos dos números?

28. En el número 583 se cambia la cifra de las decenas por otro dígito y se obtiene un nuevo número. Si la diferencia entre el nuevo número y 583 es 60, ¿cuál es el valor de las decenas en el nuevo número?

S **29. Para jugar al ajedrez, un programa de computación analiza todas las jugadas que pueden realizarse en una posición. Después de la primera jugada de las blancas pueden surgir 20 posiciones distintas. En solo las primeras cuatro jugadas el programa debe analizar la increíble cantidad de 152.587.890.625 posiciones. ¿Cuántas miles de posiciones debe analizar el programa en las primeras cuatro jugadas?**

1.2 Sistema de numeración binario

Recurso imprimible

Ampliación multimedia

El **sistema de numeración en base 2** o **sistema binario** tiene su aplicación principal en el lenguaje computacional, en el que es empleado para programar. En este sistema se utilizan únicamente dos símbolos: el 0 y el 1, llamados dígitos binarios, que representan cualquier cantidad.

Observa que los números manejados en una computadora solo utilizan ceros y unos para su representación, como los bits.

Conversión de un número de sistema decimal a binario

Para efectuar la conversión del sistema decimal al sistema binario se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se toma el número dado y se divide entre dos, sin usar decimales en el cociente.
- **Luego,** el cociente obtenido se vuelve a dividir entre 2 como en el paso anterior. Este proceso se repite sucesivamente hasta que el cociente sea menor que dos.
- **Al finalizar** las divisiones, se toma el último cociente y todos los residuos de abajo arriba y se escribe el número, ya convertido al sistema binario.

EJEMPLOS

1. Observar la cantidad de naranjas. Luego, responder.

a. ¿Cuántos grupos de 16 naranjas se pueden formar?

Como hay 28 naranjas, entonces, se forma 1 grupo de 16 naranjas y sobran 12.

b. Con las que sobran, ¿cuántos grupos de 8 se pueden formar?

Como sobran 12, entonces, se forma 1 grupo de 8 naranjas y sobran 4.

c. Con las que sobran, ¿cuántos grupos de 4 se pueden formar?

Como sobran 4, entonces, se forma 1 grupo de 4 naranjas y no sobra nada.

d. ¿Cuál es el número binario asociado a la cantidad de naranjas?

Para encontrar el número binario, se completa la tabla.

$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
1	1	1	0	0

Por tanto, 28 en binario es 11100_2.

2. Convertir el número 29 en binario.

Para convertir el número 29 al sistema binario se tiene que:

$$\begin{array}{r|l} 29 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \longrightarrow \text{Primer dígito del número.} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Por tanto, 29 en binario es 11101_2.

Recuerda que...

Cuando un número está escrito en una base numérica, se coloca con un número pequeño al final del número la base en la que se encuentra.

Por ejemplo, el número 2134 en base cinco se expresa 2134_5.

Cuando el número está en base diez, no es necesario escribir la base.

Conversión de un número binario a decimal

Para convertir un número en base 2 a base 10, es decir, de sistema binario a decimal, se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- Ubicar el número binario en una tabla de orden, con el fin de que a cada cifra le corresponda una potencia de 2.
- Multiplicar cada cifra del número binario por la potencia de 2 respectiva y sumar los productos obtenidos. El número que resulta será el número binario representado en el sistema de numeración decimal.

Por ejemplo, la estructura de una imagen digital, como una fotografía, está formada por pixeles y cada pixel por números binarios que conforman cada color. Un pixel verde se representa con el número 11110000_2, y para encontrar el número decimal asociado al color verde, se procede así:

Se ubican las cifras en la tabla de potencias de 2.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0	0	0	0

Luego, se escribe el número binario en su desarrollo exponencial.

$11110000_2 =$

$1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

Por último, se resuelven las operaciones indicadas, de acuerdo con el orden de las operaciones.

$11110000_2 =$

$1 \times 128 + 1 \times 64 + 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1$

$11110000_2 = 128 + 64 + 32 + 16 = 240.$

Por tanto, el número decimal asociado a un pixel verde es 240.

Recuerda que…

Tabla de potencias de 2	
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1.024

Un número elevado a la cero es igual a 1, excepto el 0.

Actividad

Operaciones con números binarios

Para sumar números binarios es necesario tener en cuenta que $1_2 + 1_2 = 10_2$, es decir, se coloca cero y se lleva 1. Mientras que el producto de binarios es básico, ya que al multiplicar por 0 el resultado es 0, y al multiplicar un número por 1, se obtiene el mismo número.

Para sumar o multiplicar dos o más números en base 2, se deben tener en cuenta las siguientes sumas y productos fundamentales:

$0_2 + 0_2 = 0_2$ $\quad$ $1_2 + 0_2 = 1_2$ $\quad$ $0_2 \times 0_2 = 0_2$ $\quad$ $1_2 \times 0_2 = 0_2$

$0_2 + 1_2 = 1_2$ $\quad$ $1_2 + 1_2 = 10_2$ $\quad$ $0_2 \times 1_2 = 0_2$ $\quad$ $1_2 \times 1_2 = 1_2$

EJEMPLO

Realizar la siguiente operación.

$1010_2 + 1001_2$

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,0_2 \\ +\ \ 1\,0\,0\,1_2 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1_2 \end{array}$$

Se tienen en cuenta las sumas fundamentales.

Lo anterior se comprueba convirtiendo los tres números a base diez, con lo que se obtiene:

$1010_2 = 10$ $\qquad$ $1001_2 = 9$ $\quad$ y $\quad$ $10011_2 = 19$

Por tanto, la suma es correcta ya que $10 + 9 = 19$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde.

30. ¿Cuál es la importancia del sistema de numeración binario?

31. ¿Cuántos símbolos se pueden usar para escribir un número en base 5?

32. ¿Cuál es el número más grande de cinco cifras que se puede escribir en base 2?

33. ¿Cuál es el proceso para convertir un número decimal a binario?

34. ¿Cuál es el proceso para convertir un número binario a decimal?

E **Expresa en sistema binario los siguientes números.**

35. 7

36. 10

37. 25

38. 58

39. 143

40. 199

41. 488

42. 100

43. 349

E **Escribe los siguientes números en base diez.**

44. 11_2

45. 101_2

46. 10010_2

47. 1110_2

48. 1101_2

49. 1000_2

50. 111011_2

51. 1101011_2

E **52. Completa la siguiente tabla.**

+	0	1	10	11
0				
1				
10				
11				

R **53. Completa la siguiente tabla, escribiendo el mayor y el menor número que se puede expresar en base dos utilizando todos los números dados en cada caso.**

Valores	Número mayor	Número menor
1, 1, 0, 0		
1, 0, 1, 0, 1, 0, 0		
0, 0, 1, 0, 1, 1		
1, 1, 0, 0, 1		
1, 1, 1, 1, 0		

E **Resuelve las siguientes sumas.**

54. $1101_2 + 100_2$

55. $1010101_2 + 11_2$

56. $110101_2 + 1001_2$

57. $110001_2 + 1111_2$

58. $1110001_2 + 10011_2$

Resuelve y comprueba tu respuesta.

59. Explica cómo se resta en el sistema binario.

60. Cuando se multiplica 10 por 10 en base decimal, el resultado se escribe de la misma forma que en base dos.

61. Cuando se multiplica 10 por 100 en base 10, el resultado se escribe de la misma forma que en base dos.

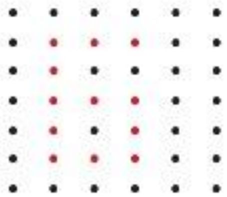
62. Todo número terminado en cero en base dos es un número par en base diez.

S **63. Un robot recibe como identificación el número 101001 en el sistema de numeración binario. ¿Cuál es la representación del robot en el sistema decimal?**

Resuelve.

Los computadores almacenan información por medio de circuitos que se activan con corriente eléctrica. Cada circuito puede estar activado o desactivado, por lo cual, utilizan el sistema binario, ya que solo requiere el símbolo 1 para representar activado y 0 para desactivado.

Si se elabora un circuito para encender unos ledes, en un tablero electrónico como el de la figura:



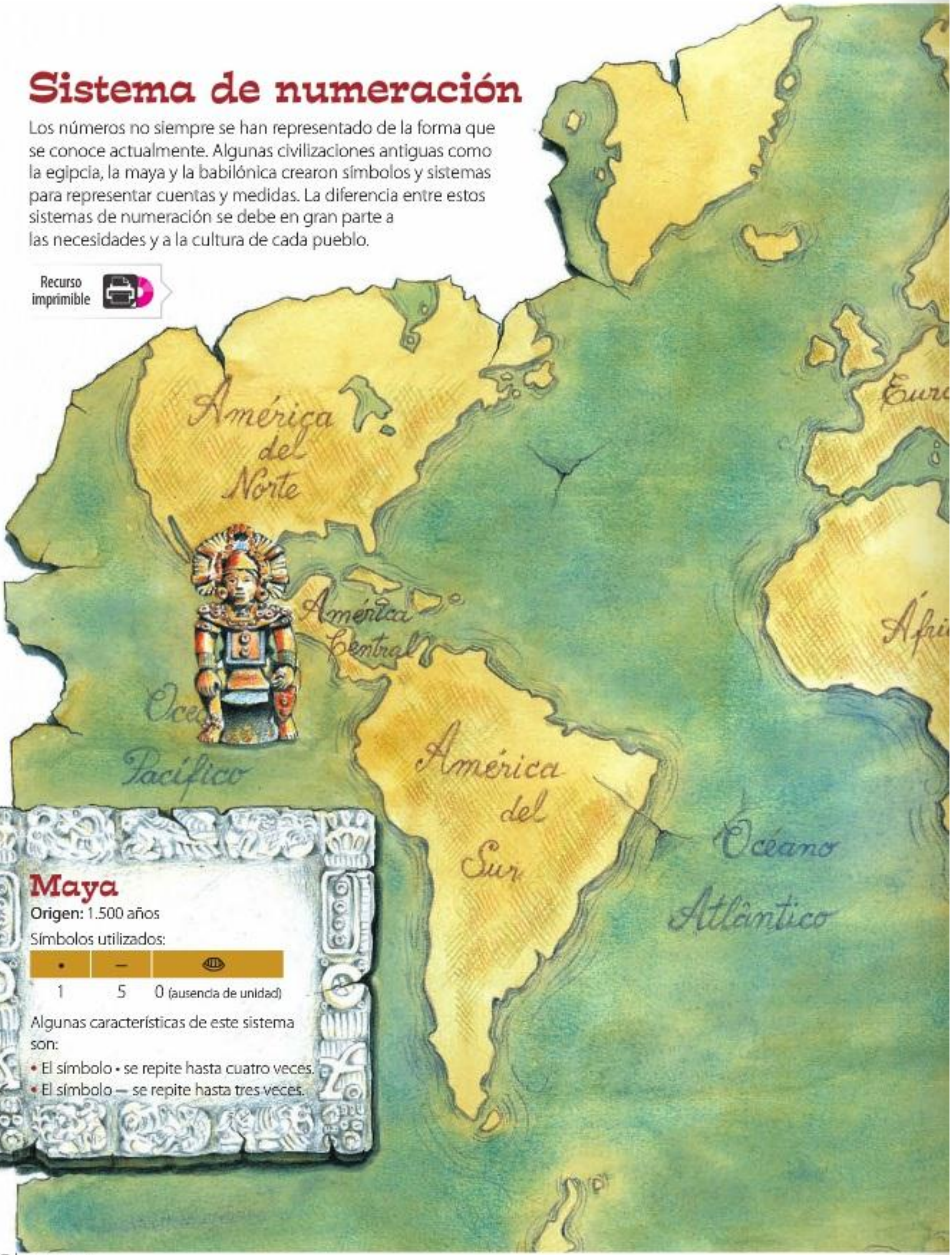
64. Escribe el número binario que representa el circuito de cada fila, si el led está activado cuando el punto está de color rojo.

65. Determina el número decimal asociado a cada fila.

Sistema de numeración

Los números no siempre se han representado de la forma que se conoce actualmente. Algunas civilizaciones antiguas como la egipcia, la maya y la babilónica crearon símbolos y sistemas para representar cuentas y medidas. La diferencia entre estos sistemas de numeración se debe en gran parte a las necesidades y a la cultura de cada pueblo.

Recurso imprimible



Maya

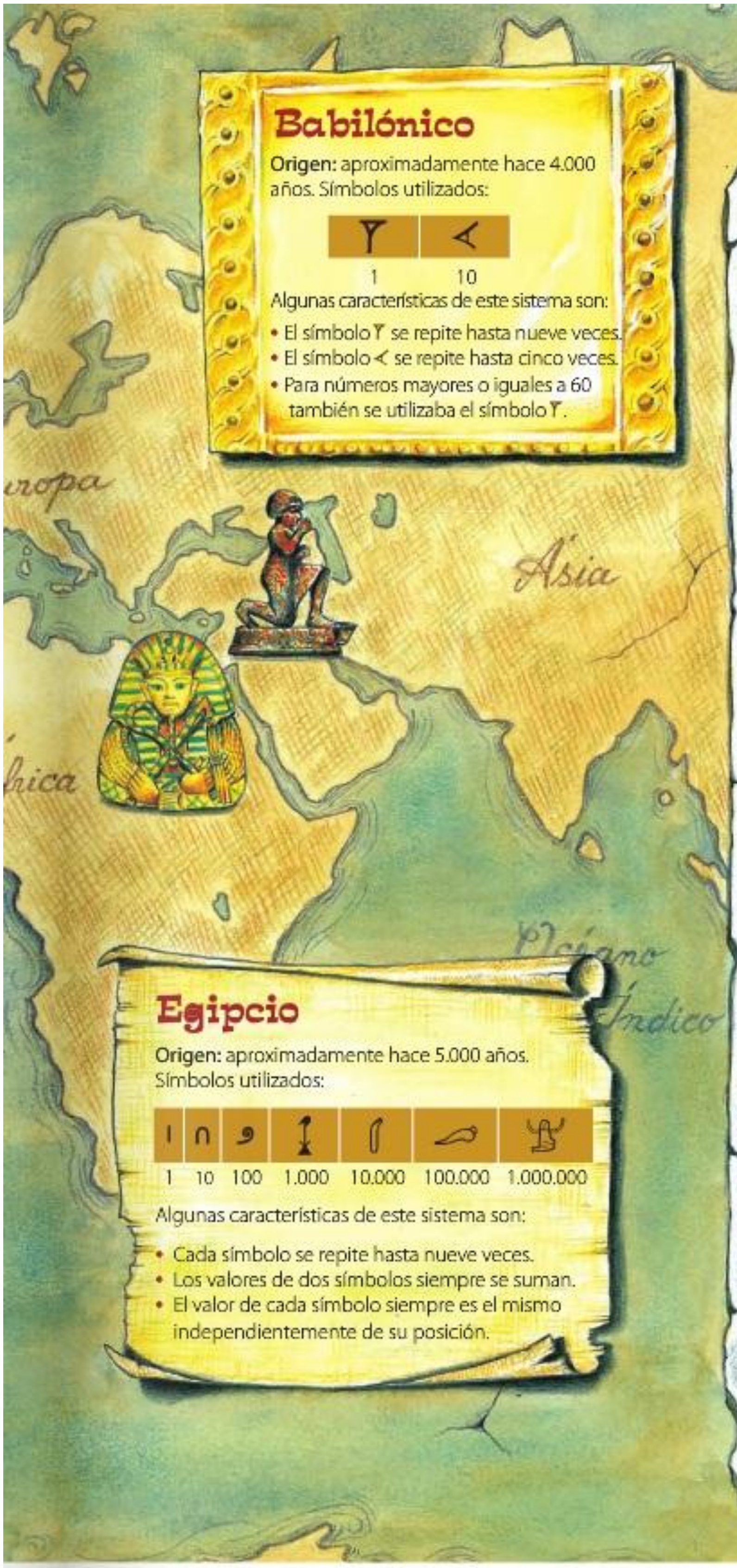
Origen: 1.500 años

Símbolos utilizados:

•	—	🐚
1	5	0 (ausencia de unidad)

Algunas características de este sistema son:

- El símbolo • se repite hasta cuatro veces.
- El símbolo — se repite hasta tres veces.



Babilónico

Origen: aproximadamente hace 4.000 años. Símbolos utilizados:

𒁹	𒌋
1	10

Algunas características de este sistema son:

- El símbolo 𒁹 se repite hasta nueve veces.
- El símbolo 𒌋 se repite hasta cinco veces.
- Para números mayores o iguales a 60 también se utilizaba el símbolo 𒁹.

Egipcio

Origen: aproximadamente hace 5.000 años.
Símbolos utilizados:

𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Algunas características de este sistema son:

- Cada símbolo se repite hasta nueve veces.
- Los valores de dos símbolos siempre se suman.
- El valor de cada símbolo siempre es el mismo independientemente de su posición.

Comparación de algunos números en los diferentes sistemas de numeración.

	Egipcio	Babilónico	Maya
1	I	𒁹	𝋡
2	II	𒁹𒁹	𝋢
3	III	𒁹𒁹𒁹	𝋣
4	IIII	𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋤
5	IIIII	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋥
6	III III	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	𝋦
7	IIII III	𒁹𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	𝋧
8	IIII IIII	𒁹𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋨
9	IIIII III∩	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋩
10	∩	𒌋	𝋪
11	∩∩	𒌋𒁹	𝋫
12	∩II	𒌋𒁹𒁹	𝋬
15	∩IIII	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋯
19	∩IIIII IIII	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋳
20	∩∩	𒌋𒌋	𝋡 1 × 20 𝋠 0
21	∩∩I	𒌋𒌋𒁹	𝋡 1 × 20 𝋡 1
22	∩∩II	𒌋𒌋𒁹𒁹	𝋡 1 × 20 𝋢 2
30	∩∩∩	𒌋𒌋𒌋	𝋡 1 × 20 𝋪 10
40	∩∩∩∩	𒌋𒌋𒌋𒌋	𝋢 2 × 20 𝋠 0
50	∩∩∩∩∩	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋	𝋢 2 × 20 𝋪 10
59	∩∩∩IIIII ∩∩ IIII	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	𝋢 2 × 20 𝋳 19
60	∩∩∩ ∩∩∩	𒁹	𝋣 3 × 20 𝋠 0
61	∩∩∩I ∩∩∩	𒁹 | | 𒁹 1 × 60 ↑ 1 espacio	𝋣 3 × 20 𝋡 1

Ampliación multimedia

2. Conjunto de los números naturales

Matemática*mente*

¿Por qué se incluye o se excluye el cero en los números naturales?

¿Por qué no se puede determinar el número natural más grande?

Los **números naturales** son aquellos que sirven para contar los elementos de un conjunto determinado. El conjunto de los **números naturales** se simboliza con la letra $\mathbb{N}$ y se determina por extensión de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$$

El primer número natural es el cero y como no se puede determinar el número natural más grande, se dice que el conjunto de los números naturales es infinito.

Cada número natural tiene un sucesor. El sucesor de un número natural se obtiene sumando 1 al número.

Todos los números naturales excepto el cero tienen un antecesor. El antecesor de un número natural se obtiene restando 1 al número.

Existen definiciones de los números naturales que incluyen al cero como elemento y otras que no lo reconocen como tal. En la actualidad ambas opciones son matemáticamente reconocidas como válidas.

2.1 Representación de los números naturales

Recuerda que…

La expresión general para escribir un número par es $2n$.

La expresión general para escribir un número impar es $2n + 1$.

Los números naturales se representan en la recta numérica de modo que a cada número le corresponda un punto de la recta.

Para representar los números naturales en la recta numérica, se realizan los siguientes pasos.

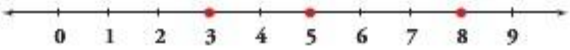
- Primero, se traza la recta numérica.
- Luego, se escoge el punto correspondiente al número 0 y, a partir de él, se ubican en orden los números, 1, 2, 3, 4,… a igual distancia uno del otro.

La representación de los números naturales en la recta numérica es:

EJEMPLOS

1. Ubicar los números 3, 5 y 8 en la recta numérica.

Para representar en la recta numérica los números 3, 5 y 8, se traza la recta numérica y se ubica el número 0. Luego, se ubican los números 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7, 8, 9, por último, se señalan los números indicados. Así:



2. Determinar si los números dados son pares o impares. Justificar la respuesta.

a. 36

36 es un número par, porque 36 se puede escribir de la forma $2n$. Así: $36 = 2 \times 18$.

b. 1.589

1.589 es un número impar, porque 1.589 se puede escribir de la forma $2n + 1$. Así:

$$1.589 = 2 \times 794 + 1.$$

2.2 Orden de los números naturales

Actividad

Recurso imprimible

Los números naturales aparte de contar los elementos de un conjunto, también sirven para **ordenar** los elementos de dicho conjunto. Por ejemplo, en una carrera de atletismo, no solamente es necesario conocer cuántos competidores llegan a la meta, sino también es importante saber el **orden** en que llegan. El orden resulta al comparar dos números naturales y determinar cuál es el número menor y cuál es el número mayor. En la realidad generalmente esto se hace con respecto a un parámetro común (tiempo empleado, distancia recorrida, logros obtenidos, etc.).

Cuando se comparan dos números naturales a y b, se cumple una y solo una de las siguientes tres condiciones:

- a es mayor que b. Esta relación se simboliza $a > b$.
- a es menor que b. Esta relación se simboliza $a < b$.
- a es igual que b. Esta relación se simboliza $a = b$.

Por ejemplo, al comparar los números 35 y 49 se puede afirmar que:

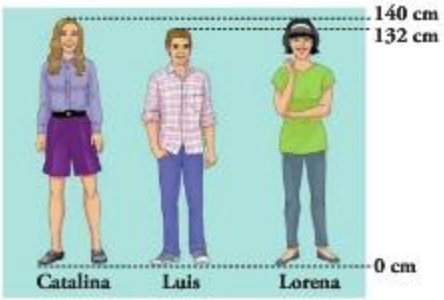
49 es mayor que 35 y se simboliza $49 > 35$. También, es posible decir que 35 es menor que 49 y se simboliza $35 < 49$.

En la recta numérica $a < b$ si el punto que representa a a se encuentra a la izquierda del punto que representa a b.

Así, $5 < 7$ porque 5 está a la izquierda de 7 en la recta numérica:

EJEMPLOS

1. **Comparar las estaturas de los jóvenes que aparecen en la imagen.**



Las estaturas de los jóvenes son:

Luis tiene una estatura de 132 cm, Catalina mide 140 cm y Lorena mide 140 cm.

Por tanto:

$132 < 140$ o $140 > 132$ $\qquad 140 = 140$

Luego, se puede afirmar que las estaturas de Catalina y Lorena son mayores que la de Luis.

2. **En una carrera de atletismo Juan gastó 5 minutos más que Felipe, para llegar a la meta. Sandra gastó tres minutos menos que Juan y Carlos gastó un minuto más que Juan.**

   Determinar el orden en que llegaron a la meta los cuatro atletas.

Primero, se debe organizar la información dada.

Como Juan gastó 5 minutos más que Felipe, entonces, Felipe llegó primero que Juan.

Como Sandra gastó 3 minutos menos que Juan quiere decir que llegó antes que él, pero Felipe sigue primero.

Como Carlos gastó un minuto más que Juan quiere decir que llegó después de él.

Luego, es posible determinar el orden en que llegaron a la meta.

Por tanto, Felipe fue el primero; la segunda fue Sandra, de tercero llegó Juan, de cuarto y último llegó Carlos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

66. ¿Cómo se representan los números naturales en la recta numérica?

67. ¿Cuándo se comparan tres números naturales qué posibilidades se tiene?

68. ¿Cuál es la importancia de establecer un orden en los números naturales?

69. ¿Cómo se comparan dos números naturales por medio de la recta numérica?

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

70. Los números naturales tienen primer y último elemento. ( )

71. Para todo número natural, existe un número natural menor que él. ( )

72. Todo número natural es mayor que su antecesor. ( )

73. Si el punto que representa al número natural n en la recta numérica se encuentra a la izquierda de m, entonces, se cumple que $m < n$. ( )

E Representa los siguientes conjuntos en la recta numérica.

74. {0, 2, 3, 8, 12}

76. {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}

75. {0, 4, 8, 12, 16, 20}

77. {1, 5, 8, 11, 14, 17, 20}

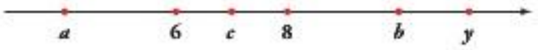
E Completa ubicando el signo mayor o menor según corresponda. Luego, escribe izquierda o derecha para cada caso.

78. 5 ____ 8 porque 5 está a la ________ de 8.

79. 12 ____ 11 porque 12 está a la ________ de 11.

80. 29 ____ 34 porque 29 está a la ________ de 34.

R Con base en el gráfico coloca $>$, $<$ o $=$ según corresponda.



81. a ____ 6

84. y ____ 4

82. b ____ c

85. c ____ y

83. $b + 2$ ____ 8

86. b ____ $1 + a$

E Completa las secuencias de números naturales.

87. ____ , 15, ____ , ____ , 18, ____

88. 25, ____ , 29, ____ , ____ , 35

89. 28, ____ , 20, ____ , 12, ____

90. 121, ____ , 131, ____ , ____ , 146

Observa la siguiente secuencia de letras.

A, G, L, O, R, T …

91. Asocia a cada letra el número natural que le corresponde según el orden alfabético.

92. Determina la secuencia.

93. Escribe la letra que continúa la secuencia.

R Determina.

94. Todos los números diferentes de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 5, 7 y 9 de tal forma que no se repita ninguna cifra.

95. El número mayor y el número menor que se puede formar con los dígitos 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3.

S Lee y responde.

96. María tiene 24 dulces más que su hermana, la cual tiene 45 dulces. ¿Cuántos dulces tiene María? Representa la situación en la recta numérica.

S Soluciona.

Luis es menos alto que Carlos y más que Pedro; sin embargo, Juan está entre Pedro y Luis.

97. ¿Quién es el más alto de todos?

98. Organiza en orden ascendente a los cuatro niños.

S **99.** Andrea, Rubén, Julio, Paula y Consuelo tienen distintas edades. Rubén es el mayor de todos. Paula es menor que Julio. Andrea es menor que Consuelo, pero mayor que Julio. ¿Quién es el menor de todos?

Escribe una definición para números pares y otra para números impares. Luego, responde.

100. ¿Cuántos números pares tienen tres cifras?

101. ¿Cuántos números impares hay de dos cifras?

102. ¿Son más los números naturales que los números pares?

2.3 Operaciones entre números naturales

Enlace web

En el conjunto de los números naturales se definen las siguientes operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

Adición de números naturales

> Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, se define la **suma o adición** como: $a + b = c$
> Donde a y b se denominan sumandos y c suma o total.

Por ejemplo, en la operación 213 + 17 = 230, los números 213 y 17 son los sumandos y 230 es la suma o total.

La adición en el conjunto de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

Propiedad		Ejemplo
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a + b \in \mathbb{N}$.	34 y $26 \in \mathbb{N}$. Luego, $34 + 26 = 60$; $60 \in \mathbb{N}$.
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a + b = b + a$.	15 y $28 \in \mathbb{N}$. $15 + 28 = 43$ y $28 + 15 = 43$. Por tanto, $15 + 28 = 28 + 15$.
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $a + (b + c) = (a + b) + c$.	$9, 28$ y $8 \in \mathbb{N}$. $(9 + 28) + 8 = 37 + 8 = 45$ $9 + (28 + 8) = 9 + 36 = 45$ Por tanto, $(9 + 28) + 8 = 9 + (28 + 8)$
Modulativa	Si $a \in \mathbb{N}$, entonces, $a + 0 = 0 + a = a$.	$78 \in \mathbb{N}$. Luego, $78 + 0 = 0 + 78 = 78$.

Matemática*mente*

Muchos años de este milenio pueden representarse como la suma de dos números consecutivos.

Por ejemplo, el año 2025 puede escribirse como: 1012 + 1013. ¿Qué años no se pueden escribir de esa manera?

EJEMPLOS

1. En una gran industria había 846 empleados.

Luego, se produjo una expansión de sus instalaciones y 328 empleados nuevos fueron contratados. ¿Cuántos empleados hay ahora en la industria?

Para resolver el problema se identifican los datos conocidos:

846: cantidad inicial de empleados.

328: cantidad de empleados nuevos contratados.

Luego, se plantea la operación y se resuelve.

$$846 + 328 = 1.174$$

Por tanto, la industria tiene ahora 1.174 empleados.

2. Realizar la siguiente adición 7.542.600 + 3.135.590.

Para resolver la adición, se descomponen los sumandos y se aplica la propiedad asociativa.

7.542.600 + 3.135.590 =

7.000.000 + 3.000.000 + 542.000 + 135.000 + 600 + 590

Luego, se realizan las adiciones parciales, así:

7.542.600 + 3.135.590

= 10.000.000 + 677.000 + 1.190 = 10.678.190

Por tanto, 7.542.600 + 3.135.590 = 10.678.190.

Sustracción de números naturales

La **sustracción** o **resta** es la operación inversa a la adición, por lo cual conocidos la suma y uno de los sumandos, la sustracción permite hallar el otro sumando.

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $a \geq b$, se define la resta o sustracción de a y b como

$$a - b = c \text{ siempre que } a = b + c$$

a se llama minuendo, b sustraendo y c diferencia.

Recuerda que...

El símbolo $\geq$ se lee mayor o igual que. Para poder hacer una resta en los números naturales el minuendo debe ser "$\geq$" mayor o igual que el sustraendo.

Recurso imprimible

Por ejemplo, $527 - 318 = 209$, ya que: $209 + 318 = 527$. En este caso, 527 es el minuendo, 318 el sustraendo y 209 la diferencia.

Suma y resta de números naturales

En algunas expresiones aparecen, de forma combinada, la suma y la resta. Ambas operaciones tienen la misma prioridad y se realizan según van apareciendo de izquierda a derecha.

Por ejemplo, $145 - 89 + 44 - 75$.

Primero, se resta $145 - 89$, luego se suma 44 y por último, se resta 75, así:

$145 - 89 + 44 - 75 = 56 + 44 - 75 = 100 - 75 = 25$.

EJEMPLOS

1. Si $a = 324$, $b = 408$ y $c = 207$, realizar todas las restas posibles con los números naturales dados.

Como es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo, entonces, con los números dados es posible realizar solamente tres restas diferentes.

$b - a = 408 - 324 = 84$

$b - c = 408 - 207 = 201$

$a - c = 324 - 207 = 117$

2. En una panadería hay 112 tortas. 64 son de maíz, 37 son de zanahoria y el resto son de chocolate. ¿Cuántas tortas de chocolate hay?

Se identifican los datos conocidos:

112: cantidad total de tortas.

64: cantidad de tortas de maíz.

37: cantidad de tortas de zanahoria.

Luego, la cantidad de tortas de chocolate se obtiene al restar de la cantidad total de tortas, la cantidad de tortas de maíz y de zanahoria. Es decir:

$$\begin{aligned} 112 - (64 + 37) &= 112 - 101 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Por tanto, hay 11 tortas de chocolate.

3. Sara y John van a un parque de diversiones y deciden tomar una bebida diferente y comer una hamburguesa cada uno para almorzar.

Productos	Precio
Hamburguesa	7.550
Pizza personal	6.500
Gaseosa	1.500
Limonada	1.800
Jugo en caja	1.150

Si pagan con \$20.000 y consumieron las bebidas más económicas según la lista de precios, ¿cuánto dinero les devolvieron?

Cada persona tomó una bebida diferente y de las más económicas, entonces, Sara y John compraron un jugo en caja y una gaseosa.

Además, cada uno consumió una hamburguesa.

Luego, la cantidad de dinero que gastaron Sara y John fue:

$$1.150 + 1.500 + 7.550 + 7.550 = 17.750.$$

Para conocer la cantidad de dinero que les devolvieron se resta lo que gastaron de los \$20.000 que pagaron.

Así: $20.000 - 17.750 = 2.250$

Por tanto, la cantidad de dinero que les devolvieron a Sara y John fue \$2.250.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • M Modelo • E Ejercito • S Soluciono problemas

Reconstruye cada una de las operaciones, ubicando las cifras desaparecidas en cada espacio.

103. 43☐ + 2☐5 + ☐87 = 1.068

104. 8.☐22 − 2.5☐7 = ☐.555

105. 5.6☐8 + 4.09☐ + ☐.856 = 13.☐49

106. ☐1.8☐6 − 3.☐52 = 8.27☐

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

107. La resta es una operación que cumple con la propiedad modulativa.

108. Cuando se conocen el minuendo y la diferencia se puede determinar el sustraendo.

E **Escribe en cada espacio el número que hace falta.**

109. 33 + ___ = 25 + 33

110. (5 + 36) + 24 = 5 + (___ + 24)

111. ___ + 0 = 0 + ___ = 15

112. (3 + 18) + 4 = 3 + (4 + ___)

E **Relaciona cada adición con su respectivo resultado.**

113. 18.516 + 14.341	**a.** 787.082
114. 8.267 + 73.656	**b.** 101.975.898
115. 747.915 + 39.167	**c.** 81.923
116. 26.820.934 + 3.256.268	**d.** 32.857
117. 34.408.573 + 67.567.325	**e.** 30.077.202

Completa los siguientes cuadrados mágicos. Ten en cuenta que en un cuadrado mágico, el total de sumar los números horizontal, vertical y diagonalmente es el mismo, y que todos los números son distintos.

118.

168	318	288
378		
	198	

119.

768		
	480	
	864	192

M **Si se sabe que cada letra representa un dígito y que letras iguales corresponden a dígitos iguales y letras diferentes corresponden a dígitos diferentes, reconstruye las operaciones planteadas.**

120.
SOL
+ SOL
LANA

121.
LEON
+ NOEL
OTRA

122.
ORA
+ ORA
DATE

Inventa una pregunta para cada situación. Luego, respóndela.

123. En una ciudad hay registrados 136.726 extranjeros. La ciudad cuenta con 1.223.538 habitantes.

124. Claudia tiene 15 años, su primo Carlos tiene 8 años más que ella, Andrea tiene el doble de años que Claudia y su hermano tiene 10 años menos que Andrea.

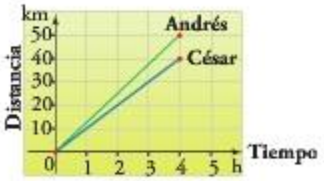
125. Carlos vendió su carro en $8.500.000 y ganó $3.750.000.

S **Soluciona.**

126. Una empresa dedicada a la producción de plantas exportó 563.256 orquídeas, 185.562 helechos y 368.850 rosas. ¿Cuántas plantas exportó en total?

127. Roberto nace en 1928 y se casa a los 30 años. Dos años después nace su hija y él muere cuando ella tiene 30 años. ¿En qué año muere Roberto?

128. El diagrama muestra la distancia en kilómetros que viajaron los ciclistas Andrés y César a partir del mismo punto. ¿Cuántos kilómetros de ventaja le lleva Andrés a César cuatro horas después de haber salido?



S **Un escalador, después de subir 455 metros de una montaña, subió 325 metros más. Sin embargo, se resbaló y bajó 18 metros. Luego, subió 406 metros, ¿qué altura alcanza?**

129. Plantea la operación para resolver el problema.

130. Determina la altura final del escalador.

Multiplicación de números naturales

Recurso imprimible

Dados a, b y $c \in \mathbb{N}$, $a \times b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ veces}} = c$

Donde a y b son los factores y c es el producto.

Por ejemplo, en la multiplicación $8 \times 7 = 56$, los números 8 y 7 son los factores y 56 el producto.

La multiplicación de números naturales cumple las siguientes propiedades:

Actividad

Propiedad		Ejemplo
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times b \in \mathbb{N}$.	12 y $4 \in \mathbb{N}$. Luego, $12 \times 4 = 48$ y $48 \in \mathbb{N}$.
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times b = b \times a$.	11 y $8 \in \mathbb{N}$. $11 \times 8 = 88$ y $8 \times 11 = 88$. Por tanto, $11 \times 8 = 8 \times 11$.
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.	9, 8 y $5 \in \mathbb{N}$. $(9 \times 8) \times 5 = 72 \times 5 = 360$. $9 \times (8 \times 5) = 9 \times 40 = 360$. Por tanto, $(9 \times 8) \times 5 = 9 \times (8 \times 5)$.
Modulativa	Si $a \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times 1 = 1 \times a$.	$15 \in \mathbb{N}$. Luego, $15 \times 1 = 1 \times 15 = 15$.
Distributiva	Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.	5, 13 y $7 \in \mathbb{N}$. $5 \times (13 + 7) = 5 \times 20 = 100$. $(5 \times 13) + (5 \times 7) = 65 + 35 = 100$. Por tanto, $5 \times (13 + 7) = (5 \times 13) + (5 \times 7)$.
Producto con factor cero	Si $a \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times 0 = 0 \times a = 0$.	$7 \in \mathbb{N}$. Luego, $7 \times 0 = 0 \times 7 = 0$.

Multiplicaciones abreviadas

Existen multiplicaciones que se pueden resolver con mayor facilidad siguiendo unas reglas específicas. Algunas de estas multiplicaciones son:

- **Multiplicación de un número por una potencia de 10**. Para multiplicar cualquier número natural por una potencia de 10, se escribe el mismo número y se acompaña de tantos ceros como tenga la potencia de 10.

  Por ejemplo, $34 \times 100 = 3.400$

- **Multiplicación de un número por 11, 12, ..., 19**. Para multiplicar cualquier número natural por un número de dos cifras que presente tan solo una decena, se expresa la multiplicación en forma horizontal y se multiplica el primer número por la cifra de las unidades del segundo número. Luego, se escribe este producto de derecha a izquierda a partir del signo × y se realiza la suma correspondiente. Por ejemplo,

215×13	Se expresa la multiplicación en forma horizontal.
$+\ \ 645$	Se multiplica 215 por 3 y se escribe el resultado debajo de 15×.
2.795	Se efectúa la suma correspondiente.

División de números naturales

Actividad Recurso imprimible Ampliación multimedia

La **división** es la operación que permite repartir una cantidad en partes iguales; sin embargo, esto no es posible hacerlo de manera exacta en todos los casos en los números naturales, por ello, la división en este conjunto se puede clasificar en exacta cuando el residuo es cero e inexacta cuando el residuo es diferente de cero.

Matemática*mente*

Se encienden 9 velas al mismo tiempo. Si cada vela encendida dura 3 horas, ¿para cuántas horas tendremos iluminación con el total de velas encendidas?

División exacta

Una **división es exacta** cuando existe un número natural que multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo. Así:

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, se define la división exacta como:

$$\begin{array}{r|l} a & \underline{\; b \;} \\ 0 & c \end{array} \quad \text{siempre que } a = b \times c$$

a se denomina dividendo, b divisor y c cociente. En este caso, el residuo de la división es 0.

División inexacta

Una **división es inexacta** cuando no existe un número natural que multiplicado por el divisor dé como resultado el dividendo. Así:

Dados a, b, c y $d \in \mathbb{N}$, se define la división inexacta como

$$\begin{array}{r|l} a & \underline{\; b \;} \\ d & c \end{array} \quad \text{siempre que } a = b \times c + d, d < b \text{ y } b \neq 0$$

a se denomina dividendo, b divisor, c cociente y d residuo. En este caso, el residuo de la división es diferente de 0.

EJEMPLOS

1. Realizar cada división. Luego, determinar si las divisiones son exactas o inexactas.

a. 108 ÷ 12.

$$\begin{array}{r|l} 108 & \underline{\; 12 \;} \\ 0 & 9 \end{array}$$

Luego, la división es exacta porque el residuo es cero.

b. 87 ÷ 11.

$$\begin{array}{r|l} 87 & \underline{\; 11 \;} \\ 10 & 7 \end{array}$$

Luego, es una división inexacta, porque el residuo es 10.

2. En una fábrica de galletas se hicieron 4.656 galletas que fueron repartidas por igual en 24 cajas. ¿Cuántas galletas se colocaron en cada caja?

Los datos conocidos del problema son:

4.656: cantidad de galletas fabricadas.

24: número de cajas para repartir por igual.

Como se debe repartir 4.656 galletas en 24 cajas, entonces se debe realizar una división, para encontrar la cantidad de galletas que hay en cada caja.

Así: 4.656 ÷ 24 = 194.

Por tanto, la cantidad de galletas que se colocaron en cada caja es 194.

3. Por la fibra óptica se transportan llamadas telefónicas, mediante ondas de diferente frecuencia. Por cada fibra pueden viajar hasta 32 ondas de distinta frecuencia. Cada frecuencia permite llevar 120.000 llamadas. ¿Cuántas llamadas transporta un cable submarino de 64 fibras ópticas?

Para conocer el número de llamadas que transporta un cable con 64 fibras ópticas, se realiza lo siguiente:

Primero, se calcula el número de llamadas por cada fibra óptica. Así: 120.000 × 32 = 3.840.000

Luego, se determina el número de llamadas en 64 fibras ópticas. 3.840.000 × 64 = 245.760.000

Por tanto, la cantidad de llamadas que transporta 64 fibras es 245.760.000.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · M Modelo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Escribe el valor de cada expresión teniendo en cuenta las condiciones dadas.

131. $a \times b \times (c \times d)$

si $a \times c = 81$
$b = 6$
$d = 1$

132. $a \times (b \times c) \times (d \times e)$

si $a \times d = 15$
$b \times c = 8$
$e = 0$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta con un ejemplo.

133. El módulo de la división es el 1. ( )

134. La propiedad distributiva es la expresión $a + (b \times c) = a \times b + a \times c$. ( )

135. El resultado de dividir a cero entre un número natural es siempre cero. ( )

E **136. Completa la siguiente tabla multiplicando en forma abreviada.**

a	b	c	$a \times b$	$b \times c$	$a \times c \times 10$
24	11	35			
55	10	120			
29	15	70			
15	783	96			
25	14	1.000			

E **Determina el cociente e indica si la división es exacta o no.**

137. 3.456 ÷ 6

138. 3.455 ÷ 15

139. 9.356 ÷ 23

140. 8.563 ÷ 17

R **Encuentra en cada división el menor número que hay que sumar al dividendo para que el cociente aumente en una unidad y sea una división exacta.**

141. 357 ÷ 25

142. 2.405 ÷ 19

143. 78.966 ÷ 47

144. 140.536 ÷ 85

M **Completa la secuencia.**

145. 192, 96, ______ , 24, 12, 6, ______

146. 2.500, 500, ______ , 20, ______

147. 3.600, ______ , 400

R **Halla el factor desconocido en cada caso.**

148. $\square \times 8 = 104$

149. $12 \times \square = 132$

Observa cada una de las siguientes secuencias. Luego, responde.

12.345.679 × 9 = 111.111.111
12.345.679 × 18 = 222.222.222
12.345.679 × 27 = 333.333.333

150. ¿Qué patrón se sigue?

151. ¿Por qué número se tendrá que multiplicar 12.345.679 para obtener 888.888.888?

S **Lee y responde.**

152. Una caja trae diez docenas de marcadores y cada uno vale $1.245. ¿Cuánto vale la caja completa?

153. El libro de matemáticas tiene 446 páginas. Si mi hermanito le arranca seis hojas, ¿cuántas hojas le quedan al libro?

154. Si subo una escalera de dos en dos doy nueve pasos más que subiendo de tres en tres. ¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

155. La distancia que hay entre 2 ciudades es de 726 km. ¿Cuánto se debe pagar por el transporte de una mercancía de una ciudad a otra si se sabe que cobran 50 mil pesos por cada 6 km?

156. Si una empresa de reciclaje paga $370 por un kilo de papel de archivo, ¿cuántos kilos de papel se deben vender para obtener $99.900?

157. Se repartió cierto número de manzanas entre 25 personas y después de dar a cada una 8 manzanas sobraron 7. ¿Cuántas manzanas había?

158. Un leñador cobra $4.000 por cortar un tronco en tres partes iguales. ¿Cuánto cobrará por cortarlo en nueve partes iguales?

S **Resuelve.**

En el supermercado están promocionando la nueva presentación de un jugo, por lo cual ofrecen 8 jugos por $13.400.

159. ¿Cuál es el precio de cada jugo?

160. Si el precio original de los ochos jugos es de $16.800, ¿cuál fue el ahorro por cada jugo?

S **161. Una ballena azul adulta puede pesar lo que pesan hasta 26 elefantes africanos adultos. Estos pesan aproximadamente 5.000 kg cada uno. Calcula cuántos kilogramos pesa una ballena azul.**

Potenciación en los números naturales

Actividades Recurso imprimible

La **potenciación** es una operación que permite escribir, en forma abreviada, productos cuyos factores son todos iguales. Así,

Dados a, b y $n \in \mathbb{N}$, se define la potenciación como

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ veces}} = b$$

Y se lee "a elevado a la n es igual a b" o "b es la n-ésima potencia de a".

En la expresión $a^n = b$, a recibe el nombre de base y es el factor que se repite; n recibe el nombre de exponente y es el número de veces que se repite la base; y b recibe el nombre de potencia y es el resultado de multiplicar la base tantas veces como lo indique el exponente.

Por ejemplo, $5^3 = 125$, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Algunas potencias reciben nombres especiales. Así, si un número está elevado al exponente 2, se dice que está "elevado al cuadrado"; y si está elevado al exponente 3, se dice que está "elevado al cubo".

Un número natural es cuadrado perfecto cuando es el resultado de elevar otro número natural al cuadrado.

Por ejemplo, 121 es cuadrado perfecto porque $11^2 = 121$.

Un número natural es cubo perfecto cuando es el resultado de elevar otro número natural al cubo.

Por ejemplo, 343 es un cubo perfecto porque $7^3 = 343$.

EJEMPLOS

1. Completar la siguiente tabla.

Potencia indicada	Producto	Base	Exponente	Potencia	Lectura
5^2					
					3 al cubo es 27
	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$				
		10	4		

Para completar la tabla se tiene en cuenta la definición de la potenciación en los números naturales. Así:

Potencia indicada	Producto	Base	Exponente	Potencia	Lectura
5^2	5×5	5	2	25	5 al cuadrado es 25
3^3	$3 \times 3 \times 3$	3	3	27	3 al cubo es 27
2^5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	2	5	32	2 a la cinco es 32
10^4	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	10	4	10.000	10 a la cuatro es 10.000

2. Encontrar el término desconocido en la expresión $3^{\square} = 81$.

Se halla las primeras potencias de 3. Así: $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ y $3^4 = 81$.

Como $3^4 = 81$, entonces, el término desconocido es 4.

3. Si en un conjunto residencial hay 5 bloques de apartamentos, en cada bloque hay 5 edificios y cada edificio tiene 5 pisos, en los cuales hay 5 apartamentos por piso, ¿cuántos apartamentos hay en el conjunto residencial?

En este caso, cada cantidad se quintuplica con relación a la anterior. Luego, la cantidad total de apartamentos es una potencia de base 5.

Así: $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

Por tanto, la cantidad de apartamentos que hay en el conjunto residencial es 625.

Historia de las matemáticas

Potencias

Los babilónicos utilizaban la potenciación como auxiliar de la multiplicación y los griegos sentían especial atracción por los cuadrados y los cubos.

Diofanto en el siglo III a. C. escribía los factores de las potencias uno seguido del otro. Así, para escribir b^2 escribía *bb* y b^3 como *bbb*.

Fue Renato Descartes (1596-1650) quien introdujo la notación b, b^2, b^3.

Propiedades de la potenciación en $\mathbb{N}$

Ampliación multimedia

La potenciación en el conjunto de los números naturales cumple con las siguientes propiedades:

- **Producto de potencias de igual base.** Para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. Es decir, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

  Por ejemplo, $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$.
- **Cociente de potencias de igual base.** Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes. Es decir, $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, con $m > n$.

  Por ejemplo, $7^9 \div 7^4 = \frac{7^9}{7^4} = 7^5$.
- **Potencia de una potencia.** Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes. Es decir, $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

  Por ejemplo, $(8^3)^6 = 8^{3 \times 6} = 8^{18}$.
- **Potencia de un producto.** La potencia de un producto es el producto de las potencias de cada uno de sus factores. Es decir, $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

  Por ejemplo, $(4 \times 3)^2 = 4^2 \times 3^2$.
- **Potencia de un cociente.** La potencia de un cociente es el cociente de las potencias de cada uno de sus términos. Es decir, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

  Por ejemplo, $\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4}$.

El cero y el uno en la potenciación

Cuando la base o el exponente de una potencia son los números 0 o 1, se determinan las siguientes propiedades:

- Todo número natural, diferente de cero, elevado al exponente cero, da como resultado uno. Es decir, $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. Por ejemplo, $47^0 = 1$.
- Cero elevado a cualquier número natural, diferente de cero, da como resultado cero. Es decir, $0^n = 0$. Por ejemplo, $0^{19} = 0$.
- Todo número natural elevado al exponente uno, da como resultado el mismo número. Es decir, $a^1 = a$. Por ejemplo, $458^1 = 458$.
- Uno elevado a cualquier número natural, da como resultado uno. Es decir, $1^n = 1$. Por ejemplo, $1^{23} = 1$.

Matemática*mente*

¿Qué resultado tiene la expresión 0^0?

EJEMPLOS

1. Aplicar las propiedades de la potenciación para hallar el resultado de la siguiente expresión $\frac{(2 \times 3)^4}{2^2 \times 3^3}$.

$\frac{(2 \times 3)^4}{2^2 \times 3^3}$ Expresión dada.

$= \frac{2^4 \times 3^4}{2^2 \times 3^3}$ Se aplica potencia de un producto.

$= 2^{4-2} \times 3^{4-3}$ Se aplica cociente de potencias de igual base.

$= 2^2 \times 3^1$

$= 4 \times 3$

$= 12$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $\frac{(2 \times 3)^4}{2^2 \times 3^3} = 12$.

2. Determinar el valor de las siguientes potencias de diez, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 y 10^6.

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$

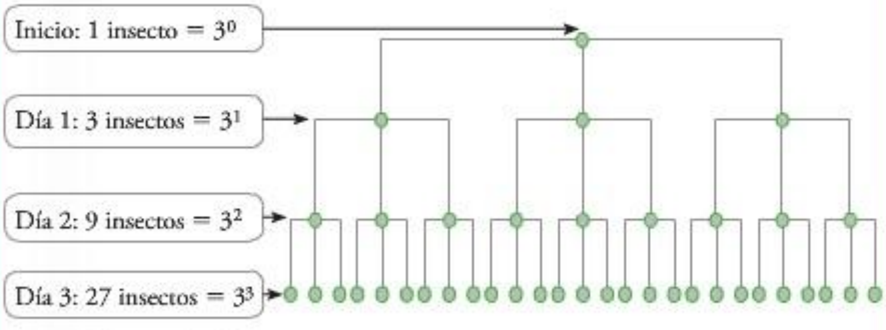
$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000$

Así, el resultado de una potencia de 10 es un 1 seguido de tantos ceros como indique su exponente.

3. Cierto tipo de insecto pone tres huevos y luego muere; de cada huevo sale otro insecto. Al día siguiente cada nuevo insecto pone otros tres huevos y después muere. Así durante tres días. ¿Cuántos insectos nacieron desde que nació el primero hasta el final del tercer día?

Para conocer la cantidad de insectos que nacieron, se realiza el siguiente esquema:



Entonces, la cantidad de insectos es:

$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

Por tanto, la cantidad de insectos que nacieron en los tres días fue 40.

Matemática*mente*

¿En qué cifra terminará el resultado de $(4^{20} + 9^{30})$?

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Escribe la potencia que corresponde en cada caso. Luego, calcula su valor.

162. Cinco elevado a la tres.

163. Tres elevado a la cinco.

164. Seis elevado a la tres.

165. Diez elevado a la seis.

166. Uno elevado a la treinta.

Responde y justifica tu respuesta.

167. ¿En qué casos se cumple que $a^b = b^a$?

168. ¿Un número elevado al cubo siempre es más grande que el mismo número al cuadrado?

169. Completa la siguiente tabla:

Base	Exponente	Potencia	Expresión como potencia
			$5^3 = 125$
6	4		
	3	64	
8	2		
56		1	
	1	94	
9	5		
			$11^2 = 121$
1	12		

Aplica las propiedades de la potenciación y simplifica las siguientes expresiones.

170. $4^2 \times 4^4 \times 4$

171. $5^7 \div 5^3$

172. $(2^3)^2$

173. $\dfrac{(21^2)^2}{21^3}$

174. $(7^2 \times 7)^0 \times 7^3$

175. $(2 \times 2^5 \times 2^0)^4$

176. $(4^2 \times 3^2)^3 \div (4 \times 4^2)$

177. $\dfrac{3^5 \times 4^8 \times (3^2)^4 \times 4}{(2^3)^2 \times 3^5 \times 4^2}$

Expresa como producto de potencias de números primos.

178. 25.000

179. 3.200

180. 128

181. 1.600

182. 2.700

183. 96

Encuentra el valor desconocido en cada expresión.

184. $4^3 = \square$

185. $3^{\square} = 9^2$

186. $\square^5 = 3.125$

187. $6^{\square} = 216$

188. $2^{\square} = 4^3$

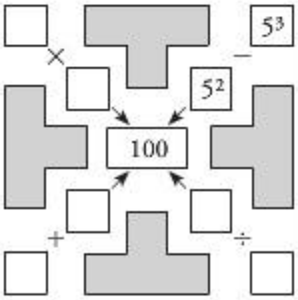
189. $\square^4 = 4.096$

Escribe el resultado de cada operación.

190. $2^2 - 1^2$

191. $4^2 - 3^2$

192. Escribe en cada cuadrado las potencias 30^2, 8^2, 1^5, 3^2, 10^2 y 6^2, de tal forma que de la operación indicada resulte el número del rectángulo.



Halla un número natural que cumpla la condición dada en cada caso:

193. Número que al elevarlo al cuadrado y restarle 1 da 63.

194. La suma del número y su cuadrado da 30.

195. Número que al elevarlo al cuadrado da un número palíndromo (se lee igual al derecho o al revés).

196. Número más pequeño que al elevarlo al cuadrado tiene unidades de mil.

Analiza si son válidas las siguientes igualdades y con base en los resultados plantea una conclusión general para cada caso.

197. $2^3 + 2^5 = 2^8$

198. $3^2 + 3^3 = 3^5$

199. $(2^3 + 2^5)^2 = 2^6 + 2^{10}$

200. $(3^2 + 3^3)^2 = 3^4 + 3^6$

Resuelve.

201. La velocidad de la luz es 300.000 kilómetros por segundo. Expresa este número como producto de un número por una potencia de 10.

202. Un grupo de 15 estudiantes decide organizar una actividad de integración. Para convocar la mayor cantidad de personas, cada alumno debe llamar a tres invitados y cada invitado debe llamar a otras tres personas distintas, ¿cuántos invitados tendrá la actividad?

Radicación en los números naturales

Actividad Recurso imprimible

La **radicación** es la operación inversa a la potenciación, en la que, conocidos el exponente y la potencia, se debe hallar la base. El signo de la radicación es $\sqrt{\ }$ y recibe el nombre de **signo radical**.

Si $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, entonces, $\sqrt[n]{b} = a$ si y sólo si $a^n = b$.

La expresión $\sqrt[n]{b} = a$ se lee raíz n-ésima de b igual a, donde n es el índice de la raíz, b es la cantidad subradical o radicando y a es la raíz n-ésima.

Por ejemplo, la expresión $8^3 = 512$ se puede escribir como $\sqrt[3]{512} = 8$, donde 3 es el índice de la raíz, 512 la cantidad subradical y 8 es la raíz cúbica.

Para extraer la raíz exacta de un número natural, se busca un número tal que elevado al índice de la raíz, dé como resultado la cantidad subradical o radicando.

Por ejemplo, $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 81$.

Las raíces cuyo índice es 2 se denominan raíces cuadradas. A diferencia de los demás casos, en este tipo de raíces no se escribe el índice.

Por ejemplo,

$\sqrt{400} = 20$ se lee, la raíz cuadrada de 400 es 20.

Las raíces cuyo índice es 3 se denominan raíces cúbicas. Por ejemplo,

$\sqrt[3]{216} = 6$ se lee, la raíz cúbica de 216 es 6.

Historia de las matemáticas

La raíz

La palabra raíz que proviene de la inicial de la palabra *radix*, indicaba la raíz cuadrada de un número.

Matemática*mente*

¿Cómo se les llama a los números que tienen raíz cuadrada exacta y los números que tienen raíz cúbica exacta?

EJEMPLOS

1. Un mueble en forma de cubo, como el que se muestra en la figura, tiene un volumen de 64 dm³. Determinar la altura del mueble.

Como el mueble tiene forma de cubo, entonces, su volumen está dado por la expresión $V = l^3$, donde V es el volumen y l es la arista del cubo.

Luego, al remplazar el valor del volumen se tiene que: $64 = l^3$.

Ahora, para hallar la altura del cubo, se extrae la raíz cúbica de 64, así:

$l = \sqrt[3]{64} = 4$

Por tanto, la altura del mueble es 4 dm.

2. Realizar $\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{625}$

$\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{625} = 2 + 5$ Se extrae la raíz cúbica y la raíz cuarta.

$= 7$ Se suma.

Por tanto, $\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{625} = 7$.

Propiedades de la radicación en los números naturales

La radicación, en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades:

- **Raíz n-ésima de un producto.** La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de cada uno de los factores. Es decir, $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.
  Por ejemplo, $\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$.
- **Raíz n-ésima de un cociente.** La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas de cada uno de los factores. Es decir, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
  Por ejemplo, $\sqrt[4]{\frac{4.096}{16}} = \frac{\sqrt[4]{4.096}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{8}{2} = 4$.

El cero y el uno en la radicación

Cuando la cantidad subradical de una raíz indicada está relacionada con los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

- La raíz n-ésima de 1, da como resultado 1. Así, $\sqrt[n]{1} = 1$, si $n \neq 0$.
- La raíz n-ésima de 0, da como resultado 0. Así $\sqrt[n]{0} = 0$, si $n \neq 0$.

EJEMPLOS

1. Aplicar las propiedades de la radicación para hallar el resultado de la expresión $\sqrt[3]{\frac{8 \times 216}{27}}$.

$\sqrt[3]{\frac{8 \times 216}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 216}}{\sqrt[3]{27}}$ Se aplica raíz n–ésima de un cociente.

$= \frac{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{27}}$ Se aplica raíz n–ésima de un producto.

$= \frac{2 \times 6}{3}$ Se extrae la raíz cúbica.

$= 4$ Se realizan las operaciones.

Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{8 \times 216}{27}} = 4$

2. Simplificar la expresión.

$\sqrt{18} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2}$ Se aplica la raíz de un producto.

$= \sqrt{36}$ Se multiplica.

$= 6$ Se extrae la raíz cuadrada.

Por tanto, $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = 6$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde y justifica con un ejemplo.

203. ¿Qué es la cantidad subradical?

204. ¿Cuál es la relación entre el índice de las raíces y los exponentes de la potenciación?

205. ¿Qué propiedad permite determinar la raíz cúbica del producto de tres números?

206. ¿Cómo se relacionan los elementos de la potenciación y la radicación?

Determina en cada caso, el índice, la cantidad subradical, la raíz, la expresión como potencia y la expresión como raíz a partir de los datos dados.

207. Índice: 2 y cantidad subradical: 144.

208. Cantidad subradical: 27 y raíz: 3.

209. Expresión como potencia: $8^2 = 64$.

210. Índice: 4 y raíz: 10.

211. Expresión como raíz: $\sqrt{324}$.

Subraya las raíces exactas y encierra las que no lo son. Justifica la respuesta.

212. $\sqrt{5}$

213. $\sqrt{25}$

214. $\sqrt{10.000}$

215. $\sqrt[3]{10.000}$

216. $\sqrt[3]{81}$

217. $\sqrt[3]{49}$

218. $\sqrt{0}$

219. $\sqrt[3]{9}$

220. $\sqrt[4]{32}$

Calcula las siguientes raíces.

221. $\sqrt{16}$

222. $\sqrt[3]{729}$

223. $\sqrt{144}$

224. $\sqrt[4]{16}$

225. $\sqrt[5]{1.024}$

226. $\sqrt[6]{15.625}$

Encuentra el valor más pequeño que puede tomar *m* para que se pueda calcular cada raíz en los números naturales. Explica tu respuesta.

227. $\sqrt{637 - m}$

228. $\sqrt[3]{510 + m}$

229. $\sqrt[4]{3.100 + m}$

230. $\sqrt{750 + m}$

231. $\sqrt[5]{67 - m}$

232. $\sqrt[4]{1.100 + m}$

Calcula las siguientes raíces aplicando las propiedades de la radicación.

233. $\sqrt{144 \times 25}$

234. $\sqrt[3]{343 \times 8}$

235. $\sqrt{64 \times 121 \times 3.600}$

236. $\sqrt[7]{64 \div 8^2}$

237. $\sqrt[3]{1.000 \div 125}$

238. $\sqrt[5]{0 \div 25}$

239. $\sqrt[4]{4^6 \times 9^2 \times 5^8}$

240. $\sqrt{(144 \div 3^2) \times 4^3}$

Escribe cada enunciado en forma matemática. Luego, determina si la expresión es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

241. La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas.

242. La raíz cuadrada de una suma corresponde a la suma de las raíces cuadradas.

243. La raíz cúbica de una resta es igual a la resta de las raíces cúbicas.

244. La raíz *n*-ésima de la potencia *n*-ésima de un número natural es igual al número.

Encuentra el valor de *x* para que la expresión sea correcta.

245. $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{3^x}}} = 3$

246. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{8^x}}} = 2$

Halla los números que faltan en cada igualdad.

247. $\sqrt{\square} = 30$

248. $\sqrt[3]{7 + \square} = 3$

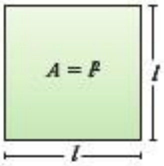
249. $\sqrt[\square]{128} = 2$

250. $\sqrt[4]{1.000 + \square} = 10$

Lee y responde.

251. Se estima que un cultivo de bacterias crece 10 veces cada hora. Si al cabo de 4 horas hay 160.000 bacterias, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

Observa y resuelve.



252. ¿Cuál es el lado de un cuadrado que tiene 625 cm² de área?

253. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de 121 m² de área?

Soluciona.

254. ¿Cuánto mide la arista de un cubo que tiene de volumen 216 cm³?

255. ¿Cuál es el área de la base de una caja en forma de cubo que tiene de volumen 1.331 cm³?

Historia de las matemáticas

John Napier

Matemático escocés creador de los logaritmos. En 1614 publicó un libro llamado *Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos*, en el cual plantea su teoría acerca de los logaritmos, pero sin dar a conocer los métodos por los cuales llegó a ellos.

Logaritmación en los números naturales

De la misma manera que la radicación, la **logaritmación** es una operación inversa a la potenciación. Esta operación permite hallar el exponente cuando se conocen la base y la potencia. Así:

Dados $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 1$, entonces, $\text{Log}_a b = n$ si y sólo si $a^n = b$.

La expresión $\text{Log}_a b = n$ se lee logaritmo en base a de b es igual a n.

Por ejemplo, $5^2 = 25$, se puede expresar como $\text{Log}_5 25 = 2$.

Los logaritmos cuya base es 10 se denominan logaritmos decimales. A diferencia de los demás logaritmos, en este tipo de logaritmos no se escribe la base. Por ejemplo, $\text{Log}_{10} 100 = \text{Log } 100 = 2$ y $\text{Log}_{10} 1.000 = \text{Log } 1.000 = 3$.

Propiedades de los logaritmos

La logaritmación en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades.

- **Logaritmo de un producto.** El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de cada uno de los factores. Es decir, $\text{Log}_n (a \times b) = \text{Log}_n a + \text{Log}_n b$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_3 (9 \times 27) = \text{Log}_3 9 + \text{Log}_3 27 = 2 + 3 = 5$.
- **Logaritmo de un cociente.** El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y el divisor. Es decir, $\text{Log}_n (a \div b) = \text{Log}_n a - \text{Log}_n b$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_3 (27 \div 9) = \text{Log}_3 27 - \text{Log}_3 9 = 3 - 2 = 1$.
- **Logaritmo de una potencia.** El logaritmo de una potencia es el producto del exponente por el logaritmo de la base. Es decir, $\text{Log}_n (a^b) = b \times \text{Log}_n a$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_2 4^5 = 5 \times \text{Log}_2 4 = 5 \times 2 = 10$.

EJEMPLOS

1. Calcular los siguientes logaritmos.

a. $\textbf{Log}_7 \textbf{ 49}$

Como $7^2 = 49$, entonces, $\text{Log}_7 49 = 2$.

b. Log 10.000

Como $10^4 = 10.000$, entonces, $\text{Log } 10.000 = 4$.

2. Encontrar el resultado de la siguiente expresión aplicando las propiedades de los logaritmos: $\mathbf{Log_2 (16 \times 8) + Log_2 4^3}$**.**

$\text{Log}_2 (16 \times 8) + \text{Log}_2 4^3$

$= \text{Log}_2 16 + \text{Log}_2 8 + 3 \times \text{Log}_2 4$ Se aplica logaritmo de un producto y logaritmo de una potencia.

Como $\text{Log}_2 16 = 4$, $\text{Log}_2 8 = 3$ y $\text{Log}_2 4 = 2$, se tiene:

$\text{Log}_2 (16 \times 8) + \text{Log}_2 4^3 = 4 + 3 + 3 \times 2$ Se remplaza el valor de cada logaritmo.

$= 7 + 6$ Se suma y se multiplica.

$= 13$ Se suma.

Por tanto, $\text{Log}_2 (16 \times 8) + \text{Log}_2 4^3 = 13$.

El cero y el uno en la logaritmación

Cuando los diferentes términos de un logaritmo son los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

- El logaritmo de 1 en cualquier base, es 0. Es decir, $\text{Log}_x 1 = 0$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_5 1 = 0$.
- El logaritmo en base x de x, es 1. Es decir, $\text{Log}_x x = 1$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_8 8 = 1$.
- El logaritmo de 0 en cualquier base, no está definido.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono

Expresa en forma de potencia o en forma de logaritmo según el caso.

256. $3^4 = 81$

257. $5^7 = 78.125$

258. $\text{Log}_4 1.024 = 5$

259. $21^3 = 9.261$

260. $\text{Log } 100.000 = 5$

261. $11^4 = 14.641$

E **Halla cada logaritmo. Justifica tu respuesta.**

262. $\text{Log}_2 8$

263. $\text{Log}_3 81$

264. $\text{Log}_7 343$

265. $\text{Log}_3 1$

266. $\text{Log } 1.000$

267. $\text{Log}_5 625$

268. $\text{Log}_9 729$

269. $\text{Log } 10^8$

E **270. Completa la tabla y determina el término desconocido en cada caso.**

Potenciación	Radicación	Logaritmación
$6^6 = z$	$\sqrt[6]{z} = 6$	$\text{Log}_6 z = 6$
		$\text{Log}_7 49 = m$
	$\sqrt[7]{128} = z$	
$x^3 = 125$		
$8^4 = 4.096$		
		$\text{Log}_3 y = 5$
	$\sqrt[6]{4.096} = z$	

R **Completa el número que hace falta:**

271. Log_3 ____ $= 5$

272. Log_6 ____ $= 5$

273. Log_ $1.296 = 2$

274. Log_ $49 = 2$

275. Log_ $512 = 3$

276. Log_ $25 = 2$

R **Aplica las propiedades de los logaritmos para calcular los resultados:**

277. $\text{Log}_3 (243 \times 243)$

278. $\text{Log}_5 \frac{125}{25}$

279. $\text{Log}_2 (32 \times 64)$

280. $\text{Log}_{25} 625^8$

281. $\text{Log}_4 (64 \times 1.024)$

282. $\text{Log}_6 \left(\frac{216}{36}\right)^5$

283. $\text{Log}_2 (64 \times 512)$

284. $\text{Log}_8 \left(\frac{512}{64} \times 4.096\right)^4$

Observa. Luego, responde.

285. ¿Cuántos puntos tiene la siguiente figura?

286. ¿Cuál figura tiene 15.625 puntos?

S **Resuelve.**

287. Un mensaje de Navidad fue enviado por correo electrónico por una compañía telefónica. Si cada 15 minutos se triplicaba la cantidad de personas que recibían el mensaje, y la última vez se enviaron 59.049 mensajes, ¿cuánto tiempo gastó la compañía en enviar esta cantidad de mensajes?

288. Observando la reproducción de una epidemia de un virus de la gripa, un científico verifica que cada hora el virus se divide en cuatro. Si se comienza con un virus, ¿cuántos virus habrá después de 8 horas?

2.4 Polinomios aritméticos

Actividad   Ampliación multimedia

Recuerda que…

La multiplicación se puede expresar de diferentes formas.

$3 \times 5 = 15$

$3 \cdot 5 = 15$

$3(5) = 15$

$(3)(5) = 15$

Un **polinomio aritmético** es una expresión que combina números naturales mediante diversas operaciones.

Cuando es necesario agrupar algunas de las operaciones se usan los signos de agrupación que se muestran a continuación:

Paréntesis ( )   Corchetes [ ]   Llaves { }

Por ejemplo, las siguientes expresiones son polinomios aritméticos.

$8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2 + 5$ y

$4 + [5 - 8 \div 4 + 3^2 + (17 - 2 \times 5 + 1) - 6] - 2$

Para poder resolver expresiones aritméticas es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

- Para resolver una expresión sin signos de agrupación, primero se resuelven las potencias, las raíces y los logaritmos; luego, las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha; finalmente, las adiciones y las sustracciones de izquierda a derecha.
- Para resolver una expresión con signos de agrupación, estos deben ser eliminados de adentro hacia fuera. Para esto, se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos siguiendo el orden sugerido en el punto anterior.

Matemática*mente*

Coloca los signos +, −, × y ÷ entre cada dígito, para que se cumpla la igualdad.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

EJEMPLOS

Resolver cada polinomio aritmético.

a. $\mathbf{8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2}$

$8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2$

$= 8 + 5 - 6 \div 2 + 81 - 7 \times 2$ Se resuelve la potencia.

$= 8 + 5 - 3 + 81 - 14$ Se realizan la división y la multiplicación.

$= 13 - 3 + 81 - 14$ Se suma.

$= 10 + 81 - 14$ Se resta.

$= 91 - 14$ Se suma.

$= 77$ Se resta.

Por tanto, $8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2 = 77$.

b. $\mathbf{\left\{\sqrt{49} \times 4 + \left[(\text{Log}_3 27 + 5 \times 2^3) - 3(\sqrt[3]{64} + 8)\right]\right\} \div 5}$

$\left\{\sqrt{49} \times 4 + \left[(\text{Log}_3 27 + 5 \times 2^3) - 3(\sqrt[3]{64} + 8)\right]\right\} \div 5$

$= \{7 \times 4 + [(3 + 5 \times 8) - 3(4 + 8)]\} \div 5$ Se resuelven raíces, el logaritmo y la potencia.

$= \{28 + [(3 + 40) - 3(4 + 8)]\} \div 5$ Se multiplica.

$= \{28 + [43 - 3 \times 12]\} \div 5$ Se eliminan paréntesis.

$= \{28 + [43 - 36]\} \div 5$ Se multiplica.

$= \{28 + 7\} \div 5$ Se eliminan corchetes.

$= 35 \div 5$ Se eliminan llaves.

$= 7$ Se divide.

Por tanto, $\left\{\sqrt{49} \times 4 + \left[(\text{Log}_3 27 + 5 \times 2^3) - 3(\sqrt[3]{64} + 8)\right]\right\} \div 5 = 7$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

Explica.

289. La solución de un polinomio aritmético que no tiene signos de agrupación.

290. La solución de un polinomio aritmético que tiene signos de agrupación.

291. El orden de prioridad de las operaciones en los números naturales.

Responde.

292. ¿Por qué son necesarias las reglas para la solución de un polinomio aritmético?

293. ¿Cuántos símbolos de agrupación se usan en matemáticas y qué nombre reciben?

E **Resuelve los siguientes polinomios aritméticos aplicando el orden de las operaciones.**

294. $25 + [4 + (3 + 9)]$

295. $(17 + 10 \times 3) - (5 \times 2 - 9)$

296. $(10 - 3 + 4 \times 5) - (9 \times 2 + 8)$

297. $(13 + 5 - 9) - (4 + 11 - 6 \times 2)$

298. $30 - (4 - 2) \times 10 + 5 \times 8$

299. $18 + 2 \times (5 + 7) + 3(10 - 7)$

300. $3[4 + 2 \times (15 - 11)] - 1$

301. $[(6 + 9) \div 5 + (11 - 4 \times 2) - 6]$

302. $[(10 + 12 \div 2) - (10 \div 5 - 10 \div 10)] + 6$

R **Ubica los paréntesis de tal manera que al realizar la operación se obtenga el resultado propuesto.**

303. $2 + 3 \times 5 = 25$

304. $5 \times 7 + 4 - 2 = 53$

305. $33 + 3 \div 4 - 2 = 7$

306. $2 \times 6 - 5 + 5 = 7$

307. $6 + 7 + 5 - 5 \times 0 = 0$

308. $3^3 - 5^2 \times 5 - 5^0 + 17 \div 3 = 14$

309. $6 + 7 + 5 - 5 \times 0 = 18$

R **Remplaza los símbolos por números naturales que hagan cierta la expresión:**

310. © + 5 × 2 − ⇧ = 14

311. 16 − ♥ ÷ 5 = 13

312. ♠ × 9 − 6 = 30

313. ♣ ÷ ✤ + 9 = 18

Resuelve.

314. Un alumno eleva al cuadrado un número de dos cifras y obtiene como resultado un número de cuatro cifras que comienza con 3 y termina en 5. Calcula la suma de las cifras del número de dos cifras.

315. Escribe el siguiente proceso y confirma el resultado. Piensa en un número mayor que cero, multiplícalo por 3 y añade 1. Luego, multiplica el resultado de nuevo por 3 y añade al producto el número que pensaste. El resultado final termina en 3. Elimina 3 y el número que resulta será el que pensabas.

S **Mariana realiza un inventario de los libros que hay en la biblioteca en su casa, y descubre que tiene 11 libros de matemáticas, 15 de religión, 15 de historia, 6 de filosofía.**

Además, conserva 3 novelas de misterio, 3 de aventura y 3 de fantasía. De todos ellos, 10 se dañaron por la humedad.

316. Completa para calcular la cantidad de libros en buen estado que hay en la casa de Mariana.

Libros de matemáticas	Libros de religión e historia	Libros de filosofía	Novelas	Libros dañados
↓	↓	↓	↓	↓

$$11 + 15 \times 2 + 6 + 3^2 - 10$$
$$= 11 + \_\_\_\_ + 6 + \_\_\_\_ - 10$$
$$= \_\_\_\_ + \_\_\_\_ - 10$$
$$= \_\_\_\_ - 10$$
$$= \_\_\_\_$$

En la casa de Mariana hay ____ libros en buen estado.

317. Si Andrés tiene el doble de la cantidad de libros de Mariana, ¿cuántos libros tiene Andrés?

S **Plantea el problema como una operación combinada. Luego, resuelve.**

318. Un agricultor cosechó 5.760 kilos de naranjas y 1.500 kilos de mandarinas. Las naranjas se empacan en cajas de 12 kilos y las mandarinas se empacan en cajas de 15 kilos. ¿Cuántas cajas necesita el agricultor para empacar las naranjas y las mandarinas?

3. Ecuaciones e inecuaciones

Las ecuaciones están relacionadas con una igualdad y las inecuaciones con una desigualdad.

Una **igualdad** es una expresión que compara dos cantidades mediante el signo igual. Expresiones como $6 + 4 = 10$ y $4^2 = 16$ reciben el nombre de **igualdades numéricas**.

Una **desigualdad** es toda relación que se establece entre números naturales mediante la comparación **menor que** ($<$), **menor o igual que** ($\leq$), **mayor que** ($>$) o **mayor o igual que** ($\geq$).

Una desigualdad se cumple si la relación establecida en ella es verdadera.

Por ejemplo, $2 \times 8 > 15$ y $5^3 < 3^5$ son desigualdades.

3.1 Ecuaciones

Actividad Ampliación multimedia Recurso imprimible

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay presentes una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas**, las cuales se representan con letras minúsculas.

Por ejemplo, las igualdades $3m + 5 = 8$; $x - 3 = 4$; $\frac{21}{z + 2} = 3$ son ecuaciones donde las variables están representadas por m, x y z.

En una ecuación se pueden identificar dos partes las cuales se encuentran separadas por el signo igual; a la parte de la izquierda del signo $=$ se le llama **primer miembro** y a la que está a la derecha del $=$ se le llama **segundo miembro**.

Así, los elementos de una ecuación son:

$$\overbrace{8\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Incógnita}}}{x} + 6}^{\substack{\text{Primer miembro}\\ \uparrow}} = \underbrace{52}_{\substack{\downarrow\\ \text{Segundo}\\ \text{miembro}}}$$

Cada ecuación se cumple para determinados valores de la variable o incógnita presente en ella. Así, la ecuación $2x = 24$ únicamente se verifica para $x = 12$. Este valor se denomina la **solución** de la ecuación.

Solución de una ecuación

Resolver una ecuación significa hallar el valor o los valores de la incógnita que cumplen con la igualdad dada. Para comprobar dicha solución, basta con remplazar el valor obtenido en la ecuación y verificar si se cumple la igualdad.

El proceso para encontrar la solución de una ecuación se fundamenta en la aplicación de la propiedad uniforme de las igualdades.

Si en los dos miembros de una igualdad se suma, se resta, se multiplica o se divide un mismo número, la igualdad se conserva. Así, si $a = b$ y $c \in \mathbb{N}$, entonces,

$$a + c = b + c \qquad a \times c = b \times c$$

$$a - c = b - c \qquad a \div c = b \div c \text{ para } c \neq 0.$$

Ecuaciones de la forma $x + a = b$ o $x - a = b$

Este tipo de ecuaciones se resuelven sumando o restando la misma cantidad en los dos miembros de la ecuación para obtener de esta manera otra ecuación equivalente, por ejemplo:

$x + 5 = 8$ Ecuación dada.

$x + 5 - 5 = 8 - 5$ Se resta 5 en ambos miembros de la ecuación.

$x + 0 = 3$ Se resuelven las operaciones en cada lado de la ecuación.

$x = 3$ Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene la solución.

Para comprobar que la solución de una ecuación es la correcta, se remplaza el valor de la incógnita en la ecuación dada y se verifica la igualdad.

En el ejemplo anterior se tiene que: $3 + 5 = 8$. Por tanto, $x = 3$ sí es la solución de la ecuación.

Recuerda que…

La expresión $7x$ representa un producto, así $7x = 7 \cdot x$, a 7 se le denomina coeficiente.

Ecuaciones de la forma $ax = b$ o $\frac{x}{a} = b$

Esta clase de ecuaciones se solucionan multiplicando o dividiendo los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero, y se obtiene así otra ecuación equivalente a la primera, por ejemplo:

$7x = 105$ Ecuación dada.

$\frac{7x}{7} = \frac{105}{7}$ Se divide ambos miembros entre el coeficiente de x que es 7.

$1 \cdot x = 15$ Se resuelven las operaciones en cada miembro de la ecuación.

$x = 15$ Se aplica la propiedad modulativa de la multiplicación y se obtiene la solución.

Luego, se comprueba que $x = 15$ es la solución de la ecuación, para ello se remplaza la x por 15 en la ecuación dada así:

$7x = 105$ Ecuación dada.

$7 \cdot 15 = 105$ Se remplaza x por 15.

$105 = 105$ Se verifica la igualdad.

Por tanto, $x = 15$ sí es solución de la ecuación.

EJEMPLO

Plantear una ecuación, para calcular la masa de cada caja, sabiendo que la masa de cada lata es 20 gramos y la balanza se encuentra en equilibrio.

Como la masa de cada lata es 20 gramos, entonces, la masa de 6 latas es 120 gramos.

Ahora, si c es la masa de cada caja y como hay 15 cajas, entonces, se tiene que:

$15c = 120$ Se plantea la ecuación.

$\frac{15c}{15} = \frac{120}{15}$ Se divide entre 15.

$c = 8$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la masa de cada caja es 8 gramos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

319. ¿Qué es una igualdad numérica?

320. Qué es una desigualdad?

321. ¿Qué es una ecuación?

322. ¿Cuáles tipos de ecuaciones se analizaron?

323. ¿Qué significa la solución de una ecuación?

Explica con un ejemplo:

324. Cómo se aplican las propiedades uniformes de las igualdades en la solución de ecuaciones.

325. El proceso para solucionar ecuaciones de la forma $x - a = b$.

326. Cómo se verifica la solución de una ecuación.

Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

327. $58q = 348$	**a.** 4
328. $m - 7 = 3$	**b.** 120
329. $12 + n = 16$	**c.** 6
330. $9t = 81$	**d.** 10
331. $r - 50 = 70$	**e.** 9
332. $l \div 7 = 9$	**f.** 63

Resuelve las siguientes ecuaciones.

333. $x + 5 = 16$

334. $6m = 90$

335. $3n = 342$

336. $\frac{z}{2} = 48$

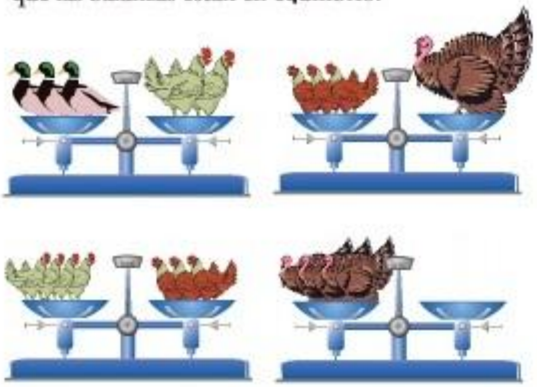
337. $32 = x + 8$

338. $y - 17 = 30$

339. $13m = 702$

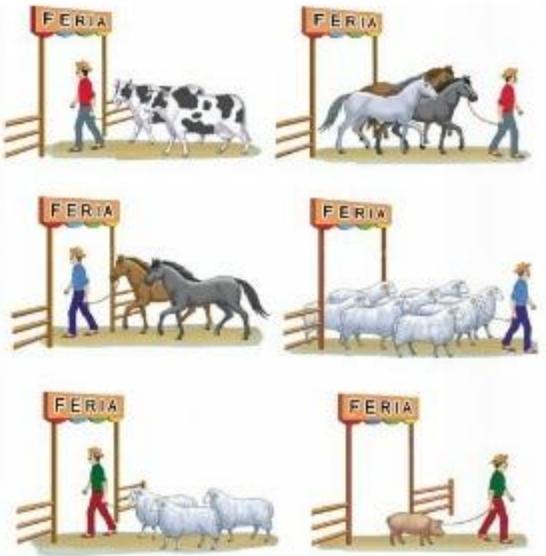
340. $\frac{a}{12} = 9$

Observa las figuras y resuelve teniendo en cuenta que las balanzas están en equilibrio.



341. ¿Cuántos patos deben ir en el platillo vacío para que la última balanza esté en equilibrio?

En un pueblo, donde aún se practica el trueque, se observa lo siguiente:



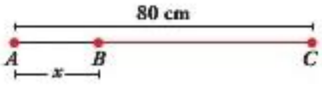
342. ¿Cuántos cerdos se necesitan para cambiarlos por 4 vacas?

Representa cada imagen mediante una ecuación. Luego, determina el valor de x para que las balanzas se encuentren en equilibrio.

343.

344.

345. **Escribe una expresión que represente la longitud del segmento trazado con rojo.**



Inventa un problema que se pueda representar con la ecuación dada. Luego, resuélvelo.

346. $3n = 120$

347. $x + 8 = 25$

348. $m - 10 = 45$

349. $\frac{x}{4} = 12$

3.2 Inecuaciones

Actividad

Una **inecuación** es una desigualdad en la que hay presentes una o varias incógnito desconocidas llamadas variables o incógnitas que se representan con letras minúsculas.

Por ejemplo, las desigualdades $x - 7 < 13$, $5m + 17 > 62$, son inecuaciones y las incógnitas están representadas por x y m, respectivamente.

En la desigualdad $x - 7 < 5$, x es un número natural que puede ser 7, 8, 9, 10 y 11.

Representación de desigualdades

Enlace web

- Los números menores que 8 se pueden determinar en un conjunto, así:
  $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 8\}$ o $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y en la recta numérica como:

- Los números mayores que 4 y menores que 9 se pueden determinar en un conjunto, así:
  $B = \{x/x \in \mathbb{N}, 4 < x < 9\}$ o $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y en la recta numérica como:

- Los números mayores que 3 se pueden representar como conjunto, así:
  $C = \{x/x \in \mathbb{N}, x > 3\}$ o $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ y en la recta numérica como:

Además de la representación de desigualdades, en la solución de una inecuación se aplican las propiedades de las desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

Cuando se tiene una desigualdad en los números naturales, se cumplen las siguientes propiedades:

- Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número natural, la desigualdad se mantiene:

  Si $a > b$, entonces, $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.

  Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.

  Por ejemplo:

  $13 > 8$, entonces, $13 + 2 > 8 + 2$, es decir, $15 > 10$.

  $5 < 12$, entonces, $5 - 3 < 12 - 3$, es decir, $2 < 10$.

- Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen entre un mismo número natural, la desigualdad se mantiene:

  Si $a > b$, entonces, $a \times c > b \times c$ y $a \div c > b \div c$

  Si $a < b$, entonces, $a \times c < b \times c$ y $a \div c < b \div c$

  Por ejemplo:

  $69 < 144$, entonces, $\frac{69}{3} < \frac{144}{3}$, es decir, $23 < 48$.

  $18 > 7$, entonces $18 \times 4 > 7 \times 4$ es decir, $72 > 28$.

Recuerda que...

Las desigualdades en los números naturales cumplen la **propiedad transitiva.** Es decir, si $a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$, donde $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, $5 < 8$ y $8 < 9$, entonces, $5 < 9$.

Solución de inecuaciones

Actividad

Resolver una inecuación significa hallar el valor o los valores de la incógnita que cumplen la desigualdad. En el proceso para encontrar la solución de una inecuación se aplican las propiedades de las desigualdades. La solución de una inecuación se puede expresar en forma de desigualdad, nombrando los elementos del conjunto solución o gráficamente en la recta numérica.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes inecuaciones.

a. $x + 8 < 11$

$x + 8 - 8 < 11 - 8$ Se resta 8 a ambos miembros de la inecuación.

$x + 0 < 3$ Se realizan las operaciones.

$x < 3$ Se suma.

La representación en la recta numérica de la solución de la desigualdad $x + 8 < 11$, es:

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad $x + 8 < 11$ es $\{0, 1, 2\}$.

b. $5x + 6 > 26$

$5x + 6 - 6 > 26 - 6$ Se resta 6 a ambos miembros de la inecuación.

$5x > 20$ Se realizan las operaciones.

$\frac{5x}{5} > \frac{20}{5}$ Se divide entre 5 cada miembro de la inecuación.

$x > 4$ Se resuelven las divisiones.

La representación en la recta numérica de la solución de la desigualdad $5x + 6 > 26$, es:

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad $5x + 6 > 26$ es $\{5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

2. Juan colecciona aviones de juguete. Si gana 3 aviones, su colección superará los 20 aviones; pero, si pierde 9 de la cantidad que tiene, le quedarán menos de 10, ¿cuántos aviones puede tener Juan en su colección?

Si x es la cantidad de aviones que tiene Juan en su colección, entonces, se tiene que:

$x + 3 > 20$ Se plantea la inecuación.

$x + 3 - 3 > 20 - 3$ Se resta 3 a ambos miembros de la inecuación.

$x > 17$ Se resuelven las operaciones.

$x - 9 < 10$ Se plantea la inecuación.

$x - 9 + 9 < 10 + 9$ Se suma 9 a ambos miembros de la inecuación.

$x < 19$ Se resuelven las operaciones.

Como, $x > 17$ y $x < 19$, entonces, $17 < x < 19$.

Luego, la solución de la inecuación $17 < x < 19$ es $x = 18$.

Por tanto, Juan tiene 18 aviones en su colección.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

350. ¿Qué es una inecuación?

351. ¿Cuál es la diferencia principal entre solucionar una ecuación y solucionar una desigualdad?

352. ¿Cuántos símbolos se utilizan para representar una desigualdad y cómo se representan?

353. ¿Cómo se representa la solución de una inecuación en la recta numérica?

Escribe la desigualdad que representa cada balanza.

354.

356.

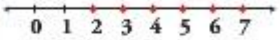
355.

357.

Escribe la inecuación relacionada con la representación de la recta en cada caso.

358.

359.



Resuelve las siguientes desigualdades expresando la solución en forma de conjunto y en la recta numérica.

360. $x + 9 > 16$

361. $x + 15 \leq 21$

362. $15m \geq 90$

363. $60m < 720$

364. $70 > y + 40$

365. $8x - 24 > 24$

366. $32 < x + 8$

367. $25 + 5y \geq 30$

368. $94 < 2m + 36$

369. $35m - 490 < 210$

Las medidas de los lados de un triángulo deben cumplir una importante propiedad que se conoce como desigualdad triangular, la cual consiste en que la suma de dos lados cualesquiera del triángulo siempre debe ser mayor que el otro lado.

370. Si a, b, c son las medidas de los lados de un triángulo expresa las tres desigualdades posibles que se derivan de la desigualdad triangular.

371. Proponga valores posibles de a, b y c para formar un triángulo.

372. Proponga valores posibles de a, b y c para que no exista un triángulo con tales medidas.

373. Completa la tabla.

Conjunto solución	Inecuación
{0, 1, 2, 3, 4}	
{…, 27, 28, 29, 30}	
{108, 109, 110, …}	
{34, 35, 36}	

Resuelve.

Los tres platillos están ordenados de mayor a menor peso.

374. ¿Dónde ubicarías este platillo?

Luis y Pedro juegan canicas los miércoles en la tarde. Si entre los dos tienen menos de 10 canicas, pero no tienen el mismo número de canicas:

375. Representa mediante una desigualdad las canicas que tienen Pedro y Luis juntos.

376. Determina cuatro valores posibles de las canicas que tiene Luis y que tiene Pedro de tal forma que cumplan la condición planteada.

377. ¿Cuántos valores son posibles para el número de canicas que tienen Pedro y Luis?

378. Un terreno de forma rectangular tiene 19 m de largo, ¿cuál debe ser el ancho para que el perímetro sea mayor a 98 m?

Sistema de numeración

En la tabla se registra el área en km² de los seis países más grandes del mundo.

País	Área (km²)
Canadá	9.330.970
Brasil	8.456.510
Rusia	17.075.400
China	9.326.410
Australia	7.617.930
EE. UU.	9.166.600

379. ¿Cuál es el país con mayor área?

380. ¿Cuál es el tercer país más grande del mundo?

381. ¿Qué países tienen mayor área que China?

382. Escribe en notación polinómica el área de los dos países más pequeños que se indican en la tabla.

383. ¿Cuáles son los países cuyas unidades de millón en sus áreas son iguales?

Expresa cada número en base 10.

384. 1001_2: ________

385. 100101_2: ________

386. 11101_2: ________

387. 111011_2: ________

Expresa cada número en base dos.

388. 45: ________

389. 63: ________

390. 144: ________

391. 128: ________

Conjunto de los números naturales

392. Utiliza como máximo una sola vez los dígitos 1, 2, 3, los signos de agrupación y las operaciones +, −, ×, ÷ para encontrar expresiones cuyo resultado sea cada uno de los dígitos.

393. Aplica la propiedad indicada y calcula.

Conmutativa
- $17 + 23 =$ ________
- $32 \times 5 =$ ________

Asociativa
- $(73 + 17) + 8 =$ ________
- $(12 \times 2) \times 4 =$ ________

Distributiva
- $7 \times (15 - 13) =$ ________
- $(27 + 3) \times 3 =$ ________

394. En una finca hay: 580 árboles de naranja, 205 árboles de toronja y 490 limoneros. En una temporada de lluvia se perdieron 107 de estos árboles frutales.

¿Cuántos árboles quedaron en la finca?

Relaciona cada operación con su respectivo resultado.

395. 812.562.351 − 712.548.958

396. 128.245.740 ÷ 12

397. $(7^2 \times 3^3)^2$

398. 25.658.639 + 75.279.863

399. $\sqrt{1.110.916}$

400. 25.768 × 419

a. 100.938.502

b. 1.054

c. 100.013.393

d. 1.750.329

e. 10.796.792

f. 10.687.145

401. Un pliego de cartulina tiene 80 cm de largo y 60 cm de ancho. Si se quiere dividir en ocho rectángulos iguales manteniendo el ancho, ¿cuáles son las dimensiones de los rectángulos resultantes?

402. **Encuentra cuatro dígitos diferentes *M*, *N*, *P*, *Q* de tal manera que los números de tres cifras *NMQ* y *MNP* sean cubos perfectos.**

Completa aplicando las propiedades de la potenciación.

403. $7^4 \times 7^{\square} \times 7 = 7^7$

404. $\square^5 \div \square^2 = 6^{\square}$

405. $(7^4)^{\square} = \square^{12}$

406. $\square^9 \div 8^{\square} = 8^3$

407. $(\square^{\square})^3 = 13^6$

408. $8^3 \times 8^5 \times 8^{\square} = 8^{12}$

Relaciona las dos expresiones que tengan el mismo resultado.

409. $\sqrt{9} + 3 \cdot 5 - 2 + 8 \cdot 2$

410. $3^3 \cdot 2 \cdot 5 + 5$

411. $3 + 2^2 \cdot 5 + 6$

412. $9 + 5(12 - 2) + 8$

a. $(3 + 7) - 2 \cdot 3 + 5^2$

b. $5 \cdot 6 - 36 \div 18 + 5 \cdot 0 + 2^2$

c. $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{\sqrt{81}} + 2^2 \cdot 3^2 + 5^0$

d. $5\{4 + 9(2 + 3) + 2(6 - 3)\}$

Están en el estreno de la mejor película del año y toda la familia Páez decide ir a verla. Si en la familia hay 3 adultos y cuatro niños y el valor de la boleta de entrada para adulto es de \$10.000 y la de niño es de \$6.000:

413. Determina el polinomio aritmético que representa el valor que se va a pagar por todas las boletas. Luego, resuélvelo.

414. Si la familia Páez paga con 3 billetes de \$5.000, dos billetes de \$10.000 y un billete de \$20.000, ¿cuánto dinero le devuelven?

Escribe <, > o = según corresponda.

415. $(7^0)^3 \square \operatorname{Log}_6 6$

416. $\sqrt[4]{27 \times 3} \square 9^2$

417. $\operatorname{Log}_5 (25 \times 5) \square \operatorname{Log}_5 (25 \div 5)$

418. $\operatorname{Log} 100 \square 10^3$

419. $\operatorname{Log}_8 512 - \operatorname{Log}_8 64 \square (8^0)^5$

420. $3^5 \square 5^3$

421. $\operatorname{Log}_2 16^2 \square \sqrt{16}$

422. $\sqrt[5]{7^5} \square (7^2)^7 \div 7^7$

Ecuaciones e inecuaciones

Resuelve las siguientes ecuaciones.

423. $x + 3 = 17$

425. $\frac{a}{2} = 13$

424. $7n = 126$

426. $3 + 4b = 27$

Resuelve las siguientes desigualdades expresando la solución en forma de conjunto y en la recta numérica.

427. $x - 5 > 21$

428. $3n + 5 < 32$

429. **César dice: "Mi edad dentro de 5 años será mayor que 20 años, y pensar que hace 6 años todavía no cumplía 11 años". ¿Qué edad tiene César?**

PROBLEMAS PARA REPASAR

Para construir un mueble como el que se muestra en la imagen, un carpintero necesita lo siguiente:

4 tablas largas de madera, 6 tablas cortas de madera, 12 ganchos pequeños, 2 ganchos grandes y 24 tornillos. Si en el almacén hay 26 tablas largas, 33 tablas cortas, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos,

¿Cuántos muebles completos se pueden construir?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántos muebles completos se pueden construir?

¿Cuáles son los datos del problema?

Materiales para la construcción de un mueble:

Tablas largas	Tablas cortas	Ganchos pequeños	Ganchos grandes	Tornillos
4	6	12	2	24

Materiales en el almacén:

Tablas largas	Tablas cortas	Ganchos pequeños	Ganchos grandes	Tornillos
26	33	200	20	510

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se divide los respectivos materiales para calcular la cantidad de muebles que se pueden construir, así:

Tablas largas	Tablas cortas	Ganchos pequeños	Ganchos grandes	Tornillos
$\begin{array}{r\|l} 26 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 200 & 12 \\ \cline{2-2} 8 & 16 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 20 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 510 & 24 \\ \cline{2-2} 6 & 21 \end{array}$

Luego, con 26 tablas largas se pueden construir 6 muebles. Con 33 tablas cortas se pueden construir 5 muebles. Con 200 ganchos pequeños se pueden construir 16 muebles. Con 20 ganchos grandes se pueden construir 10 muebles. Con 510 tornillos se pueden construir 21 muebles.

Se escoge la menor cantidad de muebles. Es decir, con los materiales del almacén es posible construir 5 muebles completos.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que los materiales del almacén permiten la construcción de 5 muebles. Luego, se tiene que con 26 tablas largas, 33 tablas cortas, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos es posible construir 5 muebles completos como el que se muestra en la imagen.

Resuelve las preguntas 430 y 431, de acuerdo con la siguiente información.

Si Miriam tuviera 12 años menos tendría 48 años. Si Juan tuviera 13 años más tendría 23 años.

430. ¿Cuántos años más joven es Juan que Miriam?

431. ¿Cuánto sumarán sus edades dentro de 5 años?

A bordo del minisubmarino Mir-1, los rusos plantaron su bandera en el fondo del mar Ártico, a 4.200 metros de profundidad. Mir-1 es capaz de descender 30 metros por minuto.

432. ¿Cuántos minutos le tomó al minisubmarino llegar al fondo del mar?

433. Un comerciante compró 18 cuadernos a $16.500 cada uno, vendió 6 de ellos por $11.860 en total. ¿A qué precio debe vender los cuadernos que le quedan para obtener una ganancia total de $4.500?

434. Una fábrica cuenta con nueve máquinas para etiquetado de botellas de agua mineral. Cada máquina etiqueta 720 botellas por hora y trabaja 8 horas al día por 5 días a la semana. En una semana, dos de esas máquinas estaban en reparación durante 3 días.

¿Cuántas botellas fueron etiquetadas esta semana?

Resuelve las preguntas 435 a 439, de acuerdo con la siguiente información.

En una sala de Internet que se llama Inter.com cobran $20 por el minuto de servicio. Mientras que en una sala vecina, que se llama Expresi@comunicacion, cobran por 1 hora $1.000, por media hora $500 y por un cuarto de hora o menos, $300.

435. ¿Cuánto hay que pagar por media hora de servicio en cada sala de Internet? ____________________

436. ¿Cuánto hay que pagar por 48 minutos?

437. Si Carlos tiene $750, ¿cuántos minutos puede alquilar de Internet en cada sala?

438. ¿A cuál sala es más económico ir por media hora de servicio? ____________________

439. Expresa como desigualdades la tabla de precios de Expresi@comunicacion para una hora.

440. En una caja como la de la figura, Pedro distribuye canicas, en la primera casilla, coloca una canica y, en cada una de las casillas siguientes, dos veces el número de canicas de la anterior.

¿Cuántas canicas coloca Pedro en la octava casilla?

Un jardín rectangular que tiene dimensiones 50 metros de largo por 10 metros de ancho está encerrado con una cerca de madera. Para hacer un jardín más grande, se usa la misma cerca para encerrar un terreno cuadrado.

441. ¿Cuál es la diferencia en metros cuadrados entre el área del jardín rectangular y el jardín cuadrado?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para identificar un producto por medio del código de barras.

Galería de imágenes

El **código de barras o de seguridad** es un sistema de identificación que tienen los productos del mercado, el cual ofrece información general del producto como país de fabricación, nombre de la empresa y consecutivo del producto fabricado. Este código identifica y caracteriza el producto sin necesidad de observar su contenido, además es global y por ello puede ser reconocido en cualquier parte del mundo.

El código de barras consiste en un conjunto de signos formado por una serie de líneas y números asociados a ellas, que se pone sobre los productos de consumo y que se utiliza para la gestión informática de las existencias.

Luego, un código de barras consiste en 13 dígitos que se relacionan con un esquema de líneas en la parte superior y contiene la siguiente información:

Los dos primeros dígitos son el código del país.

Los cinco dígitos que siguen, se refieren al número del producto.

Los cinco dígitos siguientes son la referencia del fabricante.

El último dígito es de control y se obtiene mediante un algoritmo matemático.

El dígito de control se obtiene así:

$7 + 2 + 6 + 0 + 4 + 3 = 22$	Se suman las posiciones pares del código.
$22 \times 3 = 66$	Se multiplica por 3 la suma anterior.
$7 + 0 + 5 + 0 + 2 + 9 = 23$	Se suman las posiciones impares.
$66 + 23 = 89$	Se suman el producto obtenido con la suma de las posiciones impares.
$90 - 89 = 1$	Se le resta a la decena inme diata superior el resultado anterior.

Por tanto, el dígito de control para este producto es 1.

1. **Comprueba que el código de barras es correcto para el producto que se muestra a continuación.**

2. **El código QR (*quick response barcode*) es un código de barras en dos dimensiones. Consulta cómo se creó este código y en qué tipo de productos se utiliza. Luego, explica lo que encuentres a tus compañeros.**

3. **Identifica las diferencias y similitudes que hay entre los códigos de barras de los siguientes productos y el código de barras del ejemplo citado.**

...Para registrar y comparar las operaciones aeroportuarias.

El nuevo aeropuerto 'El Dorado o Luis Carlos Galán' es un proyecto ambicioso que pretende renovar las operaciones aeroportuarias en la capital del país y generar una *megapolis* en la región.

El problema actual del aeropuerto es su poca capacidad para recibir la cantidad de pasajeros y de carga que llega actualmente al país. Por tal razón se hace necesario ampliar su estructura para mejorar las operaciones de comunicación y la actividad comercial con gran parte del país y el exterior.

A continuación se muestra la tabla con las estadísticas de operación del aeropuerto antes de estrenar su nueva cara.

	Nacional			Internacional		
Año	**Pasajeros**	**Ton. Carga y correo**	**Operaciones comerciales**	**Pasajeros**	**Ton. Carga y correo**	**Operaciones comerciales**
2007	8.443.967	119.958	149.310	4.384.055	474.207	50.114
2008	8.807.325	110.979	160.188	4.649.360	467.839	52.375
2009	10.278.244	91.811	170.785	4.621.010	421.031	53.024

De acuerdo con las proyecciones, los cambios a nivel nacional no son considerables respecto a cantidad de pasajeros y carga. Por ejemplo, el total de pasajeros que serán movilizados para el 2015 está estimado en 13 millones y, para el 2020, se espera un movimiento de 16 millones de pasajeros.

En cuanto a la carga en toneladas presupuestada para 2015 y 2020 se muestra en la siguiente tabla.

2015		2020	
Internacional	Nacional	Internacional	Nacional
510.000	120.000	600.000	130.000

Con el fin de incrementar la capacidad que tiene el aeropuerto actualmente, se pretende aumentar el área de las terminales aéreas de 54.000 m^2 a 134.000 m^2, la zona de abordaje, de 36.000 m^2 a 68.000 m^2 y el número de puentes de abordaje, de 21 a 33. Así, se busca prestar un mejor servicio y brindar mayor comodidad a los pasajeros, y aumentar la eficiencia del transporte de mercancía.

1. **En el 2007, ¿cuál fue la diferencia de operaciones comerciales a nivel nacional e internacional?**
2. **Respecto al 2008, ¿qué diferencia de pasajeros totales movilizados hay en relación con las proyecciones de 2015 y 2020?**
3. **Halla la diferencia de toneladas de carga movilizadas entre 2007 y 2009 tanto en trayectos nacionales como internacionales. ¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos?**
4. **Para el 2020, ¿cuántos pasajeros logrará movilizar aproximadamente cada puente de abordaje?**
5. **¿La diferencia de mercancía que se movilizó en el aeropuerto El Dorado durante el 2009 es considerable respecto a la proyección para el 2020?**
6. **¿Crees necesaria la renovación del aeropuerto El Dorado de acuerdo con los resultados obtenidos?**
7. **¿Qué solución propondrías para mejorar el transporte aéreo en Colombia?**

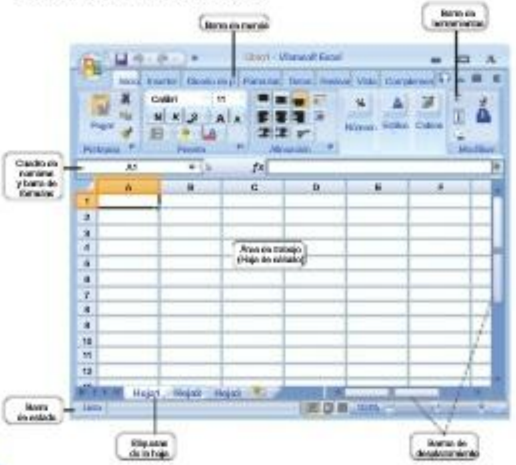
Trabaja con Excel

Objetivo: comprender el proceso para convertir un número decimal a binario y un número binario a decimal.

Descripción: realizar la conversión de un número decimal a binario y de un número binario a decimal.

Activa Microsoft Excel.

❶ Visualiza la plantilla de cálculos de Excel con sus diversas herramientas, como se muestra en la siguiente imagen.



❷ Escribe el número 230 para convertirlo a binario en el área de trabajo, como se muestra en la figura.

Número	230

❸ Para determinar el cociente de 230 entre 2, se utiliza la función =COCIENTE, como se muestra en la figura.

B2 =COCIENTE(B1;2)

Número	230
Cociente	115

❹ Para determinar el residuo de 230 entre 2, se utiliza la función =RESIDUO, como se muestra en la figura.

C1 =RESIDUO(B1;2)

Número	230	0	Residuo
Cociente	115		

❺ Pega la fórmula en el resto de las columnas, hasta que el número de la **columna B** sea menor o igual al número de la **columna C**. Luego, el número 230 en binario es 11100110, que resulta de escribirlo en orden ascendente, como se muestra en la figura.

Número	230	0	Residuo
Cociente	115	1	
	57	1	
	28	0	
	14	0	
	7	1	
	3	1	
	1	1	

❻ Para convertir un número binario a decimal, se aplica la función =BIN.A.DEC, como se muestra en la figura.

A1 =BIN.A.DEC(11100110)

230

Objetivo: conocer las herramientas de EXCEL, para calcular la potencia, la raíz cuadrada y el logaritmo de un número natural.

Descripción: calcular la potencia de un número, la raíz cuadrada y el logaritmo conocida la base.

Activa Microsoft Excel.

❶ Identifica el área de trabajo y el espacio para escribir las fórmulas, como se muestra en la figura.

❷ Para hallar la potencia 3^8, se utiliza la función =POTENCIA, como se muestra en la figura.

A1: =POTENCIA(3;8)

6561

❸ Para determinar la raíz cuadrada de 2.601, se usa la función =RAÍZ, como se muestra en la figura.

A1: =RAIZ(2601)

51

❹ Para determinar el Log_4 65.536, se aplica la función =LOG, como se muestra en la figura.

A1: =LOG(65536;4)

8

❺ Para hallar el valor del polinomio aritmético $3^2 + \sqrt{81} - 2^4 \div 8$, se combinan varias funciones con las operaciones básicas, como se muestra en la figura.

10 Resultado

❻ Para hallar el valor del polinomio aritmético Log_5 390.625 + $(2^5)^3$, se combinan varias funciones con las operaciones básicas, como se muestra en la figura.

Resultado

❼ Aplica EXCEL para hallar el valor de cada expresión.

a. 11^8

b. $\sqrt{784}$

c. Log_8 32.768

d. $8^2 \div 4 + \sqrt[3]{1.000} \div \sqrt{100}$

3 Teoría de números

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer y aplicar los conceptos de **múltiplo y divisor en los números naturales**.
- Identificar **números primos y compuestos**.
- Aplicar los conceptos de la teoría de números para expresar un número como el producto de **factores primos**.
- Calcular el **mcm** y el **mcd** de varios números y aplicarlos en la solución de problemas.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

- **6** Multimedia
- **1** Galería
- **8** Actividades
- **1** Audio
- **4** Imprimibles
- **2** Enlaces web

Lo que sabes...

Selecciona la opción correcta.

1. Los factores en el producto 2 × 3 × 13 = 78 son:

a. 2, 3 y 78 **c.** 2, 3 y 13

b. 3 ,13 y 78 **d.** 2, 13 y 78

2. El total de libros que hay en 12 repisas que contienen 15 libros cada una es:

a. 180 **b.** 120 **c.** 150 **d.** 170

3. El conjunto de todos los divisores exactos de 24 es:

a. 1, 3, 6, 12, 24 **c.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12

b. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 **d.** 2, 4, 6, 8, 12, 24

4. Determina la división que es exacta.

a. 8 ÷ 3 **c.** 236 ÷ 18

b. 96 ÷ 12 **d.** 181 ÷ 18

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para comprender cómo funciona la seguridad en informática.

Antiguamente se creía que los números primos no tenían una aplicación específica en contextos reales. Sin embargo, en la actualidad son parte fundamental de la criptografía y por eso se aplican para transmitir información digital de manera segura.

:: Lee más acerca de este tema en la página 114.

Cronología de teoría de números

Babilonia. Para realizar obras arquitectónicas y agrícolas, fue necesario construir un sistema numérico útil.

México. Los mayas evidenciaban el conocimiento del mcm en su calendario tzolkin donde repiten 20 nombres en ciclos de 13 y 20 elementos, hasta coincidir nuevamente en el día 260 que es el mcm de estos números.

Grecia. Eratóstenes desarrolla un procedimiento para encontrar los números primos denominado la criba.

Grecia. En el libro *Los elementos*, Euclides postuló que los números primos son infinitos e indicó el algoritmo para hallar el mcd de forma eficiente y exacta.

Italia. Se generó el problema más complicado para el algoritmo de Euclides cuando se deseaba hallar el mcd de dos números consecutivos de la serie de Fibonacci.

Inglaterra. Se construyeron máquinas sistemáticas para evaluar polinomios que utilizaban algoritmos como la criba y el de Euclides.

1. Múltiplos

Enlace web

Una de las grandes preocupaciones de los matemáticos ha sido el estudio de las propiedades que existen en los números naturales. Hoy en día el conocimiento de las propiedades de los naturales contribuye a la solución de problemas cotidianos y se aplica en la programación de computadores, entre otros usos.

1.1 Múltiplos de un número

Actividad

Los **múltiplos** de un número *a* son todos aquellos números que resultan de multiplicar *a* por todos los números naturales, incluyendo el cero.

El conjunto de los múltiplos de un número *a* se simboliza M_a.

Por ejemplo, para hallar los múltiplos de 4 se realizan las multiplicaciones $4 \times 0, 4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, 4 \times 4, 4 \times 5, 4 \times 6, \ldots$

Este conjunto se nota M_4 y se puede determinar así:

Por extensión $M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots.\}$

Por comprensión $M_4 = \{x/x$ es un múltiplo de $4\}$.

1.2 Propiedades de los múltiplos

Los múltiplos de un número cumplen las siguientes propiedades:

- Todo número es múltiplo de sí mismo.
- Cero es múltiplo de todo número.
- El conjunto de múltiplos de un número es infinito.

EJEMPLOS

1. Lina tiene una regla no graduada que mide 7 cm, ¿qué longitudes exactas puede medir con esta regla?

Para determinar las longitudes que se pueden medir con esta regla, se deben calcular los múltiplos de 7 a excepción del cero.

$7 \times 1 = 7$ $7 \times 2 = 14$ $7 \times 3 = 21$

$7 \times 4 = 28$ $7 \times 5 = 35$ $7 \times 6 = 42$

$7 \times 7 = 49$ $7 \times 8 = 56$ $7 \times 9 = 63$

Luego, los múltiplos de 7, a excepción de cero, son:

$M_7 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, \ldots\}$

Luego, las longitudes que se pueden medir con esta regla son 7 cm, 14 cm, 28 cm, 35 cm, 42 cm, 49 cm, 56 cm, 63 cm,…

2. El folleto de un almacén de ropa tiene más de 7 páginas y menos de 22 páginas.

Además, el número de páginas del folleto es múltiplo de 3 y múltiplo de 5. ¿Cuántas páginas tiene el folleto?

Primero, se hallan los múltiplos de cada número.

Los múltiplos de 3 mayores que 7 y menores que 22 son 9, 12, 15 y 18.

Los múltiplos de 5 mayores que 7 y menores que 22 son 10, 15 y 20.

Luego, se busca el número que cumpla las dos condiciones.

En este caso el número que cumple las dos condiciones es 15.

Por tanto, el folleto tiene 15 páginas.

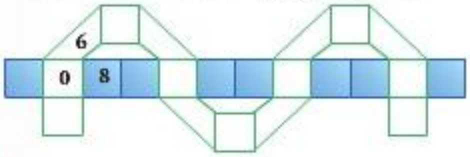
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono · **S** Soluciono problemas

Responde las preguntas. Justifica tus respuestas.

1. ¿Todo múltiplo de un número par es par?
2. ¿Todo múltiplo de un número impar es impar?
3. ¿Cuál es el múltiplo más pequeño que tiene un número natural?
4. ¿El conjunto de múltiplos de un número se puede ordenar?
5. ¿Los múltiplos de un número k se obtienen al multiplicar k por los números naturales?

E **Escribe los primeros múltiplos de 6 en la tira verde y los de 8 en la tira azul. Luego, responde.**



6. ¿Qué característica tienen los números que se ubican donde se cruzan las tiras?
7. ¿Cuál es el número más pequeño distinto de 0 que se ubica donde se cruzan las tiras?

E **Halla los diez primeros elementos de los siguientes conjuntos.**

8. M_2
9. M_3
10. M_5
11. M_6
12. M_8
13. M_{10}

R **Escribe V, si la expresión es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu elección en cada caso.**

14. 0 es múltiplo de 100. ( )
15. 500 es múltiplo de 500. ( )
16. 20 es múltiplo de 2 y de 5. ( )
17. 15 no es múltiplo de 5 y de 10. ( )

R **Otra forma de definir el múltiplo de un número es esta.**

El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces. De acuerdo con esta definición completa las siguientes expresiones de manera que sean verdaderas.

18. 48 es múltiplo de 16, porque lo contiene ______ veces.
19. 240 es múltiplo de 20, porque lo contiene ______ veces.

R 20. **Determina de qué número son múltiplos los números del conjunto M_a.**

$$M_a = \{\ldots, 36, 45, 54, 63, 72, 81, \ldots\}.$$

Responde las preguntas y justifica tus respuestas.

21. ¿En dónde hay más múltiplos de 2, entre 11 y 21 o entre 10 y 20?
22. ¿En dónde hay menos múltiplos de 3, entre 3 y 15 o entre 9 y 19?

Halla el número o los números que cumplan con cada grupo de condiciones.

23. Par menor que 20. Múltiplo de 2 y múltiplo de 5.
24. Impar mayor que 15 y menor que 30. Múltiplo de 3 y múltiplo de 6.
25. Par mayor que 18 y menor que 36. Múltiplo de 4 y múltiplo de 16.
26. Múltiplo de 2, 5 y 10 menor que 50.
27. El múltiplo más pequeño de 3, 5 y 10 diferente de 0.

S **Resuelve.**

En un torneo de fútbol se asignan puntajes a los equipos de la siguiente forma.

5 por partido ganado, 3 por partido empatado y 2 por partido perdido. El puntaje de sexto está entre 40 y 50. Además, es múltiplo de 3 y 5.

28. Determina el puntaje de sexto.
29. En un consultorio a cada paciente se le entrega una ficha que contiene un múltiplo de 3. Gabriela es la paciente 19 en la fila. Determina el número que contiene la ficha de Gabriela.
30. Un cajero automático utiliza billetes cuya denominación es \$10.000, \$20.000 y \$50.000. ¿Cuántos billetes y de qué denominación entregará a una persona que hace un retiro de \$600.000 y que además recibe la menor cantidad de billetes?

2. Divisores

En el estudio de la teoría de números es importante conocer el concepto de divisor, sus propiedades y algunos criterios de divisibilidad. Los cuales se utilizan frecuentemente en la descomposición de factores primos.

2.1 Divisores de un número

Los divisores de un número *a* son todos aquellos números que dividen exactamente dicho número. El conjunto de divisores de un número *a* se simboliza D_a.

Matemáticamente

¿Sabes alguna manera para determinar los divisores de un número?

Por ejemplo, el conjunto de los divisores de 8 se puede determinar por extensión como $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ y por comprensión como $D_8 = \{x/x \text{ es múltiplo de } 8\}$.

2.2 Propiedades de los divisores de un número

Los divisores de un número cumplen las siguientes propiedades:

- Todo número es divisor de sí mismo.
- Uno es divisor de todo número.
- El conjunto de divisores de un número es finito.

EJEMPLOS

1. Determinar todos los divisores de 6.

Primero, se realiza la división de 6 entre los números naturales menores o iguales que 6.

$6 \div 1 = 6$, residuo 0

$6 \div 2 = 3$, residuo 0

$6 \div 3 = 2$, residuo 0

$6 \div 4 = 1$, residuo 2

$6 \div 5 = 1$, residuo 1

$6 \div 6 = 1$, residuo 0

Luego, se eligen los números de los que se obtienen divisiones exacta, en este caso: 1, 2, 3, 6.

Finalmente, se obtiene que el conjunto de los divisores de 6 es $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

2. Resolver la siguiente situación.

16 jóvenes van de campamento a una laguna; ellos quieren formar grupos con el mismo número de personas sin que sobre ninguno. ¿Cuántas personas pueden estar en cada grupo?

Primero, se divide 16 entre los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16.

Luego, se eligen los números cuyas divisiones resultaron exactas. En este caso: $D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

Finalmente, se concluye que los jóvenes del campamento pueden hacer grupos de 1, 2, 4, 8 o 16.

3. Probar que se cumplen las propiedades de los divisores, con el conjunto de divisores de 9.

- 9 es divisor de 9 porque la división es exacta. Se cumple la propiedad que indica que todo número es divisor de sí mismo.
- 1 es divisor de 9 porque la división es exacta. Se cumple la propiedad que indica que 1 es divisor de todo número.
- Los divisores de 9 son el conjunto de $D_9 = \{1, 3, 9\}$, formado únicamente por tres elementos. Se cumple la propiedad que dice que el conjunto de divisores de un número es finito.

4. El conjunto de divisores propios de un número es aquel que incluye a los divisores del número sin el número. Por ejemplo, los divisores propios de 8 son 1, 2, 4. Un número perfecto es aquel que es igual a la suma de todos sus divisores propios. Por ejemplo, 6 es perfecto ya que $6 = 1 + 2 + 3$.

Determinar si 36 es un número perfecto.

Se suman los divisores propios de 36 y se observa si el resultado es igual a 36.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55$$

Entonces, como el resultado no es igual que el número se determina que 36 no es un número perfecto.

2.3 Criterios de divisibilidad

Actividades

Recurso imprimible

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que permiten determinar si un número es divisible entre otro, sin necesidad de ejecutar la división.

En la siguiente tabla se presentan los criterios de divisibilidad de uso más frecuente:

Divisibilidad entre	Criterio
Dos	Si la última cifra es par.
Tres	Si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.
Cuatro	Si sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de cuatro.
Cinco	Si la última cifra es cero o cinco.
Seis	Si es divisible entre dos y entre tres.
Nueve	Si la suma de sus cifras es múltiplo de nueve.
Diez	Si la última cifra termina en 0.

La historia de las matemáticas

El matemático francés Blaise Pascal en el siglo XVII propuso las reglas para determinar la divisibilidad entre cualquier número.

Recuerda que…

0 es un número par.

EJEMPLOS

1. Determinar si 480 es divisible entre 2, 3, 4, 5 y 6.

- 480 es divisible entre 2 porque es cifra par.
- 480 es divisible entre 3 porque $4 + 8 + 0 = 12$ y 12 es múltiplo de 3.
- 480 es divisible entre 4 porque sus dos últimas cifras forman el número 80 y 80 es múltiplo de 4.
- 480 es divisible entre 5 porque termina en cero.
- 480 es divisible entre 6 porque es divisible entre 2 y entre 3.

2. Determinar todas las cifras que hacen que la expresión "793*x* es divisible entre 3" sea verdadera.

Se quiere que $793x$ sea divisible entre 3, entonces, la suma de todas las cifras debe ser múltiplo de 3. En este caso se remplaza la x por números de cero a nueve para determinar cuáles sumas hacen que el número sea un múltiplo de 3.

Si $x = 0$, 7.930 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 0 = 19$ y 19 no es múltiplo de 3.

Si $x = 1$, 7.931 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 1 = 20$ y 20 no es múltiplo de 3.

Si $x = 2$, 7.932 es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 2 = 21$ y 21 es múltiplo de 3.

Si $x = 3$, 7.933 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 3 = 22$ y 22 no es múltiplo de 3.

Si $x = 4$, 7.934 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 4 = 23$ y 23 no es múltiplo de 3.

Si $x = 5$, 7.935 es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 5 = 24$ y 24 es múltiplo de 3.

Si $x = 6$, 7.936 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 6 = 25$ y 25 no es múltiplo de 3.

Si $x = 7$, 7.937 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 7 = 26$ y 26 no es múltiplo de 3.

Si $x = 8$, 7.938 es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 8 = 27$ y 27 es múltiplo de 3.

Si $x = 9$, 7.939 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 9 = 28$ y 28 no es múltiplo de 3.

Luego, las cifras que hacen que la expresión sea verdadera son 2, 5 y 8.

3. Los números de las camisetas de cinco jugadores son de dos dígitos. Además, dos de los cinco números son divisibles entre 9 y entre 2 pero no entre 10 ni entre 4. Y los otros tres son divisibles entre 10 y entre 3. ¿Cuáles son los números de las cinco camisetas?

Primero, se buscan los números de dos cifras que sean divisibles entre 9 y 2: 18, 36, 54, 72 y 90.

Luego, a los números anteriores se les quita los divisibles entre 10 y entre 4. Los números que quedan son 18 y 54.

Finalmente, se buscan los números de dos cifras que sean divisibles entre 10 y entre 3: 30, 60 y 90.

Por tanto, los números de las camisetas de los jugadores son 18, 30, 54, 60 y 90.

Afianzo COMPETENCIAS

ⓘ Interpreto • Argumento • Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

ⓘ **Responde las preguntas. Luego, justifica la respuesta.**

31. ¿6 es divisor de 3?

32. Si *A* es divisor de *B* y *B* es a su vez divisor de *C*, entonces, ¿es posible que *A* sea divisor de *C*?

33. Si *A* es divisor de *B*, ¿es posible que *B* sea divisor de *A*?

E **Determina por extensión los siguientes conjuntos.**

34. $D_9 = \{x/x$ es divisor de $9\}$

35. $D_{30} = \{x/x$ es divisor de $30\}$

36. $D_{42} = \{x/x$ es divisor de $42\}$

R **Determina el valor de *a* en cada caso.**

37. $D_a = \{1, 2, 4, 8\}$

38. $D_a = \{1, 7\}$

39. $D_a = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

Escribe V, si la afirmación es verdadera y F, si es falsa. Justifica la respuesta.

40. El conjunto de divisores de un número es infinito. (   )

41. Algunas veces un número es divisor de sí mismo. (   )

42. Todo número puede dividirse entre 1. (   )

43. Algunos números pueden dividirse entre 1. (   )

R **Subraya el número o los números que no hacen parte del conjunto.**

44. $D_{20} = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 20\}$

45. $D_{30} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 30\}$

46. $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40\}$

E **47. Completa la siguiente tabla.**

	Divisibilidad entre						
Números	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
29	✓	✗					
136							
2.598							
15.876							
325.860							
2.266.810							

R **Determina si los números dados en cada caso son divisibles entre 6, 9 y 10 al mismo tiempo.**

48. 368

49. 480

50. 1.230

51. 2.300

52. 4.598

53. 12.567

Escribe un número que cumpla con cada grupo de condiciones.

54. Impar, divisor de 45, mayor que 10 y menor que 20.

55. Par, divisor de 56, mayor que 7 y menor que 17.

R **Lee la siguiente información.**

Dos números son **amigos** cuando la suma de los divisores propios de cada número, da como resultado el otro número. Por ejemplo, los números 220 y 284 cumplen esa propiedad ya que:

$D_{220} = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

$D_{284} = \{1, 2, 4, 71, 142\}$

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

Luego, los números 220 y 284 son amigos.

Determina si cada par de números son amigos.

56. 1.184 y 1.210

57. 17.296 y 18.416

S **Resuelve.**

58. En una clase hay 35 estudiantes. ¿De cuántas formas se pueden agrupar, para realizar un trabajo de matemáticas, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de estudiantes?

59. Con 80 cuadrados, ¿cuántos rectángulos de formas distintas y sin que sobren cuadrados se pueden formar?

60. Una fábrica produce cierta cantidad diaria de galletas que empacan en cajas de tal forma que la cantidad de galletas de cada caja es divisible entre 10 y 11 y no es mayor que 130 galletas. Si utilizan 1.300 cajas, ¿cuántas galletas se producen en un día?

3. Números primos y números compuestos

Actividad

Recurso imprimible

3.1 Números primos

Un número natural es **primo** si y sólo si tiene exactamente dos divisores diferentes que son 1 y él mismo.

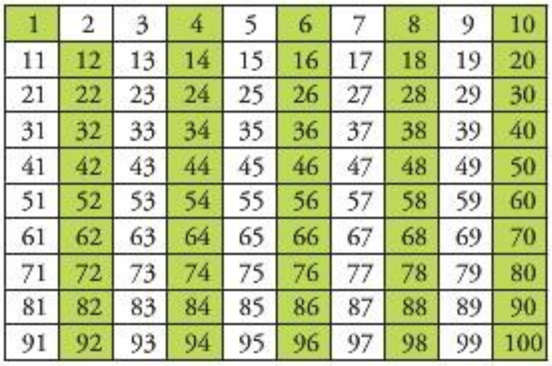
En símbolos se escribe: a es primo si y sólo si $D_a = \{1, a\}$. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

3.2 Criba de Eratóstenes

Ampliación multimedia

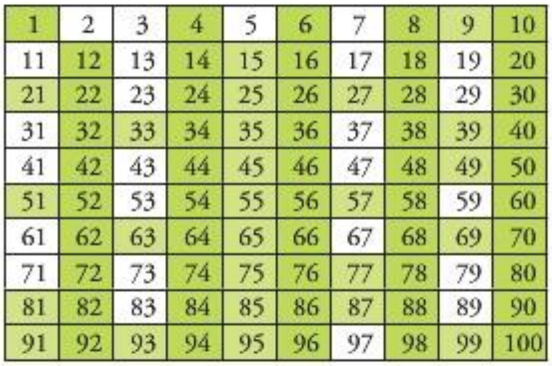
Para hallar los números primos, Eratóstenes, famoso matemático del siglo III a. C., ideó un método conocido como la **criba de Eratóstenes**, tabla que permite hallar los números primos hasta determinado número. Para hallar los números primos que hay entre uno y cien, se construye esta tabla teniendo en cuenta los siguientes pasos:

Primero, se escriben los números naturales de uno hasta cien y luego, se tacha el número 1. A partir del número 2, se tachan los múltiplos de 2 sin el 2. Así:



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Luego, se tachan los múltiplos de 3, 5 y 7 (sin 3, 5 y 7) y sus respectivos múltiplos.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Así, los números que quedan sin tachar son los primos que hay entre 1 y 100. En conclusión, los números primos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

3.3 Números compuestos

Un número natural es **compuesto** si tiene más de dos divisores distintos.

Por ejemplo, el número 4 es compuesto porque los divisores de 4 son 1, 2 y 4.

En la criba de Eratóstenes, toda la serie de números sombreados (sin contar el 1) son números compuestos.

Ni el uno ni el cero se consideran primos porque el 1 tiene un único divisor que es él mismo, y el cero tiene infinitos divisores.

EJEMPLOS

1. Determinar cuáles participantes fueron los finalistas del *reality* teniendo en cuenta que quedaron aquellos que tienen en su escarapela números primos.

Para determinar quiénes fueron los finalistas se debe determinar cuáles escarapelas tienen números primos. Para ello se mira el conjunto de divisores de cada número utilizando los criterios de divisibilidad.

- El conjunto de divisores de 27 es $D_{27} = \{1, 3, 9, 27\}$. Luego, 27 es un número compuesto ya que tiene más de dos divisores diferentes.
- El conjunto de divisores de 13 es $D_{13} = \{1, 13\}$. Luego, 13 es un número primo ya que tiene solo dos divisores diferentes.
- El conjunto de divisores de 57 es $D_{57} = \{1, 3, 19, 57\}$. Luego, 57 es un número compuesto ya que tiene más de dos divisores diferentes.
- El conjunto de divisores de 29 es $D_{29} = \{1, 29\}$. Luego, 29 es un número primo ya que tiene solo dos divisores diferentes.

Entonces los finalistas del *reality* fueron Diana y Andrés.

2. Determinar si la afirmación es verdadera o si es falsa.

a. Todos los números primos son impares.

Esta afirmación es falsa ya que 2 es un número primo y es par.

b. El producto de un número primo con otro primo distinto no es número primo.

Esta afirmación es verdadera, porque el producto de dos números primos tiene como divisores por lo menos a 1, a uno de los números, al otro número y al producto de los números. Es decir, tendría por lo menos cuatro divisores distintos. Por ello, sería un número compuesto, no un número primo.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde.

61. ¿Cuántos divisores tiene el cero?

62. ¿El cero es un número primo?

63. ¿Todos los números impares mayores que 9 son primos?

64. ¿Cuáles son los números primos que hay entre 50 y 100?

65. ¿En dónde hay más números primos: entre 30 y 40 o entre 60 y 70?

R **Escribe un número que cumpla cada condición.**

66. Primo y par.

67. Compuesto y par.

68. Primo e impar.

69. Compuesto e impar.

R **Completa cada expresión con las palabras "todos", "algunos" o "ningún" y con los ajustes necesarios para que sea verdadera.**

70. ________ números pares son primos.

71. ________ números impares son primos.

72. ________ números pares son compuestos.

73. ________ números impares son compuestos.

E **Determina por extensión cada conjunto.**

74. $A = \{x/x \text{ es un número primo menor que } 50\}$

75. $A = \{x/x \text{ es primo mayor que } 20 \text{ y menor que } 80\}$

76. $A = \{x/x \text{ es divisor de } 18 \text{ y es primo}\}$

77. $A = \{x/x \text{ es divisor de } 50 \text{ y es compuesto}\}$

78. $A = \{x/x \text{ es divisor de } 24 \text{ y es compuesto}\}$

R **Lee la siguiente información.**

Los números primos gemelos son aquellos que tienen diferencia 2. Por ejemplo, 3 y 5 son primos gemelos, ya que $5 - 3 = 2$.

Determinar en cuál de los siguientes intervalos de números existen primos gemelos.

79. Entre 10 y 20.

80. Entre 50 y 80.

81. Entre 20 y 40.

82. Entre 20 y 100.

Responde y justifica tu respuesta.

83. ¿Es posible encontrar un número primo que sea igual a tres veces el menor número primo aumentado en 13? De ser posible determínalo.

E **Lee la siguiente información. Luego, resuelve.**

El matemático Christian Goldbach formuló la siguiente conjetura: todo número natural par, mayor que 2, se puede escribir como la suma de dos números primos.

Escribe los siguientes números como la suma de dos números primos.

84. 34

85. 56

86. 86

87. 102

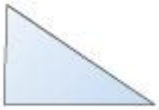
88. 64

89. 98

R **90. Observa lo que dice cada niño. Luego, determina el valor de verdad de las afirmaciones de cada uno y explica el porqué.**

S **Resuelve.**

91. Las medidas de los lados de un triángulo son tres números primos consecutivos. Si el perímetro del triángulo es 41, ¿cuánto miden sus lados?



Lo que viene...

En las siguientes páginas aprenderás a qué se le denomina factorización de un número y dos métodos para hacerla.

Recurso imprimible

Ampliación multimedia

4. Factorización de un número

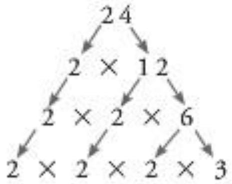
Factorizar un número significa expresar dicho número como un producto de números primos.

La factorización de un número también se conoce con el nombre de descomposición en factores primos.

Todo número compuesto se puede factorizar utilizando dos métodos: realizando un diagrama de árbol o efectuando divisiones sucesivas entre sus divisores primos.

EJEMPLOS

1. Factorizar el número 24 utilizando un diagrama de árbol.



Se escribe el número dado.

Se buscan dos números cuya multiplicación sea 24.

Se buscan dos números cuya multiplicación sea 12.

Se buscan dos números cuya multiplicación sea 6.

La descomposición de 24 en factores primos es:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3.$$

También se puede expresar esta multiplicación utilizando potenciación, ya que hay un factor que es un número primo y se repite, entonces,

$$24 = 2^3 \times 3.$$

2. Descomponer en factores primos el número 36 utilizando divisiones sucesivas.

Para factorizar 36, se divide entre la serie de números primos (2, 3, 5, 7,…) tantas veces como se pueda hasta obtener como cociente la unidad. Para determinar entre cuáles números se puede dividir, se utilizan los criterios de divisibilidad.

36	2	36 es divisible entre 2.
18	2	18 es divisible entre 2.
9	3	9 es divisible entre 3.
3	3	3 es divisible entre 3.
1		

La descomposición de 36 en factores primos es: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

3. Encontrar el número según las condiciones: es un divisor de 48, no es múltiplo de 4, no es primo, no es un divisor de 50.

Si es un divisor de 48, entonces, puede ser 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 o 48.

Como no es un múltiplo de 4, entonces, pueden ser 1, 2, 3 o 6.

Como no es primo pueden ser 1 o 6.

Y finalmente, como no es un factor de 50, entonces, es el número 6.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono

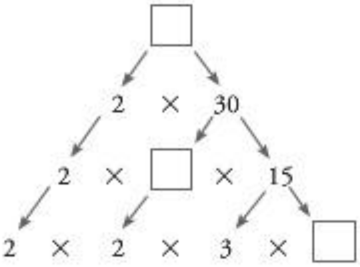
Responde las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta.

92. ¿La descomposición en factores primos de 30 es 6 × 5?

93. ¿La descomposición del número 90 en factores primos es 2 × 5 × 3 × 3?

94. ¿La descomposición en factores primos de 176 es 23 × 11?

E **95. Completa el siguiente diagrama de árbol.**



E **Elabora un diagrama de árbol de factores primos para los siguientes números.**

96. 87

97. 130

98. 300

99. 2.500

100. 72

101. 96

102. 7.020

103. 30.030

E **Descompón en factores primos los siguientes números utilizando divisiones sucesivas.**

104. 34

105. 250

106. 1.000

107. 5.600

108. 110

109. 1.500

110. 3.600

111. 7.200

R **Escribe los siguientes números como la suma de dos números primos:**

112. 32 **113.** 38 **114.** 28 **115.** 24

E **Determina si la descomposición en factores primos es correcta.**

116. 72 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3

117. 96 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3

118. 29.400 = 2 × 2 × 2 × 3 × 5 × 5 × 7 × 7

E **Determina cuántos factores primos diferentes tiene por divisores cada número.**

119. 25

120. 49

121. 26

122. 29

123. 36

124. 100

125. 250

126. 690

127. 1.250

R **Escribe el número que corresponde a cada descomposición en factores primos.**

128. 2 · 3 · 5 · 7 · 11 · 13 = ______________

129. $3^2 \times 5^3 \times 7 =$ ______________

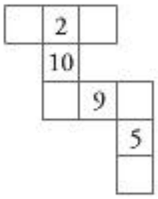
130. 2 · 3 · 5 · 7 · 19 · 29 = ______________

Responde las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta.

131. ¿El producto de dos números primos es otro número primo?

132. ¿El cociente de dos números primos es otro número primo?

R **133. ¿Es posible agregar un dígito en cada casilla del arreglo para que la suma de cada fila y columna de tres números sea un número primo?**



Completa con el número correspondiente.

134. ___ es un número primo que tiene dos dígitos y la suma de sus dígitos ___ también es un número primo.

135. ___ es un número de tres dígitos diferentes que es divisible entre cada uno de sus dígitos.

136. ___ es un número primo de dos dígitos, menor que 50 y mayor que 45.

R **Observa el ejemplo. Luego, descompón cada uno de los números como la suma de números cuadrados si es posible.** $35 = 5^2 + 3^2 + 1^2$

137. 73 = ______________

138. 137 = ______________

5. Máximo común divisor

Actividad Ampliación multimedia

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números. Si *a*, *b* y *c* son números naturales, el máximo común divisor de *a*, *b*, *c* se simboliza mcd *(a, b, c)*.

Existen dos métodos para hallar el máximo común divisor de dos o más números: utilizando los conjuntos de divisores o descomponiendo los números en factores primos.

Recuerda que...

Dos números *a* y *b* son primos relativos si mcd $(a, b) = 1$.

Para hallar el máximo común divisor, con los conjuntos de divisores, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se hallan todos los divisores de cada número.
- **Luego,** se buscan los divisores comunes de los conjuntos de divisores.
- **Finalmente,** se busca el mayor de los divisores comunes. Este es el máximo común divisor.

Para hallar el máximo común divisor, descomponiendo en factores primos, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se descompone cada número en factores primos.
- **Luego,** se escogen los factores comunes, elevados al menor exponente.
- **Finalmente,** se realiza la multiplicación de esos factores comunes. El producto es el máximo común divisor de los números.

EJEMPLOS

1. Determinar el máximo común divisor de 18 y 24, a partir de los conjuntos de divisores.

Primero, se hallan todos los divisores de cada número.

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \qquad D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Luego, se buscan los divisores comunes: 1, 2, 3 y 6.

Finalmente, se tiene que el máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes, es decir, mcd $(18, 24) = 6$.

Matemática*mente*

¿Cómo se puede hallar el mcd (18, 24) descomponiendo cada número en factores primos?

2. Daniel quiere dividir una cartulina de 40 cm de largo y 30 cm de ancho en cuadrados con la mayor área posible, sin que sobre cartulina. ¿Cuánto debe medir el lado de cada cuadrado?

Para encontrar la medida del lado de cada cuadrado se halla el máximo común divisor de 40 y 30, así:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Primero, se descompone en factores primos cada número.

Luego, se determinan los factores comunes elevados al menor exponente: 2 y 5.

Finalmente, se realiza la multiplicación de los factores comunes, con lo cual se obtiene que el mcd $(40, 30) = 10$.

Por tanto, el lado de cada cuadrado debe medir 10 cm. De esta forma se puede dividir la cartulina en cuadrados con la mayor área posible sin que sobre cartulina.

5.1 Método abreviado para hallar el máximo común divisor

Actividad

Para hallar el mcd de dos o más números se pueden descomponer los números, de manera simultánea, únicamente en factores primos comunes. El máximo común divisor será el producto de sus factores comunes.

EJEMPLOS

1. Hallar el mcd de 72 y 180 usando el método abreviado.

Primero, se descomponen los números de manera simultánea, en factores primos comunes únicamente.

$$\begin{array}{rr|r} 72 & 180 & 2 \\ 36 & 90 & 2 \\ 18 & 45 & 3 \\ 6 & 15 & 3 \\ 2 & 5 & \end{array}$$

Luego, se calcula el producto de los factores comunes:

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

Finalmente, se tiene que el mcd (72, 180) = 36.

2. El piso de un salón tiene forma rectangular de 16 metros de largo por 12 metros de ancho.

Si se quisiera cubrir con baldosas cuadradas del mayor tamaño posible, ¿cuántas baldosas se necesitarían?

Primero, se halla el mcd de 16 y 12, así:

$$\begin{array}{rr|r} 16 & 12 & 2 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & \end{array}$$

Segundo, se calcula el producto de los factores comunes con lo cual se obtiene que el mcd (16, 12) = 4.

Luego, se calcula el área del salón A_r y el área de una de las baldosas A_b.

$$A_r = 16 \times 12 = 192 \qquad A_b = 4 \times 4 = 16$$

Finalmente, se divide el área del piso entre el área de cada baldosa.

$$192 \div 16 = 12$$

Por tanto, para cubrir el piso del salón se necesitarían 12 baldosas de 4 metros de lado.

3. Determinar el máximo común divisor de 16, 18 y 24.

Se realiza la descomposición simultánea únicamente en factores primos comunes.

$$\begin{array}{rrr|r} 16 & 18 & 24 & 2 \\ 8 & 9 & 12 & \end{array}$$

En este caso el mcd (16, 18, 24) = 2, porque es el único factor primo que divide simultáneamente a los tres números.

4. En una floristería se tienen 120 rosas blancas, 360 rosas rojas y 280 rosas amarillas y se quiere formar ramos con la mayor cantidad de rosas de un mismo color.

a. ¿Cuál es el mayor número de rosas que debe ir en cada ramo, de tal forma que no sobre ninguna rosa?

Primero, se descomponen simultáneamente 120, 360 y 280, en factores primos comunes únicamente.

$$\begin{array}{rrr|r} 120 & 280 & 360 & 2 \\ 60 & 140 & 180 & 2 \\ 30 & 70 & 90 & 2 \\ 15 & 35 & 45 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \end{array}$$

Luego, se multiplican los factores primos comunes para hallar el máximo común divisor.

$$\begin{aligned} \text{mcd } (120, 280, 360) &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que cada ramo debe estar conformado por 40 rosas del mismo color.

b. ¿Cuántos ramos se obtienen de cada color?

Se divide cada cantidad de rosas entre el máximo común divisor, así:

$$120 \div 40 = 3 \qquad 280 \div 40 = 7 \qquad 360 \div 40 = 9$$

Por tanto, se pueden formar 3 ramos de rosas blancas, 7 ramos de rosas amarillas y 9 ramos de rosas rojas.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

139. ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?

140. ¿De qué formas se puede hallar el máximo común divisor de dos números?

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tus respuestas.

141. El máximo común divisor de dos números puede ser mayor que los números.

142. Si a es divisible entre b, entonces, mcd $(a, b) = b$.

143. El máximo común divisor de dos números puede ser igual a 1.

144. Si a es múltiplo de b, entonces, mcd $(a, b) = b$.

E Calcula el máximo común divisor de los siguientes números de tres maneras distintas: utilizando los conjuntos de divisores, descomponiendo cada número en factores primos y aplicando el método abreviado.

145. 5 y 30

146. 14 y 17

147. 72 y 108

148. 270 y 900

149. 16, 20 y 28

150. 45, 54 y 81

151. 45, 50 y 55

152. 75, 90 y 105

R Determina el valor de x que hace que la igualdad sea verdadera.

153. mcd $(x, 35, 95) = 5$

154. mcd $(27, x, 28) = 1$

155. mcd $(80, 675, x) = 5$

156. mcd $(216, 300, 720) = x$

Escribe tres números tales que su máximo común divisor cumpla cada una de las siguientes condiciones.

157. Es igual a 1

158. Es igual a10

159. Es divisible entre 18

160. Es múltiplo de 9

R Escribe tres ejemplos numéricos para comprobar cada propiedad.

161. Si mcd $(a, b) = c$, entonces, mcd $(a^2, b^2) = c^2$.

162. Si mcd $(a, b) = 1$, entonces,
mcd $(a + b, a \cdot b) = 1$.

163. Si mcd $(b, c) = 1$, entonces,
mcd $(a, b \cdot c) =$ mcd $(a, b) \times$ mcd (a, c).

S Lee y responde.

164. Un terreno con forma rectangular tiene 96 metros de largo y 56 metros de ancho. Si se quiere dividir el terreno en superficies cuadradas que tengan la mayor área posible, ¿cuáles son las dimensiones de cada superficie cuadrada?

165. Un carpintero desea construir unos estantes con tablas de 25, 30 y 35 metros de largo. Si los estantes deben tener la mayor longitud posible y no debe sobrar ningún trozo de madera, ¿cuántos estantes puede construir el carpintero?

166. En una actividad de integración participan 96 niñas y 112 niños. Hay que formar grupos con igual cantidad de integrantes, de tal forma que cada grupo tenga la misma cantidad de niños y la misma cantidad de niñas. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se puede formar y cómo estarán conformados?

167. Verónica dispone de 240 granos de café, 208 semillas de tagua y 272 canutillos para elaborar collares artesanales. Ella quiere elaborar cada collar con un único material, pero todos los collares deben tener la misma cantidad de piezas. ¿Cuántos collares puede elaborar Verónica de cada material, utilizando la mayor cantidad de piezas posible en cada collar, sin que le sobre ninguna pieza?

S Lee y resuelve.

En una fábrica se confeccionan banderas para el día de la Independencia. Para esto, se utilizan tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo cada uno. Cada rollo de tela debe cortarse en partes iguales de tal forma que no sobre tela y que el largo de la tela empleada para elaborar cada bandera sea el mayor posible.

168. ¿Cuál es el largo de la tela que se utiliza para elaborar cada bandera?

169. ¿Cuántas banderas se pueden confeccionar?

6. Mínimo común múltiplo

Actividad Ampliaciones multimedia

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes diferente de cero.

Si *a*, *b* y *c* son números naturales, el mínimo común múltiplo de *a*, *b* y *c* se simboliza mcm *(a, b, c)*.

Matemática*mente*

Si *a* es un número natural, ¿a qué es igual mcm (*a*, 1)?

De manera similar al máximo común divisor, el mínimo común múltiplo se puede calcular de dos formas: utilizando los conjuntos de múltiplos de los números y descomponiendo en factores primos los números.

Para hallar el mínimo común múltiplo, con los conjuntos de múltiplos, se realiza el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se escribe el conjunto de múltiplos de cada número.
- **Luego,** se buscan los múltiplos comunes de los conjuntos de los múltiplos.
- **Finalmente,** se busca el menor de los múltiplos comunes diferente de cero.

Para hallar el mínimo común múltiplo, por descomposición en factores primos, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se descomponen los números en sus factores primos.
- **Luego,** se escogen los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.
- **Finalmente,** se realiza la multiplicación de esos factores comunes. Ese es el mcm de los números.

EJEMPLOS

1. Determinar el mínimo común múltiplo de 4 y 6 usando los conjuntos de múltiplos de los números.

Primero, se escribe el conjunto de múltiplos de cada número.

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots\}$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$$

Luego, se buscan los múltiplos comunes de los conjuntos de los múltiplos: 0, 12, 24, 36, 48,…

Finalmente, se tiene que el menor de los múltiplos comunes, diferente de cero, es el mínimo común múltiplo, es decir, mcm (4, 6) = 12.

2. Hallar el mínimo común múltiplo de 45 y 150 descomponiendo cada número en factores primos.

Primero, se descomponen los números en factores primos.

Luego, se eligen los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente: $2 \times 3^2 \times 5^2$.

45	3
15	3
5	5
1	

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$45 = 3^2 \times 5$ $\quad$ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

Finalmente, se realiza la multiplicación de esos factores con lo cual se obtiene el mínimo común múltiplo.

$$\text{mcm } (45, 150) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$$

6.1 Método abreviado para hallar el mínimo común múltiplo

Actividad

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, se pueden descomponer, simultáneamente los números en factores primos. En este caso, el mínimo común múltiplo es el producto de todos los factores que resultan en la descomposición. Es necesario tener en cuenta que para realizar la descomposición se debe analizar la divisibilidad de los números según los criterios de divisibilidad.

EJEMPLOS

1. Hallar el mínimo común múltiplo de 56 y 84 usando el método abreviado.

Primero, se descomponen simultáneamente los números en factores primos.

Luego, se calcula el producto de los factores que resultan en la descomposición.

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 168$$

Finalmente, se tiene que el mcm (56, 84) = 168.

56	84	2
28	42	2
14	21	2
7	21	3
7	7	7
1	1	

2. Determinar si la igualdad mcm (36, 48, 60) = 360 es verdadera o falsa.

Primero, se descomponen simultáneamente los números en factores primos.

Luego, se calcula el producto de todos los factores primos que resultan en la descomposición.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 720$$

Finalmente, se tiene que el mcm (36, 48, 60) = 720. Por tanto, mcm (36, 48, 60) = 360 es falsa.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

3. Como parte de un programa de salud, tres profesionales visitan a una comunidad indígena de la siguiente manera: el médico asiste cada 12 días, el odontólogo cada 20 días y la enfermera cada 6 días. Si los tres profesionales se encontraron hoy, ¿cuántos días deben pasar como mínimo para que se vuelvan a encontrar los tres?

Para resolver el problema se debe hallar el mínimo común múltiplo de 6, 12 y 20. Para esto, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se descomponen los números en factores primos.

6	12	20	2
3	6	10	2
3	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

Luego, se multiplican los factores primos que resultan en la descomposición, para calcular el mínimo común múltiplo.

$$\text{mcm } (6, 12, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde.

170. ¿Cuál es la diferencia entre el método abreviado para hallar el máximo común divisor y el método abreviado para hallar el mínimo común múltiplo?

171. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de dos números a y b, si a es múltiplo de b?

Lee y responde.

El teorema fundamental de la aritmética es una proposición que afirma que todo número natural se puede expresar de una única forma como producto de números primos.

172. A partir del teorema fundamental de la aritmética, ¿cómo se puede argumentar que el mínimo común múltiplo de dos números es único? Justifica tu respuesta con un ejemplo.

E **Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes números utilizando los conjuntos de múltiplos, descomponiendo en factores primos cada número y aplicando el método abreviado.**

173. 24 y 38

174. 27 y 16

175. 18 y 45

176. 72 y 10

177. 12, 15 y 18

178. 6, 30 y 42

179. 10, 20 y 30

180. 9, 14 y 21

181. Completa la siguiente tabla y resuelve.

a y b	mcm	mcd	$a \times b$	mcm × mcd
6 y 14				
20 y 32				
18 y 21				
4 y 22				
9 y 15				

182. Escribe una regla general que relacione el producto de dos números a y b con el producto de mcm (a, b) por mcd (a, b).

R **Determina el valor x que hace que la igualdad sea verdadera.**

183. mcm $(36, x, 90) = 180$

184. mcm $(45, 54, x) = 540$

R **Escribe tres ejemplos numéricos para comprobar cada expresión.**

185. Si mcd $(a, b) = 1$, entonces, mcm $(a, b) = ab$.

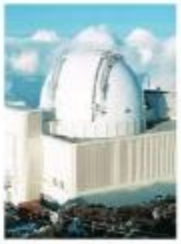
186. mcm $(a, b) = (a \times b) \div$ mcd (a, b).

187. Si b es múltiplo de a, entonces, mcm $(a, b) = b$.

S **Lee y resuelve.**

188. Tres vendedores se turnan para vender su mercancía en un centro comercial. El primero lo hace cada 6 meses; un segundo, cada 7 meses, y un tercero, cada 4 meses. Si hoy se encuentran los tres vendedores, ¿en cuántos meses se volverán a encontrar?

189. Se diseñó una piscina de manera que se llene mediante tres tuberías diferentes. La primera tubería vierte 34 litros de agua cada minuto; la segunda, 18 litros de agua cada minuto, y la tercera, 12 litros de agua cada minuto. Si con una sola tubería se puede llenar la piscina en un número exacto de minutos, determina la menor capacidad que puede tener la piscina en litros.



190. Según los registros de un observatorio astronómico se sabe que un cometa se acerca a un planeta cada 96 años, y otro, cada 176 años. Supón que ambos cometas se aproximaron al planeta en 1913. Luego, determina los tres años siguientes en los que se volvieron a aproximar ambos cometas.

191. Victoria descubrió un hecho curioso en el libro que está leyendo: cada 15 páginas aparece la palabra “silencio”, cada 8 páginas aparece la palabra “inocente” y cada 6 páginas está la palabra “libertad”. Si en la página 46 aparecen las tres palabras y el libro tiene 456 páginas en total, ¿en qué página volverán a estar las tres palabras?

192. En una granja hay un gallo, un canario y un azulejo. Supón que el gallo canta cada 7 minutos, que el canario lo hace cada 14 minutos y el azulejo, cada 22 minutos. Si en este momento cantaran al mismo tiempo las tres aves, ¿en cuántos minutos volverán a coincidir los tres cantos?

Múltiplos de un número

Escribe los 10 primeros múltiplos de cada número.

193. $M_8 = \{$ $\}$

194. $M_9 = \{$ $\}$

195. $M_{12} = \{$ $\}$

196. $M_{23} = \{$ $\}$

Lee y resuelve.

"La suma de dos múltiplos de un número es también múltiplo de ese número. Además, si al menos uno de los factores en una multiplicación es múltiplo de un número, el producto también lo es".

Marca con ✓ las sumas y los productos que son múltiplos de 7, sin resolver las operaciones.

197. 49 + 15 ☐

198. 56 + 35 ☐

199. 20 × 70 ☐

200. 45 × 60 ☐

201. 17 × 54 ☐

202. 121 × 56 ☐

Escribe cinco sumas y cinco multiplicaciones sin resolver, cuyo resultado sea múltiplo de 3.

203. Sumas

204. Multiplicaciones

Divisores de un número

Escribe todos los divisores de cada número.

205. $D_{28} = \{$ $\}$

206. $D_{74} = \{$ $\}$

207. $D_{96} = \{$ $\}$

208. $D_{108} = \{$ $\}$

Resuelve.

209. Subraya los números que son divisibles entre 2, 3, 5, 9 y 10.

450 2.420 3.140 55.080
1.176 6.255 7.920 65.910

210. Encierra los números que son divisibles entre 6 y entre 9, sin hacer las divisiones.

7.200 2.100 1.089 56.672 982.134

211. Escribe D en las casillas que cumplen el criterio de divisibilidad.

	Divisibilidad entre						
	2	3	4	5	6	9	10
24							
96							
104							
115							
222							
405							
625							
702							
900							
930							

Responde.

212. Si el número 3*a*2 es divisible entre 3, ¿cuáles son los posibles valores de *a*? ______ .

213. Si el número 5*a*3*b* es múltiplo de 3 y de 5, ¿cuáles son los posibles valores de *a* y cuáles son los posibles valores de *b*? ______ .

214. Si el número 2*a*7*b* es divisible entre 2, 3 y 5, ¿cuál es el valor de *a* y cuál es el valor de *b*? ______ .

215. Cambia el orden de las cifras de cada número de la tabla para obtener otro con las condiciones pedidas.

Número	Condición	Número nuevo
7.050	Divisible entre 5 y no divisible entre 10.	
3.200	Divisible entre 2 y no divisible entre 10.	
4.902	Divisible entre 3 e impar.	
9.005	Divisible entre 4.	
5.058	Divisible entre 5 y entre 9.	
8.226	Divisible entre 6 y divisible entre 4.	

Números primos y números compuestos

Escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa.

216. Todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que 1. ( )

217. La suma de dos números primos es un número primo. ( )

218. El producto de un número primo y uno compuesto es un número compuesto. ( )

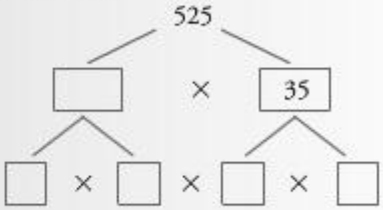
219. Todos los números compuestos son pares. ( )

Marca con una ✗ los números primos.

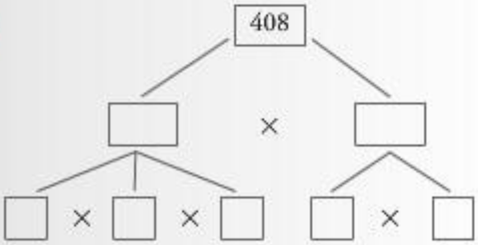
220. 17 ☐
221. 125 ☐
222. 153 ☐
223. 93 ☐
224. 108 ☐
225. 507 ☐
226. 727 ☐
227. 681 ☐
228. 863 ☐

Completa los diagramas de cada descomposición en factores primos.

229.



230.



Lee y resuelve.

Los antiguos griegos probaron que si $2^n - 1$ es primo, entonces, $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ es un número perfecto, verifica esta proposición para los siguientes valores de n.

231. $n = 3$
232. $n = 2$
233. $n = 5$
234. $n = 7$

Máximo común divisor

235. Une con una línea cada pareja de números con su máximo común divisor.

Números	mcd
16 y 36	2
18 y 56	9
30 y 54	6
25 y 60	5
9 y 27	4

Calcula el máximo común divisor de los siguientes números aplicando el método abreviado.

236. 72, 108 y 600

237. 175, 1.225 y 6.125

Mínimo común múltiplo

Resuelve.

238. Halla la menor cantidad de dinero que se puede repartir entre 5, 6, 7 o 13 personas, sin que sobre dinero.

239. Calcula la menor longitud que se puede medir exactamente con una regla de 30 cm, una de 50 cm y una de 80 cm.

240. Encontrar dos posibles valores de x si:
mcm $(x, 48) = 96$.

Aplica el método abreviado para calcular el mcm de los siguientes números.

241. 24, 60 y 144

242. 36, 60, 84 y 96

PROBLEMAS PARA REPASAR

Un balón de fútbol reglamentario debe tener una masa entre los 410 y los 450 gramos y el perímetro de su circunferencia máxima debe estar entre los 68 y los 70 centímetros. En una fábrica de balones de fútbol un supervisor revisa la masa de un balón cada vez que se fabrican 12 balones y revisa el perímetro de su circunferencia máxima cada vez que se fabrican 18 balones.

Si en una semana se fabricaron 720 balones, ¿a cuántos balones les revisó la masa y el perímetro de la circunferencia máxima a la vez?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿A cuántos balones, en la semana, les revisó el supervisor la masa y el perímetro de la circunferencia máxima a la vez?

¿Cuáles son los datos del problema?

El supervisor revisa la masa de un balón cada vez que se fabrican 12 balones y revisa el perímetro de la circunferencia máxima cada vez que se han fabricado 18 balones. Además, en la semana se fabricaron 720 balones.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para encontrar cada cuántos balones el supervisor revisa en forma simultánea la masa de un balón y el perímetro de su circunferencia máxima, se debe calcular el mcm (12, 18), así:

Primero, se descomponen simultáneamente 12 y de 18 en factores primos.

Luego, se multiplican los factores que resultan en la descomposición, con lo cual se obtiene que mcm (12, 18) = $2^2 \times 3^2 = 36$.

Finalmente, se tiene que el supervisor revisa, en forma simultánea, la masa y el perímetro de la circunferencia máxima de un balón cada vez que se fabrican 36 balones.

12	18	2
6	9	2
3	9	3
1	3	3
1	1	

Para determinar la cantidad de balones a los cuales se les ha revisado a la vez la masa y el perímetro en la semana, se divide el número total de balones fabricados entre el mínimo común múltiplo de 12 y 18. Por tanto, se tiene que $760 \div 36 = 20$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que el mínimo común múltiplo de 12 y 18 es 36. Para esto se pueden escribir los conjuntos de múltiplos de cada número y se escoge el menor múltiplo común, diferente de cero.

$$M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, \ldots\}$$

$$M_{18} = \{0, 18, 36, 54, \ldots\}$$

La división del número total de balones fabricados entre el mcm (12, 18) se puede verificar mediante la multiplicación: $36 \times 20 = 760$.

Entonces, se concluye que en la semana el supervisor les revisó la masa y el perímetro de la circunferencia máxima a la vez a 20 balones.

Lee cada situación. Luego, responde.

243. Ricardo observó que cuando ordena sus CD agrupándolos de a 2 o de a 3, siempre sobra uno; pero si los agrupa de 5 en 5, no le sobra ninguno. ¿Cuántos CD tiene Ricardo si son más de 80 y menos de 90?

244. Se tienen dos recipientes: uno con 24 litros de agua y otro con 16 litros. Si se reparte el agua de ambos recipientes equitativamente en varias jarras de igual capacidad, y no sobra nada de agua, ¿qué capacidad tendrán como máximo las jarras?

245. Cierto país realiza elecciones presidenciales cada 6 años y de alcaldes, cada 4 años. Si en el año 2010 se realizaron elecciones presidenciales y de alcaldes, ¿en qué año volverán a coincidir ambas elecciones?

246. Se quiere dividir un terreno rectangular de 1.200 m de largo por 800 m de ancho en sectores cuadrados con iguales dimensiones cada uno, y lo más grandes posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada sector?

247. En un frigorífico se almacenan 18 kg de carne de res, 24 kg de carne de cerdo y 12 kg de carne de pollo. Toda la carne se reparte en recipientes de igual tamaño, de tal forma que en cada recipiente haya la mayor cantidad posible de cada tipo carne. ¿Cuántos kilogramos de carne contiene cada recipiente?

248. María, Miguel y Mauricio entrenan en una pista circular de ciclismo. María tarda 45 segundos en dar una vuelta, Miguel tarda 50 segundos y Mauricio 48 segundos. En cierto entrenamiento partieron juntos del mismo punto. ¿A los cuántos minutos se volvieron a encontrar los tres en el punto de partida?

249. Tres relojes digitales se programan para que sus alarmas se activen en un determinado tiempo. El primer reloj suena cada 12 minutos; el segundo, cada 18 minutos y el tercero, cada media hora. Si cierto día, suenan los tres a las 11 a. m., ¿a qué hora volverán a sonar al mismo tiempo?

Responde las preguntas 250 y 251 de acuerdo con la siguiente información.

El naipe español tiene 40 cartas y el naipe inglés tiene 52 cartas. Se quiere formar el mayor número posible de "grupos de cartas", donde todos tengan igual cantidad de cartas, con igual cantidad de naipes ingleses e igual cantidad de naipes españoles, sin que sobren cartas de ninguno de los dos tipos.

250. ¿Cuántos grupos de cartas se formarán?

251. ¿Cuántas cartas de cada tipo habrá en cada grupo?

Responde las preguntas 252 y 253 de acuerdo con la siguiente información.

Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales tienen 15, 9 y 6 metros de longitud. Cada balsa debe tener la mayor longitud posible y no debe sobrar ninguna parte de los troncos.

252. ¿Cuál será la longitud de cada balsa?

253. ¿Cuántas balsas se construirán?

Lee y resuelve. Luego, completa.

254. Víctor prepara sorpresas para los invitados a la fiesta de cumpleaños de su hermana. Para esto, cuenta con 160 juguetes, 240 chocolates y 320 galletas. Además, quiere que las sorpresas alcancen para la mayor cantidad posible de personas, de tal forma que cada una tenga la misma cantidad de juguetes, de chocolates y de galletas.

Víctor podrá preparar ________ sorpresas en total. Cada sorpresa tendrá ________ juguetes, ________ chocolates y ________ galletas.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Enlace web

Galería de imágenes

...Para comprender cómo funciona la seguridad en informática.

Antiguamente se creía que los números primos no tenían una aplicación específica en contextos reales. Sin embargo, en la actualidad son parte fundamental de la criptografía y por eso se aplican para transmitir información digital de manera segura.

La criptografía es la ciencia o el arte de esconder información escribiendo en un lenguaje secreto o en clave que puede ser representado por letras o por números. Existen muchas técnicas para encriptar información, dentro de las cuales se encuentra la criptografía RSA.

La criptografía RSA utiliza tres claves: la primera es una clave pública, la segunda es una clave privada y la tercera es el producto de las dos anteriores. La seguridad de este método radica en que una de las claves es un número compuesto que puede tener más de 200 dígitos y para hallar las otras dos claves se deben encontrar los dos números primos cuyo producto es igual al número compuesto. Incluso utilizando una computadora de alta tecnología, la tarea de factorizar un número de tantas cifras, en dos números primos, podría tardar millones de años.

Un ejemplo en el que se utiliza este tipo de criptografía es en las tarjetas de crédito. Una tarjeta de crédito trae en la parte delantera un número de 16 dígitos. Este número se considera la clave pública y en ella se registra el país, el banco, la oficina y la identificación de cada cliente. La clave privada está registrada en la banda magnética o en un chip, y la tercera clave solo la maneja el banco. Una de estas claves se identifica con un número compuesto y las otras dos, con números primos.

Por ejemplo, si se supone que una de las claves es 119, que es un número compuesto, para encontrar las otras dos claves se deben hallar los dos números primos que al multiplicarse den como resultado 119. Un computador efectúa este procedimiento realizando todas las posibles combinaciones de números primos que al multiplicarse den este número. Como en este caso el número es de tan solo tres dígitos, las combinaciones que se deben probar son muy pocas para encontrar que los números son 17 y 7.

1. **¿Por qué el producto de dos números primos es su mínimo común múltiplo? Explica tu respuesta.**
2. **Supón que los siguientes números son claves en la criptografía RSA. Luego, halla las otras dos claves.**

   a. 77 **c.** 111

   b. 85 **d.** 671
3. **El número de combinaciones que debe hacer un computador para descifrar la clave correcta de una tarjeta de crédito viene dada por la expresión $2^n - 1$, donde n representa el número de bits que tiene la clave conocida. Así, si una clave contiene 5 bits (sería una clave muy pequeña), el número de posibles combinaciones que debe realizar es:**

   $$2^5 - 1 = 31$$

   Eso indica que el computador debe realizar 31 combinaciones para encontrar la clave verdadera.

   Halla el número de combinaciones que debe hacer la computadora si una clave tiene:

   a. 6 bits **c.** 7 bits

   b. 9 bits **d.** 24 bits

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: aplicar el programa Microsoft Mathematics para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números naturales.

Descripción: descomponer un número en factores primos. Luego, calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de tres números naturales.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/downloads

❶ Haz clic en el menú inicio y abre **Microsoft Mathematics**.

❷ Selecciona el botón **factor** que aparece en el panel **Estándar** de la calculadora y escribe el número 9216. Haz clic en) para cerrar paréntesis y presiona la tecla Enter. Aparecerá la descomposición de 9.216 en factores primos.

factor(9216)

$2^{10}\ 3^{2}$

9216

❸ Utiliza Microsoft Mathematics para descomponer 15. 872 y 67. 828 en factores primos.

❹ Haz clic en el botón **m.c.d**, que se encuentra en el panel **Estándar** de la calculadora y digita los números 45, 50 y 200, separados por comas. Cierra paréntesis y teclea Enter para que aparezca el máximo común denominador de los tres números.

gcf(45, 50, 200)

5

❺ Calcula el mcd de los siguientes números aplicando el método abreviado. Luego, comprueba tus respuestas con Microsoft Mathematics.

a. 15 y 70
b. 32 y 64
c. 8 y 112
d. 24 y 400
e. 55, 45 y 105
f. 343, 245 y 49

❻ Haz clic en el botón **m.c.m**, que se encuentra en el panel **Estándar** de la calculadora y digita los números 25, 30, 60 separados por comas. Luego, cierra paréntesis y presiona la tecla Enter. Aparecerá el mínimo común múltiplo de los tres números.

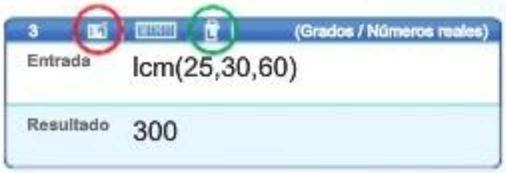
lcm(25, 30, 60)

300

❼ Halla el **mcm** de los siguientes números aplicando el método abreviado. Luego, comprueba tus respuestas con Microsoft Mathematics.

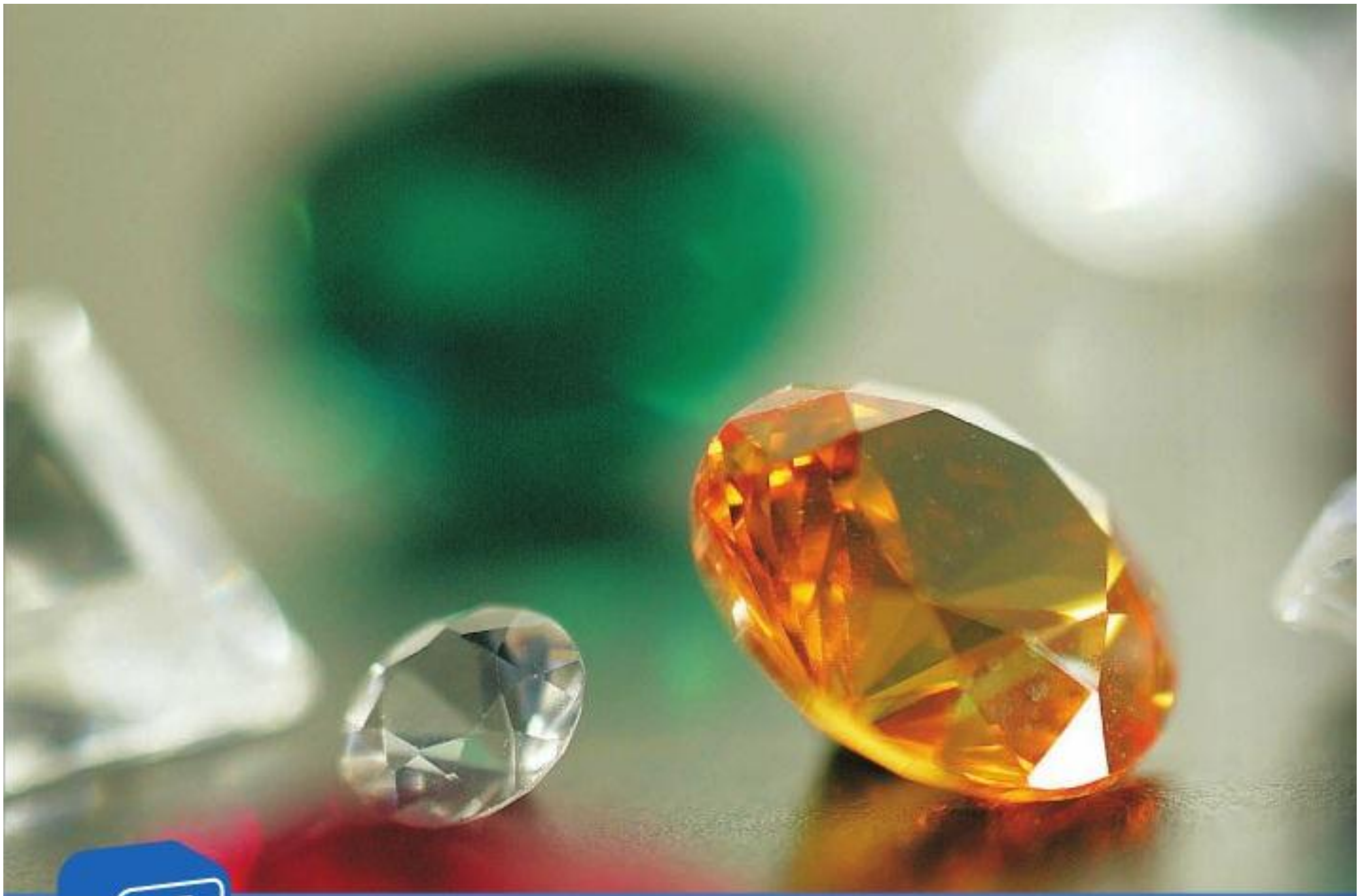
a. 45 y 50
b. 20 y 16
c. 6 y 24
d. 14 y 15
e. 3, 17 y 51
f. 7, 21 y 49

❽ Puedes cambiar los números en el ícono de la libreta que aparece en la hoja de cálculo. También puedes borrar los anteriores resultados haciendo clic en la imagen de la caneca.



Entrada lcm(25,30,60)

Resultado 300



4 Fracciones y decimales

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer el **uso y las aplicaciones de las fracciones** en diferentes contextos.
- Resolver **problemas en los que se involucren operaciones con fracciones.**
- Identificar la **relación entre una fracción y su expresión decimal.**
- **Aplicar las operaciones con decimales** en la solución de situaciones problema.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

7 Multimedia	**1** Audio
1 Galería	**14** Imprimibles
17 Actividades	**3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Encuentra, en cada caso, el mínimo común múltiplo (mcm) de los números.

   a. 56 y 84 **b.** 28, 72, 108 **c.** 35, 49 y 105

2. Tres avisos de neón encienden sus luces de la siguiente forma: el primero cada 6 segundos, el segundo cada 9 segundos y el tercero cada 15 segundos. A las 8:20 p. m. se encienden simultáneamente los avisos. ¿Cuántas veces coinciden los avisos encendidos durante las siguientes dos horas?

3. Responde las siguientes preguntas con base en el dibujo de la derecha.

   a. ¿Qué fracción representa el triángulo amarillo con respecto al rectángulo?

   b. ¿Qué fracción representa un triángulo rojo con respecto al rectángulo?

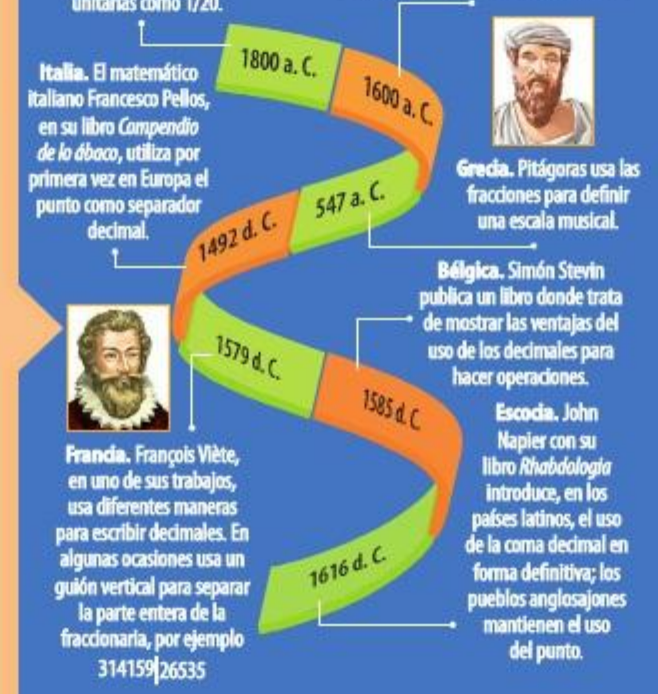
Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para comprender qué es un quilate en gemología y en orfebrería.

Las piedras y metales preciosos han sido muy apetecidos por el hombre a lo largo de la historia, puesto que son símbolo de poder y belleza. Actualmente, se utilizan en el diseño y fabricación de accesorios tales como relojes, anillos, pulseras y cadenas. Por esta razón, en gemología (ciencia que estudia las piedras preciosas) y en orfebrería (ciencia que estudia la aleación de metales preciosos) se utiliza el *quilate* para definir el valor de dichos accesorios.

⠶ Lee más acerca de este tema en la página 166.

Cronología de fracciones y decimales



Egipto. Se escriben en un papiro fracciones unitarias como 1/20.

Babilonia. Aparecen los primeros vestigios de la noción del inverso de un número.

Grecia. Pitágoras usa las fracciones para definir una escala musical.

Italia. El matemático italiano Francesco Pellos, en su libro *Compendio de lo ábaco*, utiliza por primera vez en Europa el punto como separador decimal.

Francia. François Viète, en uno de sus trabajos, usa diferentes maneras para escribir decimales. En algunas ocasiones usa un guión vertical para separar la parte entera de la fraccionaria, por ejemplo 314159|26535

Bélgica. Simón Stevin publica un libro donde trata de mostrar las ventajas del uso de los decimales para hacer operaciones.

Escocia. John Napier con su libro *Rhabdologia* introduce, en los países latinos, el uso de la coma decimal en forma definitiva; los pueblos anglosajones mantienen el uso del punto.

1. Fracciones

Ampliación multimedia
Recurso imprimible
Enlace web

Las **fracciones** son expresiones numéricas que se utilizan para representar las partes iguales en las que se puede dividir una unidad.

En la figura de la derecha se observa un pastel que está dividido en 7 partes iguales, de las cuales se tomarán cuatro porciones para repartir. La fracción que representa esta situación es $\frac{4}{7}$.

Es importante tener en cuenta que en muchos casos se usan figuras geométricas para representar fracciones.

Recuerda que…

Un número natural se puede representar como fracción si se expresa con denominador 1.

Por ejemplo,

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$8 = \frac{8}{1}$$

1.1 Elementos de una fracción

Actividad

Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números naturales y $b \neq 0$

Una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ tiene tres elementos importantes:

El numerador representado por a, el cual indica el número de partes de la unidad que se van a tomar.

El denominador representado por b que indica el número de partes en el que se debe dividir la unidad.

La línea que separa al numerador del denominador se llama vínculo, e indica la división entre el numerador y el denominador.

EJEMPLOS

Resolver las siguientes situaciones.

a. **Una fábrica de dulces ha sacado al mercado chocolatinas mixtas de chocolate blanco y chocolate clásico como se observa en las siguientes figuras.**

¿Qué fracción de cada chocolatina es de chocolate blanco?

Como las chocolatinas están divididas en 8 partes y 3 son blancas, la fracción correspondiente al chocolate blanco en cada caso es $\frac{3}{8}$.

b. **Dibujar dos chocolatinas y representar en ellas las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{9}$ de chocolate negro, respectivamente.**

La unidad puede tener cualquier forma, pero es importante dividirla en la cantidad de partes iguales que indica el denominador. Posteriormente, las partes indicadas por el numerador serán de chocolate negro.

$\frac{3}{7}$

$\frac{2}{9}$

1.2 Interpretaciones del concepto de fracción

Actividad

Un número fraccionario puede tener varias aplicaciones dependiendo del contexto en el que se esté empleando. En todos los casos el número se representa de la misma manera, pero el numerador y el denominador tienen diferentes interpretaciones.

Fracción como cociente

Una fracción puede representar la división de dos cantidades. En este caso el numerador de la fracción representa al dividendo y el denominador representa al divisor.

Por ejemplo, 483 imágenes distribuidas equitativamente en 18 páginas se pueden expresar como $483 \div 18$ o en forma de fracción como $\frac{483}{18}$.

Fracción como razón

Las fracciones también se pueden usar para representar la comparación de dos cantidades que tienen una característica común que las relaciona.

Por ejemplo, en un salón de clases por cada 5 niños hay 7 niñas. La relación entre el número de niños y niñas se puede expresar de las siguientes formas:

- La relación entre niños y niñas es de 5 a 7.
- Por cada 5 niños hay 7 niñas.
- La fracción $\frac{5}{7}$ que se lee 5 es a 7.

Fracción como operador de un número

En muchos casos surge la necesidad de calcular la fracción de un número dado, para lo cual se multiplica el numerador de la fracción por el número y el resultado se divide entre el denominador de la fracción.

Por ejemplo, Carlos tiene 28 estampillas, $\frac{5}{7}$ de estas son nacionales. ¿Cuántas estampillas nacionales tiene Carlos?

$$\frac{5}{7} \text{ de } 28 \text{ son } \frac{5}{7} \times 28 \text{ es decir, } 5 \times 28 = 140 \text{ y } 140 \div 7 = 20$$

En conclusión, Carlos tiene 20 estampillas nacionales.

Es importante tener en cuenta que no siempre el resultado es un número natural, por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \text{ de } 76 = \frac{3 \times 76}{5} = \frac{228}{5} = 45\frac{3}{5}$$

EJEMPLO

En el colegio, $\frac{3}{4}$ de los 1.200 estudiantes practican algún deporte.

¿Cuántos estudiantes practican algún deporte?

Se calculan los $\frac{3}{4}$ de 1.200 así:

$1.200 \div 4 = 300$, $300 \times 3 = 900$

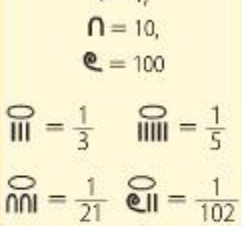
Luego, 900 estudiantes practican algún deporte.

Historia de las matemáticas

Los egipcios y las fracciones

Según evidencias encontradas en excavaciones hechas en los siglos XIX y XX, se sabe que los egipcios antiguos fueron los primeros en utilizar las fracciones.

Ellos solo usaban fracciones cuyo numerador era el 1; es decir, fracciones de la forma 1/*n*, por lo cual, se tiene claridad de que no tenían noción del concepto de número mixto.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono · **S** Soluciono problemas

Escribe una fracción que cumpla con las condiciones dadas.

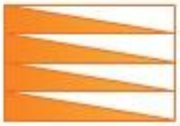
1. El numerador de la fracción es la tercera parte del denominador.

2. El numerador es menor que el denominador en 5 unidades.

3. El denominador es menor que el numerador en 8 unidades y la suma de los dos números es 22.

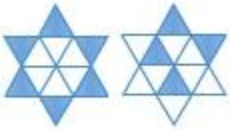
E **Escribe la fracción que está representada en cada gráfico.**

4.



7.

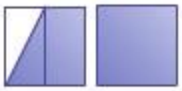
5.



8.

6.

9.



E **Elabora un gráfico adecuado para representar cada una de las siguientes fracciones.**

10. $\frac{7}{5}$

11. $\frac{4}{9}$

12. $\frac{12}{3}$

13. $\frac{9}{4}$

14. $\frac{3}{11}$

15. $\frac{25}{8}$

R **En cada caso realiza el dibujo que represente la fracción indicada.**

16. Si  es la unidad, representa $\frac{7}{2}$.

17. Si  es la unidad, representa $\frac{17}{4}$.

18. Si  es $\frac{1}{4}$ de unidad, representa la unidad.

19. Si  es la unidad, representa $\frac{3}{4}$.

Responde las siguientes preguntas y justifica tu respuesta.

20. ¿En un fraccionario el denominador no puede ser cero?

21. ¿El cero se puede escribir como fraccionario?

22. ¿El resultado de usar una fracción como operador puede ser otra fracción?

S **Resuelve.**

23. En una baraja de 52 cartas, ¿qué fracción representan los ases?

24. ¿Qué fracción representan las cartas que tienen corazones?

25. ¿Qué fracción representan las figuras en la baraja?

26. María debe caminar 25 km; hasta ahora ha recorrido $\frac{3}{5}$ del camino. ¿Qué distancia le falta por caminar?

27. La edad de Claudia es $\frac{5}{6}$ de la edad de Felipe. ¿Cuánto suman las dos edades si Felipe tiene 42 años?

28. Para su cumpleaños, Mauricio compró 3 tortas y las repartió en partes iguales entre sus 24 invitados. ¿Qué fracción de pastel representa la parte que recibió cada invitado?

29. En un colegio de 1.200 estudiantes, los $\frac{5}{8}$ practican algún deporte, ¿Cuántos estudiantes no hacen deporte?

30. **Plantea dos ejemplos de uso de cada uno de los significados que tiene una fracción.**

S **Resuelve con ayuda de un gráfico.**

31. ¿Qué parte es 7 de 28?

32. Marcela hace una tarea en 3 horas. ¿Qué parte de la tarea hace en una hora?

33. Un obrero hace $\frac{1}{7}$ de una obra en un día. ¿En cuánto tiempo hará toda la obra?

Lo que viene...

En las siguientes páginas conocerás las diferentes clases de fracciones. Responde ¿cuál es la diferencia entre una fracción propia y una fracción impropia?

1.3 Clases de fracciones

Las fracciones se pueden clasificar de acuerdo con el valor que tiene el numerador y el valor que tiene el denominador. Esta clasificación es la siguiente:

- Las **fracciones propias** son las que representan un número menor que la unidad y se caracterizan porque el numerador es menor que el denominador. Por ejemplo $\frac{2}{7}$, $\frac{11}{27}$ o $\frac{34}{1.531}$.
- Las **fracciones unidad** son las que representan una unidad completa y se reconocen fácilmente porque el numerador y el denominador tienen el mismo valor. Por ejemplo $\frac{7}{7}$, $\frac{11}{11}$ o $\frac{1.578}{1.578}$.
- Las **fracciones impropias** son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador y no es múltiplo de este; en tal caso, el número representa más de una unidad completa. Son algunos ejemplos de ellas $\frac{12}{7}$, $\frac{31}{13}$ o $\frac{4.834}{753}$.
- Las **fracciones enteras** o aparentes son aquellas cuyo numerador es múltiplo del denominador. En estos casos, la fracción representa un número exacto de unidades completas. Por ejemplo $\frac{21}{7}$ corresponde al número 3, ya que 21 dividido entre 7 es 3.

Recuerda que...

Un número natural a es múltiplo de otro número natural b si existe un tercer número natural c tal que

$$b \times c = a$$

Por ejemplo,

45 es múltiplo de 9 porque existe el número 5, tal que

$$9 \times 5 = 45$$

EJEMPLOS

1. En la clase de matemáticas, la profesora pide a sus estudiantes escribir una fracción impropia cuyo numerador sea el triple del denominador aumentado en 5 unidades. Sara responde que es imposible que dicha fracción sea impropia. Explicar por qué la afirmación de Sara es incorrecta.

La fracción planteada por la profesora puede tener muchas soluciones.

Supongamos que el denominador de la fracción fuera 6, el numerador debe ser $6 \times 3 + 5 = 23$.

Luego, una posible fracción es $\frac{23}{6}$.

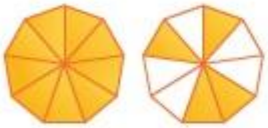
$\frac{23}{6}$ es una fracción impropia, ya que el numerador es mayor que el denominador, por lo cual podemos concluir la afirmación de Sara es incorrecta.

2. En cada salto un venado avanza $\frac{7}{8}$ metro, ¿este salto es mayor o menor que un metro?

El salto de un venado está representado por una fracción propia. Por ello, el salto es menor que un metro.

3. Indicar la clase de fracción que está representada en cada gráfico.

a. $\frac{13}{9}$



Es una fracción impropia.

b. $\frac{6}{6}$

Es una fracción igual a la unidad.

c. $\frac{1}{2}$

Es una fracción propia.

d. $\frac{12}{4} = 3$

Es una fracción entera.

1.4 Números mixtos

Como todas las fracciones impropias representan más de una unidad completa, se pueden representar como la suma de un número natural y un fraccionario. Por ejemplo, la fracción $\frac{9}{5}$ se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

Esto permite observar que $\frac{9}{5}$ corresponde a 1 unidad completa y $\frac{4}{5}$ de otra unidad, es decir:

$$\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}, \text{ lo cual se puede escribir como } 1\frac{4}{5}.$$

A una expresión formada por una parte entera y una parte fraccionaria se le llama **número mixto**.

Conversión de una fracción a número mixto

Para convertir una fracción impropia a un número mixto, se deben realizar los siguientes pasos:

- **Primero,** se divide el numerador de la fracción entre el denominador.
- **Segundo,** se determina el cociente y el residuo de la división anterior.
- **Finalmente,** se escribe la fracción como un número mixto, tomando como parte entera el cociente de la división y como parte fraccionaria, la fracción propia que tiene como numerador el residuo de la división y como denominador el mismo denominador de la fracción original.

Conversión de un número mixto a fracción

Para convertir un número mixto en una fracción impropia se debe multiplicar la parte entera por el denominador del fraccionario que conforma el número mixto, y a este resultado, se le suma el numerador de la fracción.

Este valor es el numerador de la fracción impropia; el denominador corresponde al mismo denominador de la fracción inicial en el número mixto.

EJEMPLOS

Resolver las siguientes situaciones.

1. **En una ferretería se encuentran 23 frascos de laca de un cuarto de galón cada uno.**

   ¿Cuántos galones completos se pueden llenar?

La laca que hay corresponde a $\frac{23}{4}$.

Esta fracción se debe convertir a mixto, para lo cual se debe realizar la operación 23 dividido 4 cuyo cociente es 5 y su residuo es 3.

Luego el número mixto es $5\frac{3}{4}$, por tanto, se pueden llenar 5 galones completos de laca.

2. **En una distribuidora de implementos de aseo se compran 8 galones y $\frac{5}{7}$ de galón de limpiador para pisos.**

   ¿Qué fracción impropia representa la cantidad de limpiador comprado?

El número $8\frac{5}{7}$, se debe escribir como fracción así:

$$8\frac{5}{7} = \frac{8 \times 7 + 5}{7} = \frac{61}{7}$$

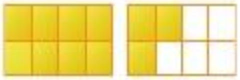
Luego, el fraccionario que representa la cantidad de galones de limpiador que se compraron es $\frac{61}{7}$.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto · A Argumento · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

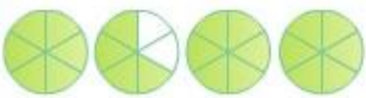
I Expresa como un número mixto la fracción representada en cada gráfico.

34.



35.

36.



37.

E 38. Completa la siguiente tabla.

Fracción	Numerador	Denominador	Mixto
$\frac{113}{24}$			
$\frac{19}{8}$			
$\frac{117}{7}$			
$\frac{49}{9}$			
$\frac{21}{5}$			

E Escribe las fracciones impropias como número mixto y los números mixtos como fracciones impropias.

39. $\frac{25}{8}$

40. $4\frac{2}{11}$

41. $\frac{207}{8}$

42. $6\frac{6}{13}$

43. $\frac{100}{17}$

44. $7\frac{3}{13}$

45. $\frac{47}{7}$

46. $7\frac{1}{5}$

47. $9\frac{5}{9}$

A Escribe F, si la afirmación es falsa o V, si es verdadera. Explica tu respuesta.

48. Existen números mixtos que no se pueden escribir como fracción. ( )

49. El número $8\frac{3}{4}$ corresponde al número mixto obtenido de la fracción $\frac{39}{4}$. ( )

50. Hay fracciones propias que se pueden escribir como números mixtos. ( )

51. Toda fracción entera se puede considerar como fracción impropia. ( )

R Escribe en cada espacio la palabra correcta.

52. Todas las fracciones ____________ se encuentran entre el cero y el uno, mientras que las fracciones ____________, las cuales permiten obtener números ____________ son siempre ____________ que la unidad.

S Resuelve.

53. Para preparar un vaso de jugo se necesitan $\frac{13}{4}$ de naranjas. ¿Cuántas naranjas enteras son?

54. ¿Cuántas naranjas enteras se necesitan para preparar 8 vasos de jugo?

55. María recibió dos pizzas divididas en seis porciones cada una y se comió una porción. ¿Qué número mixto representan las porciones de pizza que sobraron?

56. Diana compró 5 libras y cuarto de maíz para elaborar una torta. ¿Qué fracción impropia representa la cantidad de maíz que compró Diana?

57. Luis recorre $\frac{16}{3}$ de km para ir de su casa al museo. ¿Cuántos km completos recorre Luis en ese trayecto?

S De un grupo de 32 estudiantes, 18 son mujeres. A 7 de los varones les gusta el rock; $\frac{1}{3}$ de las mujeres usa la ruta escolar; $\frac{2}{9}$ de las mujeres usan transporte privado y el resto de ellas va caminando.

58. ¿Qué fracción de los estudiantes son varones?

59. ¿Cuántas mujeres usan la ruta escolar?

60. ¿A qué fracción de los varones no le gusta el rock?

61. ¿Cuántas mujeres van caminando?

Lo que viene...

En las siguientes páginas aprenderás a representar fracciones en la recta numérica. Consulta: ¿cómo se representa una fracción impropia en la recta?

1.5 Representación de fracciones sobre la recta numérica

Actividad

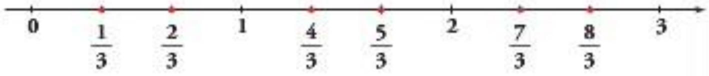
Para representar una fracción sobre una recta numérica, se deben seguir los siguientes pasos:

Primero, se ubica el número 0 en la recta numérica y se localizan los números naturales que se consideren necesarios.

Segundo, se determina qué clase de fracción es.

- En el caso de ser una fracción unidad o entera, se ubica la fracción sobre el número natural correspondiente.
- Si la fracción es propia, se divide el segmento entre cero y uno en tantas partes iguales como lo indica el denominador. Luego, se cuenta a partir del 0, la cantidad de partes que indica el numerador de la fracción para así marcar el punto. Dicho punto, es la representación de la fracción sobre la recta numérica.
- En el caso de ser una fracción impropia se puede expresar como un número mixto. Posteriormente, se ubica el número natural correspondiente a la parte entera y, en la unidad siguiente, se ubica la fracción propia del número mixto de la misma manera que en el caso anterior.

Observa la recta numérica con los números que se representaron en ella.



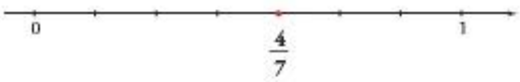
EJEMPLOS

1. **Las medidas $\frac{7}{7}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{19}{5}$ corresponden a la longitud de algunos soportes para una estructura. El diseñador considera necesario representarlas en la recta numérica para plantear una escala adecuada para los planos de construcción.**

   ¿Cómo le quedarían representadas estas medidas al diseñador en la recta numérica?

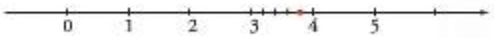
$\frac{7}{7}$ es una fracción unidad cuya ubicación coincide con el número 1.

Para ubicar la fracción $\frac{4}{7}$ se debe dividir el segmento entre 0 y 1 en 7 partes iguales, para lo cual se deben realizar 6 cortes. Luego, se cuentan cuatro de esos cortes empezando por el número siguiente al 0.



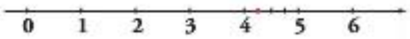
El número $\frac{19}{5}$, se debe escribir como número mixto, así $3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$.

Luego, se divide el segmento entre 3 y 4 en cinco partes iguales y se toman 4 de ellas.



2. **Escribir y clasificar la fracción representada en cada gráfico y clasificarla.**

La fracción es $\frac{5}{8}$ y es propia por estar entre 0 y 1.



La fracción es impropia y corresponde a $4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$.

1.6 Fracciones equivalentes

Actividad

Ampliación multimedia

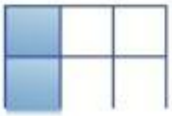
Recurso imprimible

Dos fracciones son **equivalentes** si representan la misma porción de la unidad, por tanto al ser representadas sobre la recta numérica, corresponden al mismo punto.

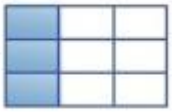
Por ejemplo $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$ son fracciones equivalentes, ya que representan la misma porción de la unidad como se observa a continuación:

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{6}$



$\frac{3}{9}$



Para verificar que dos fracciones son equivalentes basta con multiplicar el numerador de una de ellas por el denominador de la otra y viceversa. En los dos casos el resultado de dicho producto debe ser el mismo.

Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$ son equivalentes ya que $1 \times 12 = 4 \times 3$.

$$12 = 12$$

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si se cumple que $a \times d = c \times b$.
Cuando esta particularidad se cumple se puede escribir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Complificación de fracciones

La **complificación** de una fracción se realiza al multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número natural.

Al realizar el proceso de complificación se obtiene una fracción equivalente a la fracción inicial. Por ejemplo, si se toma la fracción $\frac{3}{7}$ y se complifica por 5 se tiene que:

$$\frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{15}{35}$$

$\frac{3}{7}$ y $\frac{15}{35}$ son fracciones equivalentes, lo cual se representa $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$.

Simplificación de fracciones

Actividad

La **simplificación** de una fracción se logra cuando se divide el numerador y el denominador de la fracción entre un mismo número natural.

Al realizar el proceso de simplificación, tantas veces como sea posible, se obtiene una fracción equivalente a la original que se llama **irreducible**.

Por ejemplo, $\frac{27}{45}$ se puede simplificar entre 9, lo cual permite obtener la fracción $\frac{3}{5}$, ya que $\frac{27}{45} = \frac{27 \div 9}{45 \div 9} = \frac{3}{5}$.

Otra forma para simplificar puede ser la siguiente:

$\frac{27}{45} = \frac{27 \div 3}{45 \div 3} = \frac{9}{15}$ y $\frac{9}{15} = \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5}$.

Historia de las matemáticas

Fracciones en la música

Se dice que Pitágoras, en el año 580 a. C. en la antigua Grecia, generó una escala musical al hacer fracciones de una cuerda tensionada. Dichas fracciones de cuerda producían sonidos agradables a los que se conoce como armónicos.

Recurso imprimible

1.7 Relación de orden en las fracciones

Actividad

Al comparar dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ solo puede darse una de las siguientes posibilidades:

- $\frac{a}{b}$ es mayor que $\frac{c}{d}$, lo cual se simboliza como $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
- $\frac{a}{b}$ es menor que $\frac{c}{d}$, lo cual se simboliza como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
- $\frac{a}{b}$ es igual a $\frac{c}{d}$, lo cual se simboliza como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Para determinar la relación de orden entre dos fracciones resulta útil comparar los productos cruzados, en forma similar a como se hace en la de fracciones equivalentes para los cuales se tienen en cuenta las siguientes condiciones:

- $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $a \times d > c \times b$.

  Por ejemplo, $\frac{3}{8} > \frac{2}{7}$ porque $3 \times 7 > 2 \times 8$
- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $a \times d < c \times b$.

  Por ejemplo, $\frac{15}{4} < \frac{13}{2}$ porque $15 \times 2 < 13 \times 4$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \times d = c \times b$.

  Por ejemplo, $\frac{9}{7} = \frac{18}{14}$ porque $9 \times 14 = 18 \times 7$

Cuando se desean ordenar varias fracciones primero se complifican todas de tal manera que queden con un mismo denominador.

Posteriormente, se organizan teniendo en cuenta el orden de los numeradores.

Recuerda que...

Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ entonces, al ser representadas en la recta numérica, la fracción $\frac{a}{b}$ quedará a la derecha de la fracción $\frac{c}{d}$.

EJEMPLOS

1. En la siguiente tabla se representan los kilómetros recorridos por dos atletas durante dos días de entrenamiento:

Atleta	Lunes	Miércoles
Darío	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{18}$
Manuel	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{7}$

Determinar qué atleta recorrió la mayor distancia cada día.

Al realizar las multiplicaciones requeridas se obtiene:

$8 \times 8 > 5 \times 5$, luego, $\frac{8}{5} > \frac{5}{8}$ Darío recorrió más distancia el lunes.

$5 \times 7 < 18 \times 4$, luego, $\frac{5}{18} < \frac{4}{7}$ Manuel recorrió más distancia el miércoles.

2. Ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones $\frac{3}{4}, \frac{11}{6}, \frac{7}{8}$ y $\frac{5}{12}$.

Primero, se busca el mcm de los denominadores, que en este caso es 24.

$$\text{mcm } (4, 6, 8, 12) = 24$$

Luego, se complifica cada fracción para que su denominador sea 24.

$$\frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24} \qquad \frac{11 \times 4}{6 \times 4} = \frac{44}{24}$$

$$\frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24} \qquad \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{10}{24}$$

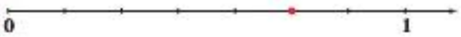
Así, $\frac{10}{24} < \frac{18}{24} < \frac{21}{24} < \frac{44}{24}$

Por tanto, el orden es $\frac{5}{12} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{11}{6}$

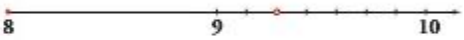
Afianzo COMPETENCIAS

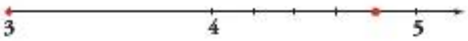
Interpreto • Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

Escribe la fracción representada en cada gráfica.

62.


63.


64.


65.


E **Escribe <, >, o = según corresponda. Luego, representa cada par de fracciones en la recta numérica.**

66. $\frac{7}{5} \square \frac{11}{6}$

67. $\frac{72}{13} \square \frac{216}{52}$

68. $\frac{7}{18} \square \frac{56}{96}$

69. $\frac{9}{12} \square \frac{3}{4}$

70. $\frac{55}{30} \square \frac{12}{6}$

71. $\frac{2}{7} \square \frac{1}{4}$

E **72. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor.**

$\frac{13}{5}, \frac{7}{3}, \frac{1}{2}, \frac{23}{4}, \frac{5}{7}$

R **Escribe el valor que hace que las fracciones sean equivalentes.**

73. $\frac{27}{6}$ y $\frac{9}{?}$

74. $\frac{28}{49}$ y $\frac{?}{7}$

75. $\frac{9}{?}$ y $\frac{72}{96}$

Responde y justifica.

76. ¿Es posible que dos fracciones sean equivalentes y al ubicarlas en la recta numérica queden en puntos diferentes?

77. ¿Si un fraccionario es mayor que otro es porque es impropio?

78. ¿Dos fracciones equivalentes con diferente denominador no pueden tener el mismo numerador?

E **Representa cada una de las siguientes fracciones en la recta numérica e indica si es propia o impropia. Utiliza una recta en cada caso.**

79. $\frac{25}{8}$

80. $\frac{4}{5}$

81. $\frac{3}{7}$

82. $\frac{17}{3}$

83. $\frac{5}{9}$

84. $\frac{1}{4}$

S **Resuelve los siguientes problemas.**

85. Cada color de este tiro al blanco representa un puntaje diferente así: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, 1 y $\frac{1}{3}$. Ubica cada fracción en el lugar que corresponda, teniendo en cuenta que el puntaje mayor debe quedar en el centro y el menor en el borde.

86. Luisa bebe $\frac{5}{3}$ litros de limonada al día mientras que su hermano mayor bebe $\frac{3}{4}$ litros de jugo de naranja, ¿quién consume más jugo?

Carlos estudia $\frac{4}{3}$ de hora al día y su hermana $\frac{15}{6}$ de hora.

87. ¿Cuál de los dos estudia más?

88. Si ambos empiezan a estudiar a las 8:15 a. m, ¿a qué hora termina cada uno?

89. Escribe las cantidades de tiempo en minutos.

En el mercado se venden diferentes llaves para múltiples usos. Estas llaves se clasifican dependiendo de su tamaño, el cual se mide con referencia a la pulgada.

90. Ordena de menor a mayor las llaves cuyas medidas son $\frac{11}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$ y 1 pulgada.

91. Establece la medida de una llave que esté entre la de $\frac{11}{16}$ y $\frac{7}{8}$ de pulgada.

92. Cuatro amigas fueron a un restaurante a cenar. Al recibir la cuenta observan que Angélica paga $\frac{1}{10}$, Tania $\frac{2}{5}$, Sofía $\frac{3}{8}$ y Natalia $\frac{1}{8}$. ¿Quién pagó más?

Lo que viene...

En las siguientes páginas aprenderás suma y resta de fracciones. Averigua cómo se restan fracciones de igual denominador.

Ampliación multimedia
Actividad

2. Operaciones entre fracciones

Entre las fracciones se pueden realizar las mismas operaciones planteadas con los números naturales. Además, cumplen las propiedades para las operaciones entre números naturales.

Recuerda que…

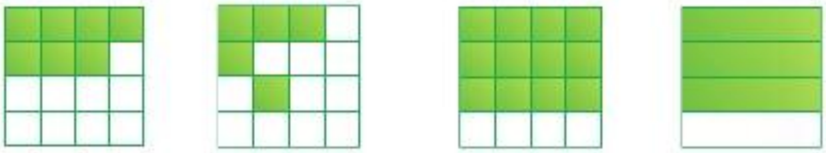
Para sumar o restar números mixtos, estos se deben convertir en fracciones impropias y se deben realizar las operaciones como fracciones normales.

2.1 Adición y sustracción de fracciones

Recurso imprimible

Para sumar o restar dos o más fracciones con el mismo denominador (fracciones homogéneas), basta con sumar o restar los numeradores de las fracciones, dejando el mismo denominador. Si la fracción resultante se puede simplificar, esta debe expresarse como fracción irreducible. Por ejemplo,

$$\frac{7}{16} \quad + \quad \frac{5}{16} \quad = \quad \frac{12}{16} \quad = \quad \frac{3}{4}$$



De otro lado, para sumar o restar fracciones con diferente denominador (fracciones heterogéneas) se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se busca un denominador común para todas las fracciones, el cual corresponde al mínimo común múltiplo de los denominadores de dichas fracciones.
- **Posteriormente,** se complifica cada una de las fracciones de tal manera que todas queden con el denominador que se encontró en el paso anterior.
- **Luego,** se suman o restan las fracciones homogéneas que se han obtenido, es decir, se suman o restan los numeradores encontrados, se deja como denominador el denominador común.
- **Finalmente,** se simplifica el resultado obtenido, si es posible.

EJEMPLO

Un frasco contiene $\frac{9}{24}$ kg de sodio. Si se usaron $\frac{3}{18}$ kg de sodio para producir una solución salina, ¿cuánto sodio quedó en el frasco?

Para resolver esta situación se realiza la siguiente resta $\frac{9}{24} - \frac{3}{18}$. Para ello, primero se busca el mcm entre 24 y 18.

$$\begin{array}{cc|c} 24 & 18 & 2 \\ 12 & 9 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

mcm (28, 18) = $2^3 \times 3^2 = 72$

Como el mínimo común múltiplo es 72, se debe complificar cada fracción para que el denominador sea este valor.

$$\frac{9}{24} = \frac{9 \times 3}{24 \times 3} = \frac{27}{72}$$

$$\frac{3}{18} = \frac{3 \times 4}{18 \times 4} = \frac{12}{72}$$

Por lo tanto, la operación que se debe realizar es:

$$\frac{27}{72} - \frac{12}{72}$$

$$\frac{27}{72} - \frac{12}{72} = \frac{27 - 12}{72} = \frac{15}{72}$$

$$\frac{15 \div 3}{72 \div 3} = \frac{5}{24}$$ Esta fracción se puede simplificar entre 3.

Por tanto, quedaron $\frac{5}{24}$ kg de sodio en el frasco.

2.2 Operaciones combinadas

Para resolver expresiones en las que se incluyen sumas y restas de fracciones es necesario seguir algunos pasos fundamentales:

- **Primero,** si la expresión tiene números mixtos, estos se deben transformar en fracciones impropias.
- **Segundo,** se debe expresar cada fracción con un común denominador. Es decir, se debe complificar cada fracción para que queden con el mismo mínimo común múltiplo de los denominadores.
- **Luego,** se resuelve la suma o resta de fracciones teniendo en cuenta que cada numerador conserva el mismo signo de la fracción en que se encuentra.
- **Finalmente,** se simplifica si es posible.

Si la expresión tiene signos de agrupación, estos se deben eliminar y se resuelven las operaciones dentro de ellos.

EJEMPLOS

1. En un ejercicio de las olimpiadas matemáticas de un colegio, piden encontrar la parte entera de la respuesta a la expresión.

$$\frac{6}{7} + \frac{9}{14} - \frac{3}{10}$$

Primero, se busca el denominador común.

$$\begin{array}{ccc|c} 7 & 14 & 10 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{mcm } (7, 14, 10) = 70$$

Como el mcm de los denominadores es 70, se complifica cada fracción para que quede con ese denominador:

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 10}{7 \times 10} = \frac{60}{70}$$

$$\frac{9}{14} = \frac{9 \times 5}{14 \times 5} = \frac{45}{70}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{3 \times 7}{10 \times 7} = \frac{21}{70}$$

Luego, se realiza la operación entre las fracciones obtenidas

$$\frac{6}{7} + \frac{9}{14} - \frac{3}{10} = \frac{60}{70} + \frac{45}{70} - \frac{21}{70}$$

$$= \frac{84}{70}$$

Finalmente, se escribe $\frac{84}{70}$ como un número mixto de modo que se obtiene $1\frac{14}{70} = 1\frac{1}{5}$, luego la parte entera es 1.

2. Resolver la expresión $\left(\frac{5}{3} + 2\frac{1}{5}\right) - \left(3 - \frac{7}{15}\right)$

Se debe resolver la operación indicada en cada paréntesis.

$$\left(\frac{5}{3} + \frac{11}{5}\right) - \left(\frac{3}{1} - \frac{7}{15}\right)$$

Se convierte el mixto a fracción.

$$= \left(\frac{25}{15} + \frac{33}{15}\right) - \left(\frac{45}{15} - \frac{7}{15}\right)$$

Se busca el mcm de los denominadores y se complifica.

$$= \frac{58}{15} - \frac{38}{15}$$

Se resuelven las operaciones en cada paréntesis.

$$= \frac{20}{15}$$

Se resuelve la resta.

La respuesta $\frac{20}{15}$ se puede simplificar dividiendo el numerador y el denominador de la fracción entre 5, así:

$$\frac{20 \div 5}{15 \div 5} = \frac{4}{3}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • S Soluciono problemas

Completa.

93. La ____________ es el proceso usado para buscar el denominador común de dos fracciones heterogéneas.

94. Para obtener el valor por el cual se debe complificar cada una de las fracciones heterogéneas que se van a ____________ o a ____________ se debe dividir el ____________ de los denominadores entre cada ____________.

E **Realiza las siguientes operaciones.**

95. $\frac{3}{5} + \frac{11}{4} + 2\frac{3}{10}$

96. $8 + \frac{5}{9} - \frac{1}{6} - 2$

97. $6\frac{3}{4} - \frac{11}{4} - 1\frac{2}{5}$

98. $\frac{16}{7} + 2\frac{5}{14} - 4\frac{1}{2}$

E **99. Completa la tabla. Para ello, ten en cuenta que la fracción que debes escribir en cada casilla corresponde a la suma de las fracciones de las casillas en la fila y en la columna respectivas.**

+	$\frac{13}{4}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{14}$
$\frac{13}{4}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{11}{10}$		
			$\frac{47}{20}$	
4				

E **Resuelve las siguientes expresiones.**

100. $\left(2\frac{3}{5} + 3\frac{1}{2} - \frac{8}{3}\right) + \left(2\frac{3}{5} + 1\frac{5}{7} - \frac{11}{5}\right)$

101. $\left(\frac{18}{7} + 3 - \frac{5}{4}\right) + \left(1\frac{2}{7} + \frac{13}{7} - 2\frac{1}{7}\right)$

De un cilindro de gas se gastó, en la primera semana, $\frac{1}{5}$ parte; en la siguiente semana, $\frac{1}{7}$ y en la última semana, exactamente la mitad del cilindro.

102. ¿Se puede afirmar que la cantidad de gas que queda en el cilindro es mayor a la gastada en la segunda semana? Justifica tu respuesta.

S **Soluciona.**

Sofía camina $\frac{2}{3}$ km para ir de su casa al parque, $\frac{3}{14}$ km para ir del colegio al supermercado, $\frac{5}{2}$ km para ir del parque al colegio y $2\frac{5}{7}$ km para ir del supermercado a la casa.

103. ¿Cuál es la distancia que recorre Sofía de la casa al colegio pasando por el parque?

104. ¿Cuál es la distancia que recorre del colegio a la casa pasando por el supermercado?

105. ¿Qué camino es más corto?

106. Dibuja un mapa en el que representes los recorridos que hace Sofía.

Una máquina teje $\frac{1}{4}$ de una pieza de tela de 84 metros. Al día siguiente teje $\frac{2}{7}$ de la tela que queda.

107. ¿Que fracción de tela le quedan por tejer?

108. ¿Cuántos metros de tela le queda por tejer?

109. Ricardo deja de herencia $\frac{2}{3}$ de su hacienda a sus hijos, $\frac{1}{8}$ a una fundación para huérfanos y el resto, a un hospital. ¿Qué fracción representa la parte que deja Ricardo al hospital?

Juan sembró brócoli en $\frac{1}{6}$ de su huerta y zanahoria en $\frac{2}{3}$. En el resto, que son 42 metros cuadrados, sembró lechuga.

110. ¿Cuánto mide el terreno de la huerta?

111. Usando las fracciones $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$ y $\frac{5}{9}$, comprueba que se cumplen las propiedades conmutativa, asociativa y modulativa para la suma de fracciones.

Lo que viene...

En las siguientes páginas aprenderás a multiplicar fracciones. ¿Cómo se multiplica una fracción por un número natural?

2.3 Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones, se halla el producto de los numeradores, y el producto de los denominadores y luego, se simplifica el resultado obtenido. En general se puede expresar que:

Si a, b, c, d son números naturales, donde $b, d \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Por ejemplo, para multiplicar $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$ se debe realizar $\frac{1 \times 3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$.

En algunos casos es fácil representar gráficamente la multiplicación de fracciones. Por ejemplo, la operación $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ se puede representar como se ve en la siguiente gráfica:

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

En otros casos, se pueden simplificar las fracciones antes de realizar la multiplicación. Esto facilita las operaciones que se quieren realizar. Por ejemplo, para resolver la operación $\frac{15}{4} \times \frac{7}{10} \times \frac{8}{6}$ es mejor realizar la simplificación que se indica a continuación:

$\frac{15}{4} \times \frac{7}{10} \times \frac{8}{6}$ Se plantea la multiplicación.

$= \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} \times \frac{8}{6}$ Se simplifican 15 y 10 entre 5.

$= \frac{3}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{2}{6}$ Se simplifican 4 y 8 entre 4.

$= \frac{1}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{2}{2}$ Se simplifican 3 y 6 entre 3.

$= \frac{1}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{1}{1}$ Se simplifica entre 2.

Por tanto, al reducir la multiplicación se obtiene que $\frac{1}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{7}{2}$.

Inverso multiplicativo de una fracción

El **inverso multiplicativo de una fracción,** también conocido como **recíproco,** es la fracción que tiene por numerador el denominador de la primera fracción y por denominador, su numerador. Así,

Si $m, n \in \mathbb{N}$, con m y $n \neq 0$ entonces, el inverso multiplicativo de $\frac{m}{n}$ es $\frac{n}{m}$.

Si $a \in \mathbb{N}$ y $a \neq 0$ este se puede escribir como $\frac{a}{1}$ y su inverso será $\frac{1}{a}$.

Por ejemplo, el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$, el inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$ es $\frac{4}{1}$ o 4 y el inverso multiplicativo de 7 es $\frac{1}{7}$.

Recuerda que…

El producto de una fracción por su inverso multiplicativo, siempre da como resultado 1.

Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 9 es $\frac{1}{9}$ y se cumple que:

$9 \times \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$

El recíproco de $\frac{3}{7}$ es $\frac{7}{3}$ y

$\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{21}{21} = 1$

2.4 División de fracciones

Recurso imprimible

Para realizar la división de dos fraccionarios se debe resolver la multiplicación de la primera fracción (dividendo) por el recíproco de la segunda fracción (divisor).

Si a, b, c, d son números naturales, donde $b, c, d \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Recuerda que...

Otra forma para realizar división de fracciones es multiplicando los términos de los fraccionarios de manera cruzada, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Es importante tener en cuenta que si en la división aparece un número mixto, este se debe escribir como una fracción impropia y luego, realizar la operación indicada.

Por ejemplo, para resolver $\frac{5}{9} \div \frac{8}{7}$ se tiene que:

$\frac{5}{9} \div \frac{8}{7} = \frac{5}{9} \times \frac{7}{8}$ Pues $\frac{7}{8}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{8}{7}$.

$= \frac{35}{72}$ Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$\frac{35}{72}$ es una fracción irreducible, por lo tanto, esta es la respuesta a la operación planteada.

Fracciones complejas

Se denomina **fracción compleja** a una expresión cuyo numerador y denominador es un fraccionario. Para simplificar una fracción compleja se debe realizar la división que está indicada entre la fracción numerador y la fracción denominador. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$ es compleja.

EJEMPLOS

1. La rapidez de un objeto en movimiento se encuentra dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo empleado. Encontrar la rapidez de una patinadora que recorre $\frac{7}{5}$ de kilómetro en $\frac{3}{4}$ de hora.

Se divide $\frac{7}{5}$ entre $\frac{3}{4}$ así:

$\frac{7}{5} \div \frac{3}{4}$ Se plantea la división.

$= \frac{7}{5} \times \frac{4}{3}$ Se expresa la división como multiplicación.

$= \frac{28}{15}$ Se calcula el producto.

Por tanto, la rapidez de la patinadora es de $\frac{28}{15}$ kilómetros por hora.

2. Encontrar el resultado de la siguiente fracción compleja.

$$\frac{\frac{2}{5} \times \frac{8}{3}}{12}$$

$\frac{\frac{2}{5} \times \frac{8}{3}}{12} = \frac{\frac{2 \times 8}{5 \times 3}}{12}$ Fracción compleja dada.

$= \frac{\frac{16}{15}}{12}$ Se multiplican las fracciones del numerador.

$= \frac{16}{15} \div \frac{12}{1}$ Se plantea la división.

$= \frac{16}{15} \times \frac{1}{12}$ Se plantea la multiplicación por el inverso multiplicativo de la fracción.

$= \frac{16}{180}$

$= \frac{4}{45}$ Se simplifica.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Encuentra el valor de cada expresión.

112. $\frac{3}{5}$ de 25

113. $\frac{2}{3}$ de 144

114. $\frac{9}{4}$ de 64.000

115. $\frac{2}{3}$ de los $\frac{9}{10}$ de 15

116. $\frac{6}{5}$ de los $\frac{12}{36}$ de $\frac{10}{16}$

117. La mitad de $\frac{11}{3}$

Escribe los números que faltan para que la operación sea correcta.

118. $\frac{3}{4} \times \frac{9}{\square} = \frac{27}{32}$

119. $\frac{12}{5} \times \frac{\square}{7} = \frac{96}{35}$

120. $\frac{2}{\square} \times \frac{24}{7} = \frac{\square}{49}$

121. $\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{28}{45}$

122. $\frac{8}{3} \div \frac{\square}{2} = \frac{16}{27}$

123. $\frac{8}{9} \div \frac{5}{\square} = \frac{128}{45}$

124. $\frac{8}{15} \div \frac{\square}{\square} = \frac{72}{60}$

125. $\frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = \frac{8}{9}$

Realiza las operaciones indicadas.

126. $\dfrac{\frac{12}{5}}{4} \times \dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{5}{3}}$

127. $\dfrac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{24}{3}\right) \div \left[\frac{8}{9} \div \frac{1}{6}\right]}$

128. $3\frac{1}{2} \times 1\frac{9}{12} \times 1\frac{7}{8}$

129. $\left(3\frac{1}{5} \div 1\frac{9}{11}\right) \times \frac{7}{8}$

130. $\dfrac{\left[\frac{9}{22} \times \left(\frac{5}{8} \div \frac{1}{6}\right)\right]}{\left[\left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{10}\right) \div \frac{1}{8}\right]}$

131. $\dfrac{\frac{10}{12}}{3} \times \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}$

Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Luego, escribe un ejemplo que justifique tu respuesta.

132. Todo número natural tiene recíproco. ( )

133. La división entre fracciones es conmutativa. ( )

134. El inverso de un número primo siempre es una fracción propia. ( )

135. Una fracción compleja siempre es impropia. ( )

Resuelve.

136. La altura de un rectángulo es de 8 cm. Si la base mide dos quintos de la medida de la altura, ¿cuál es el área y el perímetro del rectángulo?

137. 120 fichas son la séptima parte de la fichas del juego de Leonardo. ¿Cuántas fichas tiene el juego en total?

138. En un frasco caben $\frac{2}{9}$ de litro de jarabe. ¿Cuántos frascos completos se pueden llenar con $5\frac{1}{2}$ litros?

Julieta está aprendiendo a preparar una torta especial y la receta dice que los ingredientes que necesita son:

$\frac{1}{3}$ de un paquete de 750 g de azúcar.

$\frac{3}{4}$ de un kilo de harina de trigo.

$\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de 250 g.

139. ¿Cuántos gramos pesará en total la torta si solo usa esos ingredientes?

140. ¿Cuánta harina se necesitará para preparar cinco tortas usando los mismos ingredientes?

141. Si en el supermercado cercano a la casa de Julieta solo venden la harina por libras, ¿cuántas libras de harina tendrá que comprar para las cinco tortas y cuánta harina le va a sobrar?

142. Elabora la receta que necesitaría Julieta para preparar una torta de las $\frac{3}{4}$ partes de la torta inicial.

2.5 Polinomios aritméticos con fracciones

Al igual que en las operaciones combinadas con números naturales, un **polinomio aritmético con fracciones** es una expresión en la cual aparecen diferentes operaciones para realizar.

Cuando se quiere simplificar un polinomio aritmético con fracciones, se debe tener en cuenta que:

Si hay operaciones entre paréntesis, se deben realizar primero, posteriormente, se realizan las multiplicaciones y las divisiones y, por último, las sumas o restas.

EJEMPLOS

Efectuar las operaciones indicadas en la siguiente expresión:

$$\frac{\left(1\frac{1}{4}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}\right)\times\left(\frac{35}{39}\div\frac{15}{3}\right)}{\dfrac{15}{13}}$$

Luego, simplificar, si es posible.

$$\frac{\left(1\frac{1}{4}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}\right)\times\left(\frac{35}{39}\div\frac{15}{3}\right)}{\dfrac{15}{13}}$$

Expresión planteada.

$$=\frac{\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}\right)\times\left(\frac{7}{39}\right)}{\dfrac{15}{13}}$$

Se convierte el número mixto a fracción y se resuelve la división en el segundo paréntesis.

$$=\frac{\left(\frac{75}{60}+\frac{6}{60}-\frac{16}{60}\right)\times\left(\frac{7}{39}\right)}{\dfrac{15}{13}}$$

Se busca el mcm y se complifican las fracciones.

$$=\frac{\left(\frac{65}{60}\right)\times\left(\frac{7}{39}\right)}{\dfrac{15}{13}}$$

Se resuelven las operaciones que están en el primer paréntesis.

$$=\frac{\left(\frac{7}{36}\right)}{\dfrac{15}{13}}$$

Se simplifica el numerador y se resuelve la multiplicación.

$$=\frac{7}{36}\div\frac{15}{13}$$

Se plantea la división.

$$=\frac{91}{540}$$

Se multiplica y se escribe el resultado.

Luego, se tiene que:

$$\frac{\left(1\frac{1}{4}+\frac{1}{10}-\frac{4}{15}\right)\times\left(\frac{35}{39}\div\frac{15}{3}\right)}{\dfrac{15}{13}}=\frac{91}{540}$$

2.6 Solución de problemas con fracciones que involucran las operaciones básicas

Recurso imprimible

Para resolver problemas en los que se requiere emplear operaciones con números fraccionarios es importante seguir los siguientes pasos:

- **Primero,** se lee el problema varias veces, hasta determinar claramente la información suministrada y los datos que se quieren averiguar.
- **Segundo,** se determinan las operaciones que se van a efectuar y lo que representa el resultado de cada una de esas operaciones.
- **Tercero,** se realizan las operaciones previstas.
- **Finalmente,** se analiza si el resultado obtenido es coherente con los datos planteados y se contesta la pregunta que se busca resolver.

EJEMPLOS

Solucionar los siguientes problemas.

a. Una etapa de una competencia de ciclismo tiene 429 km. El ciclista *A* lleva recorridos los $\frac{7}{11}$ del trayecto en el momento en el que el ciclista *B* ha recorrido los $\frac{8}{13}$ del mismo.

¿Cuál de los dos ciclistas va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?

Como la primera pregunta busca determinar quién ha recorrido la mayor distancia se deben comparar las fracciones.

Se realiza el proceso para determinar la relación de orden entre las fracciones $\frac{7}{11}$ y $\frac{8}{13}$:

$$7 \times 13 = 91 \text{ y } 8 \times 11 = 88$$

Como el resultado mayor es 91 y se obtuvo con el numerador 7, se puede afirmar que $\frac{7}{11} > \frac{8}{13}$, luego, el ciclista *A* va primero.

Para saber cuántos kilómetros lleva recorrido cada ciclista se debe usar la fracción recorrida por cada uno como operador del número de kilómetros de la etapa.

$\frac{7}{11} \times 429 = \frac{3.003}{11} = 273$ km recorridos por *A*.

$\frac{8}{13} \times 429 = \frac{3.432}{13} = 264$ km recorridos por *B*.

b. María mezcla dos galones y cuarto de pintura azul con $\frac{3}{5}$ de galón de pintura amarilla, para pintar su habitación de color verde.

¿Cuánta pintura tiene María para pintar? ¿Cuánta pintura le sobrará o le faltará si sabe que su habitación requiere 4 galones?

Para saber la cantidad de pintura que tiene, se deben sumar las cantidades de pintura que se van a mezclar.

La pintura azul es $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ galones

$\frac{9}{4} + \frac{3}{5} = \frac{45}{20} + \frac{12}{20} = \frac{57}{20} = 2\frac{17}{20}$ galones de pintura verde.

Se puede observar que hace falta pintura, y la cantidad se puede encontrar restando.

$4 - 2\frac{17}{20}$

$= \frac{4}{1} - \frac{57}{20}$ Se convierte el minuendo a fracción impropia.

$= \frac{80}{20} - \frac{57}{20}$ Se establece un denominador común.

$= \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$ Se efectúa la resta.

Luego, faltan $1\frac{3}{20}$ galones de pintura para acabar de pintar la habitación de María.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Observa la situación y responde.

143. ¿Qué fracción del queso se lleva el comprador?

144. ¿Cuántos kilos de queso le quedan al vendedor?

145. ¿Cuánto cuesta el queso que compró el señor?

Resuelve las operaciones y simplifica el resultado.

146. $\left(\frac{3}{10} + \frac{7}{18}\right) \times \left(\frac{12}{4} - \frac{7}{4}\right)$

147. $\dfrac{\frac{2}{17} \times \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\right)}$

148. $\dfrac{8 - \frac{4}{5} \times \frac{7}{4}}{\left(2\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{6}{7} + 2\right)}$

149. $\dfrac{2 \times \left(\frac{18}{7} - 1\frac{2}{3}\right)}{\left(2 - \frac{3}{5}\right) \div \frac{14}{5}}$

150. $\dfrac{\left(\frac{4}{3} + \frac{12}{21}\right) \div \left(\frac{7}{15} + \frac{7}{12}\right)}{\left(\frac{7}{4} \times \frac{2}{21}\right) + \left(\frac{5}{6} \div \frac{1}{5}\right)}$

151. $\dfrac{\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{21}\right) \div \left(2\frac{8}{9} - 1\frac{5}{8}\right)}{\frac{21}{2} \times \left(\frac{13}{7} \div \frac{3}{5}\right)}$

152. Un motociclista recorre 90 km en media hora; esta distancia corresponde a las $\frac{2}{3}$ partes de la distancia total que piensa recorrer. ¿Alcanzará a recorrer dicha distancia en una hora? Ten en cuenta que su velocidad es constante.

Calcula el valor de las siguientes expresiones sabiendo que $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 5$, $d = \frac{3}{8}$.

153. $a + b$

154. $(a + b) \times c + d$

155. $(a + b) \div d$

156. $(b + d) + (c \div d)$

157. $(a + b) + c$

158. $(b \times d) + (c \div d)$

159. $(a + b) \times (c + d)$

160. $(c + a - b) \div (b - d)$

161. $(b \div d) \div (c \div d)$

162. $(b \times d) \div (a + b)$

Resuelve las situaciones.

163. Un tanque tiene 350 litros de agua, lo cual equivale a los $\frac{5}{7}$ de su capacidad total. ¿Cuánta agua le cabe en total al tanque?

164. Los $\frac{3}{8}$ de un número son 48. Si multiplicamos el número inicial por $\frac{1}{3}$, ¿cuál es el resultado?

Un parque de forma rectangular tiene $\frac{3}{7}$ de km de ancho y $\frac{28}{15}$ de km de largo.

165. ¿Cuánto mide el área del parque?

166. ¿Qué distancia recorre Felipe si da 5 vueltas a ese terreno cada día?

167. ¿Cuántos kilómetros corre Felipe en los 7 días de la semana?

168. ¿Cuánta distancia le sobra o le falta recorrer a Felipe para lograr los $47\frac{1}{2}$ kilómetros previstos para su entrenamiento?

Formula una pregunta a partir de la información dada y luego resuélvela.

169. Mauricio camina media hora en la mañana, $1\frac{1}{4}$ horas en la tarde y $\frac{3}{4}$ de hora en la noche.

2.7 Potenciación de fracciones

Recurso imprimible

La **potenciación entre fracciones** es una operación que consiste en multiplicar por sí mismo el número de la base tantas veces como lo indica el exponente.

Sean a, b, c, d y $m \in \mathbb{N}$ con $b, d \neq 0$, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{m \text{ factores}} = \frac{a^m}{b^m} = \frac{c}{d}$$

EJEMPLOS

1. **Resolver las siguientes potencias.**

a. $\left(\frac{7}{3}\right)^4$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{3}$$
$$= \frac{7^4}{3^4} = \frac{2.401}{81}$$

por lo cual se puede escribir que

$$\left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{2.401}{81}$$

donde $\frac{7}{3}$ es la base, 4 es el exponente y $\frac{2.401}{81}$ es la potencia.

b. $\left(\frac{5}{1}\right)^3$

$$\left(\frac{5}{1}\right)^3 = \frac{5}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{5}{1}$$
$$= \frac{5^3}{1^3} = \frac{125}{1}$$
$$= 125$$

lo cual equivale a realizar 5^3.

2. **Responder, ¿$\frac{2^3}{5}$ es igual a $\left(\frac{2}{5}\right)^3$?**

Es importante tener presente que $\frac{2^3}{5}$ es diferente de $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, porque son operaciones con las que se obtienen diferentes resultados, pues:

$$\frac{2^3}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5} = \frac{8}{5}$$

ya que solamente el numerador está afectado por el exponente.

Cuando el fraccionario está entre paréntesis se resuelve:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$$

Por lo cual, para indicar la potenciación de un número fraccionario, es necesario escribirlo entre paréntesis.

2.8 Propiedades de la potenciación de fracciones

Las propiedades que cumple la potenciación de fracciones se pueden comprobar con base en las propiedades de la multiplicación y de la potenciación de números naturales y son las siguientes:

- **Producto de potencias de igual base**. Para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

  Simbólicamente se tiene que $\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$, donde $b \neq 0$

  Por ejemplo, $\left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 = \left(\frac{2}{7}\right)^{2+4} = \left(\frac{2}{7}\right)^6$

- **Cociente de potencias de igual base**. Para dividir potencias de igual base, se mantiene la misma base y se restan los exponentes.

  Simbólicamente se tiene que $\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$, donde $b \neq 0$ y $m > n$

  Es importante notar que la división se puede representar con el símbolo ÷ o en forma de fracción compleja.

  Por ejemplo, $\left(\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{5-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

- **Potencia de una potencia**. Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

  Simbólicamente, se tiene que $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \times n}$ donde $b \neq 0$

  Por ejemplo, $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^{5 \times 2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{10}$

- **Potencia de un producto**. La potencia de un producto es el producto de las potencias de cada una de las fracciones que se multiplican.

  Simbólicamente, se tiene que $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{c}{d}\right)^m$ donde b y $d \neq 0$

  Por ejemplo, $\left(\frac{11}{5} \times \frac{8}{9}\right)^4 = \left(\frac{11}{5}\right)^4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^4$

Potencias con 0 y 1

- Al igual que con los números naturales, toda fracción elevada al exponente cero da como resultado 1, excepto el cero, es decir:

  $$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1; (8)^0 = \left(\frac{8}{1}\right)^0 = 1$$

  El caso 0^0 no está definido. En general $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ si $\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$.

- Todo número elevado al exponente uno, da como resultado el mismo número. Por ejemplo:

  $$\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}; (8)^1 = \left(\frac{8}{1}\right)^1 = \frac{8}{1} = 8$$

  En general, $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$.

2.9 Radicación de fracciones

Al igual que para los números naturales, la **radicación entre fracciones** se puede interpretar como una operación inversa a la potenciación que permite hallar la base cuando se conocen el exponente y la potencia.

Para encontrar cualquier raíz de una fracción se debe hallar la raíz correspondiente del numerador y del denominador de la fracción.

Si a, b y $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 2$ con $b \neq 0$ entonces $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$$

La radicación entre fracciones cumple las mismas propiedades que la radicación entre números naturales, pero se dejará su comprobación como un ejercicio para esta sección.

EJEMPLOS

1. Usar las propiedades de la potenciación para hallar el resultado de la expresión

$$\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^6 \times \left(\frac{7}{5}\right)^7}{\left[\left(\frac{7}{5}\right)^2\right]^5 \times \left(\frac{7}{5}\right)^0}$$

En el numerador, se aplica la propiedad del producto de potencias de igual base.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^6 \times \left(\frac{7}{5}\right)^7 = \left(\frac{7}{5}\right)^{6+7} = \left(\frac{7}{5}\right)^{13}$$

En el denominador, se aplica la propiedad de potencia de una potencia.

$$\left[\left(\frac{7}{5}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{7}{5}\right)^{5 \times 2} = \left(\frac{7}{5}\right)^{10}$$

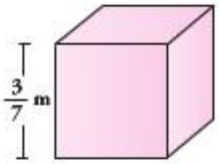
Además se tiene que $\left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1$, entonces, se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{13}}{\left(\frac{7}{5}\right)^{10} \times 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^{13}}{\left(\frac{7}{5}\right)^{10}}$$

$$= \left(\frac{7}{5}\right)^{13-10} = \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{343}{125}$$

2. Calcular el volumen de una caja cúbica que tiene $\frac{3}{7}$ de metro de arista.



Se usa la fórmula del volumen de un cubo $V = a^3$.

Se remplaza la arista del cubo por el valor conocido $\frac{3}{7}$.

$V = \left(\frac{3}{7}\right)^3$ lo cual se resuelve como

$V = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$ metros cúbicos

3. Encontrar el perímetro de un cuadrado cuya área es de $\frac{49}{36}$ m².

Como se conoce el área, se puede hallar la medida del lado del cuadrado sacando raíz cuadrada.

$$L = \sqrt{\frac{49}{36}}$$

$$= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \frac{7}{6}$$

El perímetro del cuadrado se obtiene multiplicando el lado por 4, así $4 \times \frac{7}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$ m es el perímetro.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

El área de un cuadrado se calcula mediante la expresión $A = l^2$, donde l representa la medida del lado. Hallar el área de un cuadrado si el lado mide:

170. $\frac{2}{3}$ cm **171.** $\frac{5}{4}$ cm **172.** $\frac{3}{2}$ cm

E **Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la potenciación y la radicación según corresponda.**

173. $\dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^3}{\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right)} =$ ____________

174. $\left(\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}\right)^2 =$ ____________

175. $\sqrt{\frac{7}{15}} \times \sqrt{\frac{12}{15}} \times \sqrt{\frac{12}{9}} \times \sqrt{7} =$ ____________

176. $\left(\dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^3}{\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right)}\right)^0 =$ ____________

177. $\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{15}} =$ ____________

178. $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 =$ ____________

179. $\sqrt[5]{\frac{3.125}{243}} =$ ____________

180. $\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{121}{27}}\sqrt{\frac{2}{15}} =$ ____________

R **Lucía afirma que:**

Al realizar la operación $\frac{4^2}{3}$, se obtiene $\frac{16}{9}$ y que el resultado de la potencia $\frac{3^2}{2} < \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

181. Encuentra el error que cometió Lucía en cada afirmación.

Responde las preguntas. Luego, escribe un ejemplo que justifique cada respuesta.

182. ¿Existe alguna fracción cuyo cuadrado es menor que ella?

183. ¿Existe un fraccionario tal que su raíz cúbica es mayor que su raíz cuadrada?

184. ¿En la propiedad del cociente de potencias el exponente del numerador debe ser menor que el exponente del denominador?

S **Resuelve las situaciones planteadas.**

185. Calcula el volumen de una caja cúbica que tiene $\frac{2}{3}$ de metro de lado.

Diana tiene $320.000 para dárselos a su hermana, pero decide entregarle cada $\frac{3}{5}$ del dinero que le queda del día anterior.

186. ¿Cuánto dinero le regala Diana a su hermana el primer día?

187. ¿Cuánto dinero le regala Diana a su hermana el tercer día?

188. ¿Cuánto dinero le regala Diana a su hermana el cuarto día?

189. Escribe, usando potenciación, una manera para calcular el dinero que regalará Diana a su hermana el séptimo día.

190. ¿Cuáles de los fraccionarios $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ o $\frac{1}{9}$ al ser ubicados en la casilla y realizar las operaciones indicadas dan como resultado un número natural?

$$36\square^2 + 12\square + 24$$

191. **Encuentra dos fraccionarios diferentes que cumplan la condición anterior.**

192. **Con base en las propiedades de la radicación de números naturales, escribe y da un ejemplo de cada una de las propiedades que se pueden presentar en la radicación de fraccionarios.**

Lo que viene...

En las páginas siguientes aprenderás a escribir las fracciones como números decimales. Escribe como decimal la fracción $\frac{7}{8}$.

3. Números decimales

Ampliación multimedia Recurso imprimible Actividad Enlace web

Los números decimales surgen de la necesidad de medir, de manera aproximada, cantidades continuas.

3.1 Fracción decimal

Una **fracción decimal** es un número fraccionario cuyo denominador es una potencia de 10, por ejemplo $\frac{2}{10}$, $\frac{7}{100}$ o $\frac{547}{1.000}$ entre muchas otras.

Las fracciones decimales se nombran según la potencia de 10 que represente su denominador, así

Fracción	$\frac{a}{10}$	$\frac{b}{100}$	$\frac{n}{1.000}$	$\frac{z}{10.000}$
Decimal	*a* décimos	*b* centésimos	*n* milésimos	*z* diezmilésimos

Las fracciones simplificadas cuyo denominador solo tiene a los números 2 o 5 como factores primos se pueden escribir como fracciones decimales. Para ello, se realiza la complificación que permite expresarlas con un denominador que sea potencia de diez. Por ejemplo:

- $\frac{3}{5}$ se puede amplificar por 2 y obtener $\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$ que corresponde a la fracción decimal seis décimos.
- $\frac{17}{20}$ se puede amplificar por 5 y obtener $\frac{17 \times 5}{20 \times 5} = \frac{85}{100}$ que corresponde a la fracción decimal 85 centésimos.

Historia de las matemáticas

Stevin y los decimales

Simón Stevin (1548-1620) nació en Brujas, Bélgica, conocido como uno de los primeros expositores de la teoría de las fracciones decimales en el opúsculo *De Thiende* (1585).

Hizo importantes aportes en su época en diversos campos del conocimiento como la astronomía y la física.

Recurso imprimible

3.2 Número decimal

La expresión **decimal de un número**, conocida comúnmente como **número decimal**, en general, se obtiene al realizar la división del numerador entre el denominador de una fracción decimal. Por ejemplo:

$\frac{12}{10}$ se puede escribir como 1,2.

$\frac{7}{10}$ se puede escribir como 0,7.

En todo número decimal se puede indentificar una parte entera y una parte decimal. Estas partes están separadas por una coma decimal. Por ejemplo,

$\frac{471}{100} = 4{,}71$

4 es la parte entera y 71 es la parte decimal.

Observa la tabla de posición para el número decimal 12,093.

Cifras enteras				Coma decimal	Cifras decimales			
Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
		1	2	,	0	9	3	

Actividad

Recurso imprimible

Conversión de fracción decimal a número decimal

Para convertir una fracción decimal a un número decimal se escribe el numerador de la fracción y en él se separan con una coma, de derecha a izquierda, tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador de la fracción. Si las cifras del numerador no son suficientes, se escriben a la izquierda del número, tantos ceros como sea necesario.

Por ejemplo, para escribir en expresión decimal $\frac{27}{10}$, $\frac{37}{100}$ y $\frac{53}{1.000}$ se realiza lo siguiente:

- $\frac{27}{10} = 2{,}7$ Como hay un cero en el denominador, queda una cifra a la derecha de la coma decimal.
- $\frac{37}{100} = 0{,}37$ Como hay dos ceros en el denominador, quedan dos cifras a la derecha de la coma decimal y se coloca un cero como parte entera.
- $\frac{53}{1.000} = 0{,}053$ Como hay tres ceros en el denominador, deben quedar 3 cifras a la derecha de la coma decimal; como el numerador sólo tiene dos cifras, se debe escribir un cero a la izquierda del 53.

Recuerda que…

Un aspecto que en ocasiones genera confusiones es que la coma decimal que se usa en nuestro país es remplazada por el punto decimal que se usa en los países anglo parlantes, por lo cual en las calculadoras normalmente se pone punto y no coma.

Por ejemplo, el número 18,27 en una calculadora se debe escribir 18.27.

Conversión de número decimal a fracción decimal

Ampliación multimedia

Para convertir un decimal a fracción decimal, se escribe como numerador el número decimal, a partir de su primera cifra diferente de cero sin la coma. Como denominador se escribe una potencia de diez que tenga tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

Por ejemplo, $73{,}8 = \frac{738}{10}$; $0{,}027 = \frac{27}{1.000}$; $1{,}08 = \frac{108}{100}$

Conversión de fracción a número decimal

Para convertir una fracción no decimal a número decimal, se divide el numerador entre el denominador. Para esto, se agrega al cociente una coma y al dividendo, tantos ceros como sean necesarios para continuar la división hasta que el residuo sea cero o empiece a repetirse. Este proceso también se puede usar con las fracciones decimales.

EJEMPLO

Expresar en decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{27}{4}, \frac{49}{3} \text{ y } \frac{29}{6}$$

Para obtener la expresión decimal se debe realizar la división sugerida por cada fracción:

$$\frac{27}{4} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 27 & 4 \\ \hline 30 & 6{,}75 \\ \;\;20 & \\ \;\;\;\;0 & \end{array}$$

Es importante anotar que se agrega el cero en el residuo a partir del momento en que se escribe la coma en el cociente.

En el caso de $\frac{49}{3}$ y $\frac{29}{6}$, el proceso es similar.

$$\frac{49}{3} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 49 & 3 \\ \hline 19 & 16{,}33 \\ \;\;10 & \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;1 & \end{array} \qquad \frac{29}{6} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 29 & 6 \\ \hline 50 & 4{,}833 \\ \;\;20 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

Como el residuo en ambos casos se está repitiendo, en la expresión decimal seguirá indefinidamente apareciendo el mismo número, por lo que

$\frac{49}{3} = 16{,}333... = 16{,}\overline{3}$

y $\frac{29}{6} = 4{,}833... = 4{,}8\overline{3}$

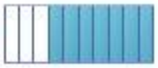
Afianzo COMPETENCIAS

Argumento · **E** **Ejercito** · **R** **Razono** · **S** **Soluciono problemas** · **Propongo**

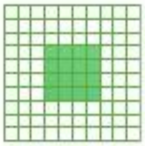
E **Determina el número decimal que representa cada gráfico.**

193.

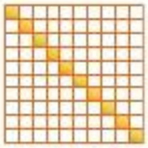
195.



194.



196.



E **197. Completa la tabla:**

Número decimal	Parte entera	Parte decimal	Lectura
6,12			
			12 unidades y 5 décimas
	12	123	
1,244			
			119 unidades, 48 milésimas
	0	94	
			3 enteros y 5 milésimos

E **Encuentra la expresión decimal de cada una de las siguientes fracciones.**

198. $\frac{5}{2}$ **200.** $\frac{55}{14}$ **202.** $\frac{8}{3}$

199. $\frac{8}{9}$ **201.** $\frac{8}{15}$ **203.** $\frac{17}{4}$

R **Escribe las palabras que corresponden para completar las frases.**

204. Tres unidades son _______ milésimas.

205. Una décima es igual a _______ centésimas y es igual a _______ milésimas.

206. Veintitrés milésimas son _______ centésimas que son _______ décimas.

R **Usa números decimales para expresar los siguientes tiempos en horas usando números decimales.**

207. 2 horas y cuarto **209.** 3 horas y media

208. 10 minutos **210.** 1 hora y 45 minutos

Responde. Luego, explica tu respuesta.

211. ¿40 puede ser el denominador de una fracción decimal?

212. ¿Un número natural es una fracción decimal?

213. ¿Todos los números decimales son fracciones decimales?

S **Resuelve las siguientes situaciones expresando el resultado en forma decimal y como fracción.**

214. La masa de las tres cajas es $\frac{2}{5}$, $\frac{18}{5}$ y $\frac{11}{4}$ de kg, respectivamente.

Expresa cada uno de estos datos en forma decimal.

215. María ha recorrido veinticinco centésimas de la longitud del camino de la casa al colegio. ¿Qué parte del camino le queda por recorrer, si la distancia entre el colegio y la casa es de 1.500 m?

S **Una prueba de inglés consta de 10 preguntas, 3 de escucha, 2 de gramática, 4 de interpretación de texto y una de vocabulario.**

216. ¿Qué número decimal relaciona el número de preguntas que no son de escucha con respecto al total de preguntas?

217. ¿Qué número decimal relaciona el número de preguntas de gramática con respecto a las de interpretación de texto?

Escribe dos ejemplos que cumplan cada una de las condiciones dadas.

218. Numero de tres cifras decimales donde la cifra de las décimas sea el triple de las centésimas.

219. Número cuya cifra de las centésimas sea la tercera parte de las milésimas.

220. Número donde las décimas sean el doble de las centésimas y las milésimas sean la tercera parte de las unidades.

Lo que viene...

En las siguientes páginas aprenderás cómo se clasifican los números decimales. Consulta: ¿cuándo un número decimal es periódico?

3.3 Clasificación de decimales

Ampliación multimedia

Recurso imprimible

La expresión decimal de un número fraccionario se clasifica en tres clases, según las cifras que aparecen después de la coma decimal.

- **Expresión decimal exacta:** es aquella que tiene una cantidad finita de cifras decimales. Se obtiene al convertir fracciones irreducibles cuyo denominador tiene como divisores primos solo a 2 o a 5.

  Por ejemplo: 0,37 es un decimal exacto porque tiene dos cifras decimales.

- **Expresión decimal periódica pura:** es aquella que tiene infinitas cifras decimales que se empiezan a repetir inmediatamente después de la coma decimal. Se obtiene al convertir fracciones irreducibles cuyo denominador tiene como divisores primos cualquier número diferente a 2 o a 5.

  Por ejemplo, algunos números que tienen expresiones decimales periódicas puras son 3,44444…; 0,37373737…; 58,3333333… o 149,307230723072…, entre muchos otros.

- **Expresión decimal periódica mixta:** es aquella que tiene infinitas cifras decimales que se empiezan a repetir pero no inmediatamente después de la coma decimal. Se obtienen al convertir fracciones irreducibles cuyo denominador tiene como divisores primos al 2 o al 5 y cualquier otro número primo.

  Por ejemplo, los números 0,27444…; 21,325757… o 5,81308308308… son decimales periódicos mixtos.

  Normalmente, un número periódico se escribe con una línea sobre las cifras decimales que se repiten en el número. Por ejemplo,

$$0{,}37373737\ldots = 0{,}\overline{37}$$

$$\text{o } 21{,}3257575757\ldots = 21{,}32\overline{57}$$

EJEMPLOS

Encontrar la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasificarlas según sus cifras decimales en exacta, periódica pura o periódica mixta.

a. $\frac{13}{9}$

Se realiza la división sugerida hasta que el residuo del numerador entre el denominador sea cero o empiece a repetirse:

$$\frac{13}{9} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 13 & 9 \\ \cline{2-2} 40 & 1{,}44\ldots \\ 40 & \\ 4 & \end{array}$$

Como el residuo se empezó a repetir se puede concluir que $\frac{13}{9} = 1{,}444\ldots = 1{,}\overline{4}$, que es una expresión decimal periódica pura.

b. $\frac{127}{4}$

$$\frac{127}{4} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 127 & 4 \\ \cline{2-2} 07 & 31{,}75 \\ 30 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, la división termina y se puede decir que $\frac{127}{4} = 31{,}75$ que es una expresión decimal exacta.

c. $\frac{7}{15}$

$$\frac{7}{15} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 7 & 15 \\ \cline{2-2} 70 & 0{,}466\ldots \\ 100 & \\ 100 & \\ 10 & \end{array}$$

Como se repite el residuo, el resultado es $0{,}4\overline{6}$ y es una expresión periódica mixta.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Ejercito · Soluciono problemas

Completa los enunciados.

221. En el número $8,275\overline{4}$ la expresión periódica comienza en la cifra de las ________ y corresponde al número ________, por lo cual es un número decimal ______________.

222. En el número $0,\overline{531}$ la expresión periódica comienza en la cifra de las ________ y corresponde al número ________, por lo cual es un número decimal ______________.

Observa las siguientes expresiones decimales y clasifícalas en exactas, periódicas puras o periódicas mixtas según corresponda.

223. $2,4\overline{7}$ **226.** 15,5757 **229.** 0,169

224. $31,\overline{1}$ **227.** 31,072 **230.** $13,0\overline{91}$

225. $108,\overline{86}$ **228.** 108,86 **231.** $108,8\overline{6}$

232. Encuentra la expresión decimal de cada fracción. Luego, marca con una ✗ la casilla en la tabla que corresponde a la clase de expresión decimal.

Fracción	Exp. decimal exacta	Exp. decimal periódica pura	Exp. decimal periódica mixta
$\frac{11}{42}$			
$\frac{15}{6}$			
$\frac{47}{15}$			
$\frac{19}{6}$			
$\frac{17}{4}$			

Juan va a recorrer 140 km; su amigo le dice que solo va a recorrer las $\frac{5}{6}$ partes de esa distancia. Juan dice que su amigo recorrerá menos de 90,5 km.

233. ¿Estás de acuerdo con lo que opina Juan? Explica tu respuesta.

____

____

Resuelve los siguientes problemas expresando el resultado como un número decimal.

Mariana compró un mantel por $10.800 y lo vendió por los $\frac{13}{7}$ del precio de costo.

234. ¿Qué fracción representa la ganancia que obtuvo Mariana?

235. ¿Cuánto dinero ganó en esta venta?

La siguiente tabla presenta el peso y la talla promedio que tienen los bebés en diferentes edades.

	Niños		Niñas	
Edad	Peso medio	Talla	Peso medio	Talla
Recién nacido	3,4 kg	$\frac{583}{10}$ cm	3,4 kg	50,3 cm
3 meses	$\frac{31}{5}$ kg	60 cm	$\frac{28}{5}$ kg	59 cm
6 meses	8 kg	67 cm	$\frac{73}{10}$ kg	65 cm
9 meses	9,2 kg	72 cm	8,6 kg	70 cm
12 meses	$\frac{51}{5}$ kg	76 cm	9,5 kg	74 cm
15 meses	11,1 kg	79 cm	11 kg	77 cm
18 meses	11,8 kg	$\frac{165}{2}$ cm	7.750	$\frac{161}{2}$ cm
2 años	$\frac{129}{10}$ kg	88 cm	$\frac{62}{5}$ kg	86 cm
3 años	151.10 kg	$\frac{193}{2}$ cm	$\frac{72}{5}$ kg	96 cm

Con base en la tabla anterior responde:

236. ¿Cuál es la diferencia entre el peso de un niño de tres meses y el peso de un niño de 3 años?

237. ¿Cuál es la diferencia entre el peso de un niño y una niña de 2 años?

238. Si una niña de 2 años pesa 10,5 kg, ¿qué se puede afirmar de su talla?

239. ¿Cuál es la diferencia entre la talla de una niña recién nacida y una niña de 3 años?

240. ¿Cuál es la diferencia entre la talla de un niño y la de una niña de 18 meses?

3.4 Orden en los números decimales

Actividades

Ordenar dos números decimales consiste en determinar cuál de ellos es mayor, o menor, o si son iguales.

Para ordenar dos números decimales se deben analizar los siguientes criterios:

- **Primero,** se comparan sus partes enteras y es mayor el número decimal que tiene mayor parte entera.

  5,37 < 6,378 porque la parte entera 5 es menor que 6.

- **Luego,** si las partes enteras son iguales, entonces, se debe comparar la parte decimal; para ello, se iguala la cantidad de cifras que tienen las partes decimales de los dos números completando con ceros. Posteriormente, se comparan estas partes decimales y será mayor la que represente un valor más grande. Por ejemplo, para comparar 8,72 y 8,702:

  Primero, se comparan las partes decimales completando la cantidad de cifras con ceros, lo cual permite obtener los números 8,720 y 8,702. Así, 720 > 702 por lo tanto 8,72 > 8,702

  Tambien, 9,5 = 9,50 ya que la parte entera de los dos números es igual y la parte decimal en ambos casos al igualarlas con ceros es 50.

EJEMPLOS

1. **En la vuelta clasificatoria de un premio del campeonato de Fórmula 1 se registraron los tiempos de seis competidores así:**

Piloto	Tiempo (s)
Oreste Mang	46,651
Fiel Daniel	46,173
Gustavo Matta	48,944
Laureano Caporali	46,78
Fabián Pérez	46,365
Flavio Soler	46,336

¿Quién se ubicará primero en la grilla de partida al día siguiente?

Como es una competencia, los tiempos se deben organizar de menor a mayor.

Los tiempos están medidos hasta en milésimas de segundo excepto 46,78 = 46,780.

El orden será:

46,173 < 46,336 < 46,365 < 46,651 < 46,78 < 48,944

Luego, el primero en salir será Fiel Daniel porque tuvo el menor tiempo.

2. **Carlos ordenó los números decimales dados, de mayor a menor, como se muestra a continuación:**

   7,35 > 7,09 > 7,7 > 6,13 > 6,02 > 6,2

   Sin embargo, su profesor le dice que ha cometido errores y que debe volver a ordenar los números. ¿Cuál es el orden adecuado?

Lo primero que Carlos debe hacer es igualar la cantidad de cifras decimales de los números, completando con ceros. Esto ayuda a realizar una comparación más sencilla.

Los únicos números que no tienen dos cifras decimales son 7,7 y 6,2. Por tanto, al completar sus cifras se tiene que:

7,7 = 7,70 y 6,2 = 6,20

Al comparar los números dados, fácilmente se deduce que el orden correcto debe ser:

7,70 > 7,35 > 7,09 > 6,20 > 6,13 > 6,02

3.5 Representación de números decimales en la recta numérica

Recurso imprimible

Para representar números decimales en la recta numérica se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se ubica en la recta numérica el número correspondiente a la parte entera del decimal.
- **Luego,** en la unidad siguiente, se ubica la parte decimal, teniendo en cuenta que el segmento se debe dividir en 10, 100, 1.000, etc. partes iguales según la cantidad de cifras decimales del número dado.

Matemática*mente*

¿Cómo ubicarías el número 0,25 en la recta numérica?

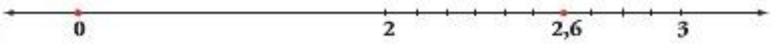
EJEMPLO

Ubicar en la recta numérica el número decimal 2,673.

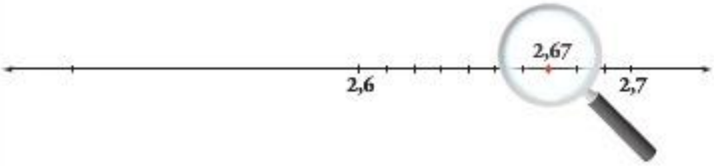
Para representar 2,673 en la recta numérica se debe ubicar el dos y la unidad entre el dos y el tres se debe dividir en 1.000 partes iguales y tomar 673. En este caso, se puede tomar una aproximación, como se muestra en las siguientes gráficas.

Para hacer una aproximación al número 2,673, se representan los números 2,6; 2,67 y por último, 2, 673 haciendo una ampliación de la imagen en cada caso.

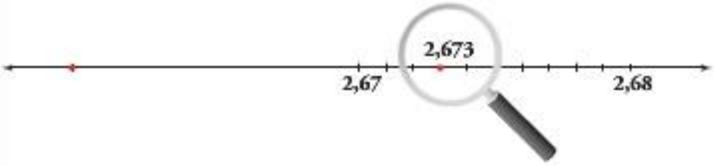
Para representar 2,6, se ubica el número 2; la unidad de 2 a 3 se divide en 10 partes y se toman 6 de ellas.



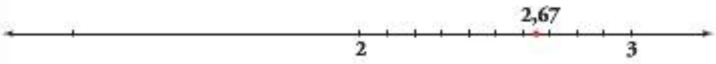
Para representar 2,67, se ubica el punto 2,6; la región entre 2,6 y 2,7 se debe dividir en 10 partes y de ellas tomar 7.



Para representar 2,673 se ubica el punto 2,67 y la región entre 2,67 y 2,68 se debe dividir en 10 partes y de ellas tomar 3.



Luego sobre la recta numérica, el punto 2,673 está ubicado aproximadamente en el lugar que se muestra.

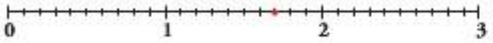


Afianzo COMPETENCIAS

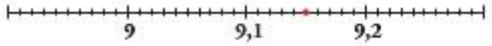
Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Escribe el decimal representado en cada gráfico.

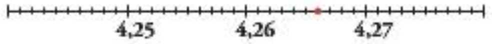
241.



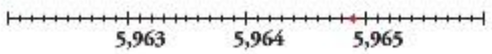
242.



243.



244.



Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso.

245. La cantidad de partes en que se debe dividir una unidad para representar un decimal corresponde a la cantidad de cifras decimales. ( )

246. Entre dos números decimales siempre se puede ubicar otro número decimal. ( )

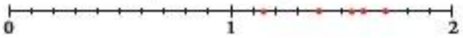
247. Ordena de menor a mayor las expresiones decimales exactas.

2,317 2,0317 2,37 0,3107 0,31007 2,3

Encuentra la expresión decimal de las siguientes fracciones y ordénalas de mayor a menor.

248. $\frac{5}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{8}{3}$

249. La profesora mide a cinco estudiantes de la clase y registra la informacion en la siguiente recta numérica. Indica la estatura del estudiante más alto, del medio y del más bajo de todos.



La distancia de las casas de Juan, Jhon, Sandra, Gustavo y Luisa a su colegio son, respectivamente: 16,295; 16,234; 16,874; 16,203 y 16,527 kilómetros.

250. ¿Quién vive más cerca al colegio?

251. El conductor plantea que la primera persona que debe recoger es Sandra. ¿Estás de acuerdo con la opinión del conductor, si la ruta escolar recoge a los estudiantes empezando por el que vive más lejos? Argumenta tu respuesta.

Soluciona las siguientes situaciones.

A continuación, se presenta la información sobre el tamaño de un embrión humano dependiendo de las semanas de gestación:

2 semanas: el embrión mide aproximadamente $\frac{1}{100}$ de pulgada (0,25 mm) de largo en este momento.

4 semanas (primer mes de embarazo): el embrión mide aproximadamente $\frac{1}{4}$ de pulgada (6,4 mm).

6 semanas: el embrión aproximadamente mide $\frac{3}{4}$ de pulgada (19 mm).

8 semanas (segundo mes de embarazo): el feto, hasta ahora llamado embrión, mide aproximadamente $1\frac{1}{2}$ pulgadas (38,2 mm).

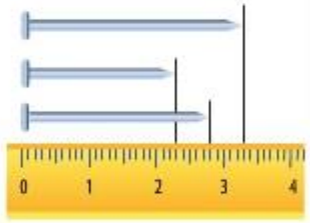
252. Representa las medidas de las 2, 4, 6 semanas en la recta numérica.

253. Representa en la recta el crecimiento en mm que ha tenido el embrión de las 2 a las 4 semanas.

254. Representa en la recta el crecimiento en mm que ha tenido el embrión de las 2 a las 8 semanas.

255. ¿Qué fracción representa el crecimiento entre el primer y segundo mes?

256. Indica la medida de cada puntilla y plantea una situación problemática con ellas.



257. Indica cuál es la representación de 0,01 y de 0,001 sobre el mismo cubo teniendo en cuenta las representaciones de 1U y 0,1U.

Una unidad = 1U

$\frac{1}{10}$ de unidad

$\frac{1}{10} = 0,1$

3.6 Los decimales y los porcentajes

Ampliación multimedia

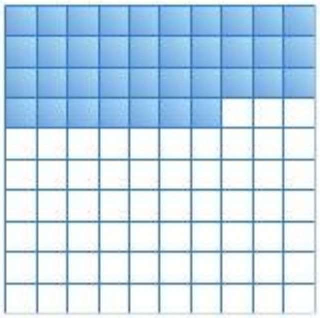
Existen varias expresiones en las que el término "porcentaje" o "por ciento" tiene un papel importante. Expresiones como "el 20 por ciento de descuento" o "el impuesto del 16 por ciento", entre muchas otras, se escuchan de manera cotidiana.

El porcentaje representa una fracción decimal cuyo denominador es 100 y se representa con el símbolo % que significa por cada cien.

Por ser una fracción decimal, el porcentaje se puede representar como número decimal o como fraccionario.

Por ejemplo, 37% se puede escribir como 0,37 o como $\frac{37}{100}$.

Esta expresión representa 37 de cada 100 y gráficamente se puede observar en la ilustración:



Para calcular el porcentaje de una cantidad dada se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se convierte el porcentaje a fracción decimal, teniendo en cuenta que el denominador es 100.
- **Luego,** se multiplica la fracción decimal por la cantidad dada.

Por ejemplo, hallar el 40% de 200 corresponde a calcular $\frac{40}{100}$ de 200 así:

$$\frac{40}{100} \times 200 = \frac{40 \times 200}{100} = 80$$

También, se puede hallar utilizando el número decimal, así: $0{,}40 \times 200 = 80$.

EJEMPLO

El precio de un abrigo es $75.400. Por ser un modelo anterior tiene el 15% de descuento. ¿Cuánto se debe pagar por el abrigo?

Como es un descuento del 15% del precio del abrigo, es necesario hallar ese porcentaje:

$$\frac{15}{100} = 0{,}15$$

$$\begin{aligned}\frac{15}{100} \times 75.400 &= \frac{15 \times 75.400}{100}\\ &= 15 \times 754\\ &= \$11.310\end{aligned}$$

Luego, el valor del descuento es $11.310.

Para encontrar el valor que se debe pagar, se debe restar el descuento al costo original de abrigo.

$$\begin{array}{r} 75.400 \\ -\ 11.310 \\ \hline 64.090 \end{array}$$

Luego, el precio final que se debe pagar por el abrigo es de $64.090.

Este valor corresponde al 85% del precio del abrigo porque 100% − 15% = 85%.

Afianzo COMPETENCIAS

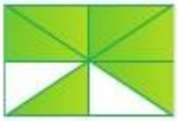
Interpreto · **E** Ejercito · Argumento · **S** Soluciono problemas

Expresa el área de cada región sombreada como un porcentaje:

258.

259.

260.



E **261. Completa la siguiente tabla.**

Porcentaje	Fracción	Decimal	Lectura
1%			
	$\frac{5}{100}$		
		0,1	
25%			
		0,4	
		0,7	
75%			
			87 por ciento
	1		

E **Calcula el porcentaje indicado de cada número. Expresa el porcentaje como fracción y como decimal.**

262. 18% de 480

263. 104% de 820

264. 17% de 984

265. 75% de 75

266. 45% de 4.500

267. 150% de 38.420

Responde las preguntas y justifica tu respuesta:

268. ¿Si a un objeto se le hace un descuento del 20% se puede afirmar que el valor para pagar corresponde al 80%?

269. ¿Qué cantidad es mayor, 35% de 600 o 60% de 350?

270. ¿Qué porcentaje representa la mitad de una cantidad?

S **Resuelve los problemas.**

Una persona que gana $2.460.000, invierte 35% en arriendo, 20% en alimentación, 25% en diversión y el resto para los demás gastos.

271. ¿Qué porcentaje del dinero utiliza para otros gastos y a cuánto dinero corresponde?

272. ¿A cuánto dinero equivale lo que gasta en diversión?

En una empresa se solicita un préstamo de 2,5 millones de pesos a una tasa del 6% mensual.

273. ¿Cuánto se debe devolver al transcurrir los tres meses de plazo del préstamo?

Los estudiantes de sexto grado presentaron una prueba de inglés y el profesor elaboró la siguiente tabla para mostrar los resultados obtenidos.

Grado sexto Prueba de inglés		
Resultado	Mujeres	Hombres
Aprobaron	15	8
No aprobaron	10	24

Con base en la tabla, responde las preguntas que el profesor planteó a los estudiantes:

274. ¿Cuál es el total de estudiantes que presentaron la prueba?

275. ¿Qué porcentaje de los estudiantes aprobó el examen?

276. ¿Qué porcentaje de las niñas aprobó el examen?

277. ¿Qué porcentaje de hombres no aprobó el examen?

Si en cada baúl se encuentra la cantidad de monedas que se indica responde:

278. ¿Qué porcentaje de las monedas que hay en cada baúl es de plata?

279. ¿Qué porcentaje del total de monedas es de cobre?

4. Operaciones con números decimales

Actividad Enlace web

Con los números decimales se pueden realizar las mismas operaciones que se realizan con los fraccionarios; sin embargo, el proceso que se realiza es muy parecido al que se utiliza para resolver las operaciones con los números naturales.

4.1 Adición de números decimales

Para sumar números decimales se siguen los siguientes pasos:

- **Primero,** se escriben los números decimales uno debajo del otro de tal manera que la coma decimal quede en una misma columna. Esto permite garantizar que en cada columna solo están ubicadas unidades con unidades, décimas con décimas, centésimas con centésimas, milésimas con milésimas…
- **Luego,** se suman las cifras como con los números naturales. Luego, se escribe la coma decimal en el lugar correspondiente.
- **Finalmente,** si alguno de los sumandos tiene menos cifras decimales que los otros, se completan las cifras que faltan con ceros.

Recuerda que…

Todo número natural se puede expresar como un número decimal en el cual la coma está a la derecha de las unidades y después de ella hay cualquier cantidad de ceros que no afectan el valor del número.

Por ejemplo,

$8 = 8{,}0 = 8{,}000$

$25 = 25{,}0 = 25{,}00$

$76 = 76{,}00 = 76{,}000.$

EJEMPLOS

Resolver las siguientes situaciones.

a. Mariana corre 2,6 km en la mañana; 16,35 km en la tarde y 5 km en la noche, ¿cuántos kilómetros corre Mariana cada día?

Como realiza los tres recorridos en el día, se deben sumar para conocer el resultado total.

Se deben hacer coincidir las comas decimales de los tres números e igualar las cifras decimales con ceros para que todos los números queden con dos cifras decimales.

$2{,}6 = 2{,}60$ $5 = 5{,}00$ 16,35 se deja igual

La operación que se debe realizar es:

$$\begin{array}{r} 2{,}60 \\ +\ 16{,}35 \\ 5{,}00 \\ \hline 23{,}95 \end{array}$$

Luego, Mariana recorre 23,95 km cada día.

b. Encontrar la longitud del contorno de una piscina que tiene forma rectangular y las medidas que se muestran en la figura.

Para encontrar la medida del borde de la piscina, se debe averiguar el perímetro de la piscina, para lo cual es necesario sumar la longitud de los cuatro lados.

Como es un rectángulo, los lados opuestos deben ser iguales, por lo cual la suma que se debe realizar es $7{,}52 + 3{,}8 + 7{,}52 + 3{,}8$

Para hacer la operación, se escriben los números en columna, teniendo presente que $3{,}8 = 3{,}80$.

$$\begin{array}{r} 7{,}52 \\ 3{,}80 \\ +\ 7{,}52 \\ 3{,}80 \\ \hline 22{,}64 \end{array}$$

Luego, la longitud del borde de la piscina es 22,64 metros.

4.2 Sustracción de números decimales

Actividad

Para restar dos números decimales, se usa el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se escriben los números, uno debajo de otro, de tal manera que la coma decimal quede en columna.
- **Segundo,** es importante tener en cuenta que el minuendo debe tener el mismo número de cifras decimales que el sustraendo. Por esto, se deben agregar tantos ceros a las cifras decimales del minuendo o del sustraendo como sean necesarios.
- **Finalmente,** se realiza la resta como si fuera una resta entre números naturales y, en el resultado de la operación, se escribe la coma decimal en la columna correspondiente.

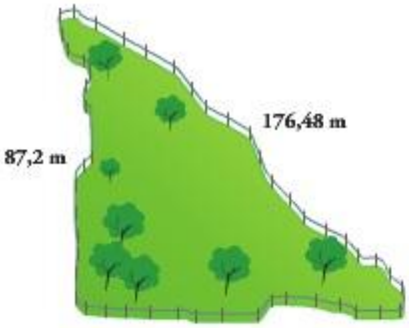
  Por ejemplo, para restar 7,5 − 2,3 se realiza la operación:

$$\begin{array}{r} 7{,}5 \\ -\ 2{,}3 \\ \hline 5{,}2 \end{array}$$

El resultado de la resta es 5,2.

EJEMPLOS

1. Un terreno tiene la forma que se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el lado que falta, si se sabe que cercando el terreno totalmente se gastaron 356,18 m de alambre?



Como se conocen dos de los tres lados del terreno, es necesario sumar esas dos medidas para saber la cantidad de alambre que se gastó en ellos.

Primero, se igualan las cifras decimales de los dos números. Para eso, es necesario que los dos números tengan dos cifras decimales, por tanto,

87,2 = 87,20 y 176,48 se deja igual.

Luego, se realiza la suma 87,20 + 176,48 para saber cuánto se empleó en los lados conocidos.

$$\begin{array}{r} 87{,}20 \\ +\ 176{,}48 \\ \hline 263{,}68 \end{array}$$

Finalmente, se resta ese resultado al alambre usado en total y se obtiene el valor pedido.

$$\begin{array}{r} 356{,}18 \\ -\ 263{,}68 \\ \hline 92{,}50 \end{array}$$

La medida del lado que falta es 92,50 m.

2. Un tubo para el agua mide 6,5 m de largo y se le divide en dos partes. Si una de las partes mide 4,83 m, ¿cuánto mide la otra parte?

Como se quita una parte al tubo, se debe restar la longitud del tubo que se corta a la longitud del tubo completo. Es decir, la operación 6,5 − 4,83 dará la longitud de la parte del tubo sobrante.

Primero, para realizar la resta se igualan las cifras decimales de los dos números.

6,5 = 6,50 4,83 se deja igual.

Luego, se realiza la resta.

$$\begin{array}{r} 6{,}50 \\ -\ 4{,}83 \\ \hline 1{,}67 \end{array}$$

Finalmente, la longitud del tubo restante es 1,67 m.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Argumento • Soluciono problemas • Propongo

El extracto bancario de Mauricio en el mes de septiembre registra la siguiente información:

Día	Movimiento	Retiro	Abono
05	Retiro sucursal centro	48.432	
12	Consignación Chicó		37.543,20
16	Consignación nómina		1.543.534,23
24	Pago servicio de agua	56.765,23	
29	Intereses por ahorro		1.456,34

280. ¿Cuánto dinero retiró en total en el mes de septiembre?

281. Si el saldo final del mes de agosto era de 784.234,34 y los únicos movimientos de la cuenta están en este extracto, ¿cuál es el nuevo saldo?

Resuelve.

282. ¿Cuánto le falta a la siguiente suma para obtener a 213?

123 + 1,23 + 3,12 + 31,2 + 12,3 + 23,1 + 2,31 + 3 + 2,13

283. Restar la suma de 10,53 y 89,91 de la suma de 126,23 y 11,29.

Completa los cuadros, sabiendo que la suma horizontal y vertical en todos los casos es siempre 22.

284.

11,33	4,40	
	10,33	3,40

285.

7,324		5,8
4		15,08

En una competencia de carros, los competidores han recorrido 243,82 km en la primera etapa, 246,4 km en la segunda y 162 km en la tercera etapa. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

286. Si la carrera es de 1.000 km les quedan por recorrer 347,78 km.

287. La primera etapa es la más larga de la carrera.

288. La mayor diferencia de recorridos entre dos etapas es de 1,21 km.

289. En la tercera etapa se cubre la mitad del recorrido de la carrera.

Soluciona los siguientes problemas.

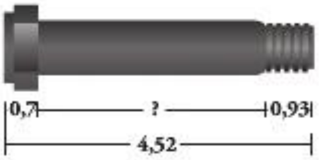
290. Una jarra vacía pesa 0,83 kg y llena de jugo de fresa pesa 1,845 kg. ¿Cuánto pesa el jugo de fresa?

291. Una naranja pesa 0,28 kilos, otra pesa 0,339 kilos y una tercera 0,1 kilos. Si a Hernán sólo le alcanza el dinero para comprar las naranjas cuyo peso no sobrepase los 0,35 kg, ¿cuáles naranjas puede llevar?

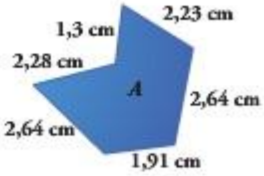
Pedro compró una cometa que traía determinada cantidad de cuerda. Luego, decidió añadir la cuerda de su cometa anterior que medía 14,4 m, con lo que obtuvo un largo total de 25,82 m.

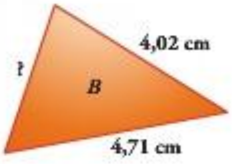
292. ¿Cuál era el largo de la cuerda de la cometa?

293. Encuentra la medida desconocida en cada uno de los siguientes tornillos.



294. Determina tres medidas posibles para el lado que falta, de tal forma que el perímetro de la figura *A* sea menor que el perímetro de la figura *B*.





Lo que viene...

En las páginas siguientes aprenderás la multiplicación entre números decimales.

4.3 Multiplicación de números decimales

Actividades

Para multiplicar dos números decimales se multiplican dichos números como si fueran números naturales.

Se debe garantizar que el producto o resultado tenga tantas cifras decimales como cifras decimales tengan en total los dos factores. Es decir, se debe contar la cantidad de cifras decimales que tienen entre los dos factores y esa misma cantidad de cifras decimales se deben separar en el resultado de la multiplicación.

Por ejemplo:

Multiplicar 3,54 × 14,8

Como los factores tienen en total tres cifras decimales, el resultado de la multiplicación debe quedar con tres cifras decimales

$$\begin{tikzcd} 3,\boxed{54} \arrow[dr] & \\ & \text{3 cifras decimales} \\ 14,\boxed{8} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{r} 3,54 \\ \times 14,8 \\ \hline 2832 \\ 1416 \\ 354 \\ \hline 52,\boxed{392} \end{array} \xrightarrow{} \text{3 cifras decimales}$$

Es importante notar que la coma solo se escribe en el resultado final.

Para multiplicar decimales también es posible escribir cada uno de los factores como una fracción decimal y luego realizar la multiplicación de fracciones.

$$3,54 = \frac{354}{100} \text{ y } 14,8 = \frac{148}{10}$$

así tenemos, $\frac{354}{100} \times \frac{148}{10} = \frac{52.392}{1.000} = 52,392.$

EJEMPLOS

1. Un tren que viaja a 45 km/h tarda 3,5 horas en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué distancia recorre el tren?

La distancia que recorre un cuerpo que se mueve con la misma rapidez todo el tiempo se puede encontrar multiplicando el tiempo del recorrido por la rapidez, por tanto,

Distancia total = 45 × 3,5

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times \ 3,5 \\ \hline 225 \\ 135 \\ \hline 157,5 \end{array} \text{ km recorre el tren}$$

2. Hallar el área de un cuadrado cuyo lado mide 87,6 cm.

Como $A = l \times l$, se debe multiplicar el lado del cuadrado por sí mismo.

$A = (87,6)^2$ que se realiza

$$\begin{array}{r} 87,6 \\ \times \ 87,6 \\ \hline 5256 \\ 6132 \\ 7008 \\ \hline 7.673,76 \end{array}$$

Luego, el área del cuadrado es 7.673,76 cm².

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

I La densidad del aire seco es de 1,24 kg por m³ a 10 °C y de 1,205 kg por m³ a 20 °C.

295. ¿Cuál es la masa de 12,34 m³ de aire si la temperatura es de 10°?

296. ¿Cuál es la masa de 10,14 m³ de aire si la temperatura es de 20°?

E Calcula el doble y el triple de los siguientes números:

297. 19,63 **298.** 267,3 **299.** 2.325,345

E Realiza las siguientes operaciones.

300. 3,17 × 4

301. 62,87 × 21

302. 53 × 8,26

303. 208 × 1,6

304. 37,04 × 8,62

305. 53,8 × 0,19

R Completa los espacios en blanco, de tal manera que las multiplicaciones sean correctas.

306.

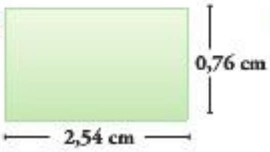
$$\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 2 & 5, & 1 & 8 \\
 & & & \times & 2, & 8 \\ \hline
\square & \square & 0 & \square & \square & 4 \\
\square & \square & 0 & 3 & \square & \\ \hline
\square & \square & \square, & \square & \square & \square
\end{array}$$

307.

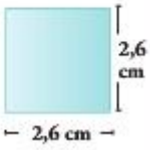
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 5 & 7 & 8 & \square, & 3 & \square \\
 & & & & & \times & 4, & 5 & \square \\ \hline
 & & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 9 & 6 \\
 & 2 & 8 & \square & \square & 1 & 6 & 0 & \\
2 & 3 & 1 & \square & 5 & \square & 8 & & \\ \hline
2 & 6 & \square & \square & \square, & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

R Encuentra el perímetro y el área de las siguientes figuras.

308.



309.



S Resuelve los siguientes problemas.

310. ¿Cuánto se debe pagar en un supermercado por 3 docenas de naranjas que pesan 6,54 kg si el precio por kilo es de $2.540?

311. Pedro tiene 240 cajas con 25 bolsas de azúcar cada una. Si cada bolsa pesa 0,95 kg, ¿cuál es el peso de todas las cajas de azúcar?

312. Un camión transporta 6 bloques de mármol de 1,34 toneladas y 3 vigas de acero de 0,374 toneladas cada una. ¿Cuántas toneladas lleva el camión?

Tres amigos ahorran en euros. Julio ha ahorrado 197,75 €; Carlos ha ahorrado 15,62 € más que Julio; Gabriela ha ahorrado 99,56 € menos que Julio durante cada uno de los últimos 4 meses.

313. ¿Cuántos euros ha ahorrado Gabriela?

314. ¿Cuántos euros han ahorrado entre todos?

315. Si deciden cambiar el dinero un día en el que el precio del euro es $2.450,15, ¿cuántos pesos tiene ahorrado cada uno?

316. La dueña de una tienda compra 1.300 huevos a $120,5 cada uno. Paga $4.350 por el transporte y en el camino se le rompen 3 huevos, ¿cuánto gana o pierde si vende cada huevo a $150,75?

Liliana debe mantener un régimen de alimentación que no le permite consumir más de 600 calorías en el desayuno.

El primer día decide desayunar: 125 g de pan, 124,5 g de fruta, 45,54 g de queso y una tasa de chocolate de 130,12 g.

317. ¿Es adecuado este desayuno si se sabe que cada gramo de pan da 1,8 calorías, 1 g de fruta 0,32 calorías, 1 g de queso 1,5 calorías y 1 g de chocolate 2,93 calorías?

318. ¿Cómo podría Liliana balancear mejor su dieta si desea comer todos los productos previstos?

319. Se sabe que 41 g de papa sabanera aportan 48,5 calorías y 0,05 g de grasa insaturada, mientras que 40 g de papa criolla aportan 51,5 calorías y 0,04 g de grasa insaturada. De cada tipo de papa se tiene un paquete de 1.640 g. Determina ¿cuál de los dos paquetes aporta más calorías?, ¿cuál aporta más grasas?, y ¿en qué cantidad lo hacen?

4.4 División de números decimales

Actividad

En la **división de números decimales** se puede presentar que tanto el dividendo como el divisor sean números decimales, que el dividendo sea decimal y el divisor un número natural o que el dividendo sea natural y el divisor decimal.

Un número decimal entre un número natural

Se efectúa la división correspondiente, teniendo en cuenta que al bajar la cifra decimal del dividendo se debe poner una coma en el cociente.

Por ejemplo, para dividir 32,87 entre 8 y 97,106 entre 14 se debe efectuar:

```
32,87 | 8                 97,106  | 14
 0 8    4,10875           13 1      6,936142857
   07                      0 50
    70                       086
    60                       020 <-----------+
     40                        60            |
      0                         40           |
                                120          |
                                 080         |
                                  100        |
                                    20 <-----+
```

Empieza a repetirse el residuo y aparecerá el período en el cociente.

En la división de 32,87 entre 8 el resultado es 4,10875 que es una expresión decimal exacta. La coma en el cociente se debe escribir en el momento en el que se baja el 8 del dividendo, que es la primera cifra decimal de 32,87.

En la división 97,106 entre 14 el resultado es $6,936\overline{142857}$, la cual es una expresión decimal periódica mixta, con un período de seis cifras 142857. La coma en el cociente se escribió al bajar el 1.

Un número natural entre un número decimal

Para dividir un número natural entre un número decimal se deben seguir los siguientes pasos:

- **Primero,** se multiplican el dividendo y el divisor por la potencia de diez que tenga tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.
- **Segundo,** se realiza la división.

Por ejemplo, para efectuar la división 4.104 ÷ 4,5 se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

Como hay una cifra decimal en 4,5, se multiplican los dos números por 10.

$4.104 \times 10 = 41.040$ y $4,5 \times 10 = 45$

Luego, la división que se debe realizar es: 41.040 ÷ 45.

```
41.040 | 45
    54   912
    090
      0
```

Luego, el resultado de la división 4.104 ÷ 4,5 es 912.

Un número decimal entre un número decimal

Actividad

Para dividir un número decimal entre un número decimal, se realiza el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se multiplican el dividendo y el divisor por la potencia de diez que tenga tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.
- **Segundo,** si en el dividendo siguen apareciendo cifras decimales, se resuelve la división como en el caso de un número decimal entre un número natural.

Por ejemplo, para dividir 193,86 entre 5,4 se realiza:

Como 5,4 tiene cifra decimal, mientras que 193,86 tiene dos cifras decimales, se deben multiplicar los dos números por 10, así:

$$193{,}86 \times 10 = 1.938{,}6 \text{ y } 5{,}4 \times 10 = 54$$

Luego la división que se debe realizar es $1.938{,}6 \div 54$ y su resultado es 35,9.

La cantidad de cifras decimales que se deben obtener para el cociente de la división depende del contexto de la situación que se desee resolver.

EJEMPLOS

1. El área del piso de una sala que tiene forma rectangular mide 49,64 m^2. Hallar la medida del largo de la sala, si el ancho mide 7,5 m.

Como se conoce el área del piso y la medida del ancho, es necesario dividir esos dos valores para encontrar el largo de la sala.

Largo = $49{,}64 \div 7{,}5$.

Para hacer esa división se multiplican los dos números por 100, ya que el número que más cifras decimales tiene es 49,64.

$49{,}64 \times 100 = 4.964$ y $7{,}5 \times 100 = 750$

Realizamos la división:

```
4.964 |750
 4640  6,61
  1400
   650
```

Luego, el largo mide 6,61 m.

2. Un artesano corta una tira de alambre de 10 m de largo en trozos de 0,83 metros para hacer adornos de temporada. Si en cada adorno debe utilizar tres tiras de alambre, ¿cuántos adornos puede hacer con dicha tira de alambre?

Para saber cuántos trozos se pueden sacar de los diez metros de alambre se debe dividir entre los 0,83 m que mide cada trozo.

Para hacer $10 \div 0{,}83$ se deben multiplicar los dos números por 100 ya que hay dos cifras decimales

$10 \times 100 = 1.000$ y $0{,}83 \times 100 = 83$, luego:

$10 \div 0{,}83 = 1.000 \div 83$

```
1.000 |83
  170  12,04
   400
    68
```

Sin embargo, como se usan tiras completas, en esta división no era necesario sacar decimales. Por lo tanto, se obtienen 12 tiras de alambre y sobra un poco.

Como se usan tres trozos en cada adorno, el artesano podrá realizar cuatro adornos de temporada.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

En la siguiente lista aparecen los ingredientes para preparar 24 *brownies*.

Mantequilla: 155 gramos
Vainilla: 1 y media cucharaditas
Harina: 150 gramos
Levadura en polvo: 1,5 cucharaditas
Nueces picadas: 150 g
Azúcar: 3.020 gramos
Huevos: 3 unidades
Chocolate negro: 125,48 gramos

320. Completa la tabla con los valores aproximados que se deben usar para preparar 8 *brownies* con las mismas características.

Ingrediente	Cantidad
Mantequilla	
Chocolate negro	
Azúcar	
Esencia de vainilla	
Levadura	
Nueces picadas	
Huevos	

Calcula la mitad y la tercera parte de cada número.

321. 13,5 **322.** 6,433 **323.** 0,67

Realiza las siguientes divisiones.

324. 47,38 ÷ 18
325. 371,8 ÷ 49
326. 84 ÷ 6,18
327. 108 ÷ 15,6
328. 27,84 ÷ 8,2
329. 7,3 ÷ 9,08
330. 2.748,36 ÷ 57
331. 0,345 ÷ 3,4

332. Completa los espacios en blanco, de tal manera que la división sea correcta.

3 7 9, ☐☐ 8 | 6,4
☐ 9 3 | 5 9,☐ 7
☐ 7 2
☐☐ 8
☐

Resuelve las siguientes situaciones.

Tres tanques de gaseosa contienen 125,8 litros, 85,5 litros y 99, 2 litros respectivamente.

333. ¿Cuántas botellas de gaseosa de 1,25 litros (litro y cuarto) se puede llenar con el líquido que hay en cada tanque?

334. Se decide reunir toda la gaseosa que hay en los tres tanques y llenar botellas de 1,25 litros. ¿Cuántas botellas se llenan en total?

335. ¿Por qué no da la misma cantidad de botellas llenas en los dos casos anteriores?

336. La torta para el cumpleaños de Paula costó $55.500 y la van a pagar entre sus tres tías. ¿Cuánto dinero tendría que pagar cada una de ellas dado que dividirán la cuenta en partes iguales?

337. En su última visita a Panamá, un grupo de amigos tomaron un transporte especial para llevar sus compras. Por este transporte tuvieron que pagar en total 57 dólares. Si cada uno tuvo que aportar 9,50 dólares, ¿cuántos amigos tomaron el transporte?

Responde las preguntas 338 a 340 con base en la siguiente información.

Sandra compró 88,9 kg de cereal y los va a empacar en bolsas de 0,35 kg cada una.

338. ¿Cuántas bolsas podrá llenar?

339. Si decide llenar mejor bolsas de 0,3 kg, ¿cuántas bolsas puede llenar?

340. ¿Cuánto cereal le sobra?

Una caja llena de frascos de mermelada pesa 40,6 kilogramos. Si se sabe que cada frasco lleno pesa 0,675 kilogramos:

341. ¿Cuántos frascos hay en una caja si todos pesan lo mismo?

342. ¿Cuánto pesa el cartón de la caja?

Con base en la siguiente información, plantea una pregunta y resuélvela.

343. Una fotocopiadora de alta resolución logra sacar 23 copias en 42,8 segundos.

4.5 Operaciones combinadas y aplicaciones

Recurso imprimible

Polinomios aritméticos con decimales

Un **polinomio aritmético** con decimales es una expresión en la cual aparecen diferentes operaciones y, en muchos casos también, signos de agrupación.

Para resolver este tipo de expresiones se deben realizar primero las operaciones que estén entre signos de agrupación y luego, las demás operaciones, siempre teniendo presente que primero se deben realizar las multiplicaciones y divisiones y posteriormente, las sumas y restas.

EJEMPLOS

1. **Encontrar el resultado de la expresión al ser digitada en una calculadora científica.**

$9,7 \times 3,2 - 5,84 \times 2,7$

Como no hay paréntesis en la expresión se debe empezar por resolver las multiplicaciones indicadas, así:

$9,7 \times 3,2$ corresponde a:

$$\begin{array}{r} 9,7 \\ \times\ 3,2 \\ \hline 19\ 4 \\ 291 \\ \hline 31,04 \end{array}$$

$5,84 \times 2,7$ corresponde a:

$$\begin{array}{r} 5,84 \\ \times\ 2,7 \\ \hline 4088 \\ 1168 \\ \hline 15,768 \end{array}$$

Posteriormente, se restan los resultados obtenidos. Como el minuendo tiene menos cifras decimales que el sustraendo es necesario completar con un cero.

$31,04 - 15,768$ corresponde a:

$$\begin{array}{r} 31,040 \\ -\ 15,768 \\ \hline 15,272 \end{array}$$

Luego, el resultado de la operación es 15,272.

En una calculadora científica es posible escribir la expresión completa y obtener el resultado inmediatamente; sin embargo, en algunas calculadoras básicas es necesario realizar cada operación como se muestra en el ejemplo.

2. **Resolver la siguiente expresión.**

$$18,75 + 8,16 \times 5,2 - (3 + 7,4 \div 3,2)$$

Primero, se debe realizar la operación del paréntesis e iniciar por resolver la división.

$7,4 \div 3,2 = 74 \div 32$

$$\begin{array}{r|l} 74 & 32 \\ \cline{2-2} 100 & 2,31 \\ 40 & \\ 8 & \end{array}$$

En este caso, solo se usarán dos cifras decimales, pero es posible sacar más cifras, ya que el residuo aún no es cero, ni ha empezado a repetirse.

Luego, se realiza la suma indicada en el paréntesis, obteniendo así:

$3 + 2,31$ es

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ +\ 2,31 \\ \hline 5,31 \end{array}$$

Ahora se resuelve la multiplicación que está fuera del paréntesis

$8,16 \times 5,2$ es

$$\begin{array}{r} 8,16 \\ \times\ 5,2 \\ \hline 1632 \\ 4080 \\ \hline 42,432 \end{array}$$

Por último, se realiza la suma y la resta:

$$\begin{array}{r} 18,75 \\ +\ 42,432 \\ \hline 61,182 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 61,182 \\ -\ 5,31 \\ \hline 55,872 \end{array}$$

Luego, el resultado del polinomio dado es 55,872.

Problemas de aplicación

Para resolver problemas en los que se plantean operaciones con decimales se deben seguir los mismos pasos que para resolver problemas con fraccionarios.

Es fundamental leer el problema hasta comprender su contenido, determinar las preguntas que se plantean y la relación de los datos dados con dichas preguntas, para así poder definir las operaciones que se deben resolver.

Una vez terminado el problema, es importante verificar que las operaciones hayan sido correctamente desarrolladas, que tengan relación lógica con los datos del problema y redactar la respuesta correspondiente.

EJEMPLOS

1. Jacinto remueve 18,7 kg de material durante cada una de las dos primeras horas de trabajo, mientras que en cada una de las siguientes horas solo remueve 13,2 kg. ¿Cuántos kg remueve Jacinto en las primeras 7 horas de su día de trabajo?

Primero, se debe averiguar cuánto material logra remover Jacinto en las primeras dos horas, para lo cual, se multiplica el tiempo por el material:

$$\begin{array}{r} 18{,}7 \\ \times 2 \\ \hline 37{,}4 \end{array}$$

Jacinto removió inicialmente 37,4, kg de material.

Luego, se debe encontrar la cantidad de material removido en las siguientes 5 horas, para lo cual se multiplica la cantidad removida en cada hora por 5.

$$\begin{array}{r} 13{,}2 \\ \times 5 \\ \hline 66{,}0 \end{array}$$

En 5 horas removió 66,0 kg.

Por último, se deben sumar los dos resultados obtenidos:

$$\begin{array}{r} 37{,}4 \\ +\ 66{,}0 \\ \hline 103{,}4 \end{array}$$

Por tanto, Jacinto logra remover 103,4 kg de material en las 7 primeras horas de trabajo.

2. Una empresa exportadora de trigo mezcla 20 kg de trigo tipo A de 0,6 euros el kg con 60 kg de trigo tipo B de 0,8 euros el kg. ¿A qué precio sale el kilogramo de trigo mezclado?

Primero, se calcula el precio total de los 20 kg de trigo tipo A, multiplicando la cantidad por el precio.

$$20 \times 0{,}6 = 12 \text{ euros}$$

De la misma manera, se calcula el precio total de los 60 kg de trigo de tipo B.

$$60 \times 0{,}8 = 48 \text{ euros}$$

Luego, en total se tienen 80 kg de trigo mezclado, cuyo precio se haya sumando los dos resultados anteriormente obtenidos.

$12 + 48 = 60$ euros, precio total de la mezcla de los dos tipos de trigo.

Para calcular el costo de cada kilogramo de trigo mezclado se debe dividir el precio total de la mezcla entre la cantidad de trigo que se tiene.

$60 \div 80$, lo cual se efectua así:

$$\begin{array}{rl} 60 & \underline{|\ 80} \\ 600 & 0{,}75 \\ 400 & \\ 0 & \end{array}$$

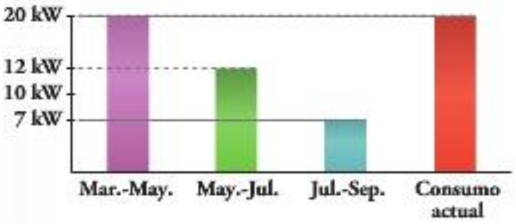
Por tanto, el precio de cada kg de trigo mezclado es de 0,75 euros.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · Soluciono problemas

Juanita acaba de aprender que el consumo de energía se mide en kilovatios (kW) y de saber que en el sector donde ella vive el cargo básico para el servicio de energía es de $13.842.

En este mes, el recibo de energía de su casa contiene un diagrama de barras como el siguiente:



344. Si el kW tiene un costo de $2.350,86, ¿cuánto dinero le cuestan a Juanita los kilovatios que consumió en los últimos cuatro períodos en su casa?

345. Si se sabe que el total facturado en el recibo equivale a la suma del cargo fijo más el valor del consumo residencial, ¿cuál fue el total que tuvo que pagar por el recibo correspondiente al período de mayo-julio?

346. Teniendo en cuenta el valor de los recibos de los últimos cuatro períodos facturados, ¿cuánto ahorró Juanita entre el período que más pagó y el de menor consumo?

Resuelve los siguientes problemas.

Don Juan necesita saber el peso de un cordero recién nacido, pero debe tener mucho cuidado con el animal, por ello decide subir a la báscula a su hijo que pesa 24 kg con el cordero en brazos.

347. ¿Cuál es el peso del cordero si el peso de los dos (el cordero y el hijo de don Juan) es de 39,89 kg?

348. Si según los estudios sobre corderos, uno recién nacido debe pesar como mínimo 14,6 kg, ¿se puede decir que el cordero de don Juan nació con buen peso?

Responde las preguntas 349 a 351 teniendo en cuenta la siguiente información.

En cada caso describe, el proceso que utilizas para encontrar la solución y realízalo.

Largo	50,6 m
Ancho recomendado	24,5 m
Ancho del carril	2,5 m
Temperatura del agua	82,4 °F
Profundidad	2,6 m

349. ¿Cuántos carriles puede tener esta piscina?

350. ¿Cuántos metros recorre Ana en total, si para entrenar para la próxima competencia, diariamente realiza 24 recorridos completos ida y vuelta a lo largo de la piscina?

351. Para saber la cantidad de agua requerida para la llenar la piscina se debe calcular el volumen de esta y disminuirlo en 5,3 m^3. Si el volumen de la piscina se calcula multiplicando su largo por el ancho y por el alto, ¿cuánta agua se requiere para llenar la piscina?

Tres depósitos aptos para guardar alimentos contienen 103,4 litros, 185,5 litros y 59,2 litros de jugo de naranja, respectivamente.

352. ¿Cuántos litros de jugo de naranja hay en los tres depósitos?

353. ¿Cuántas botellas de dos litros y medio se pueden llenar con todo el jugo que se tiene?

354. ¿Cuánto jugo hace falta para llenar una botella más?

Determina dónde se deben escribir paréntesis para que el resultado indicado sea correcto.

355. $3,23 - 2,48 \times 2,34 + 5,6 \div 2,5 = 3,995$

356. $3,23 - 2,48 \times 2,34 + 5,6 \div 2,5 = 2,382$

Fracciones

Representa mediante una fracción y un decimal las siguientes cantidades.

357. La mitad de la mitad.

Fracción ______ Decimal ______

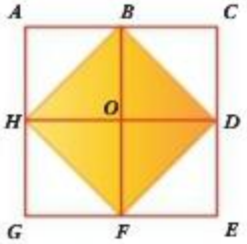
358. La tercera parte de la mitad.

Fracción ______ Decimal ______

359. La tercera parte de la cuarta parte.

Fracción ______ Decimal ______

Escribe la fracción que representa cada región con respecto al cuadrado *ACEG*.



360. El rectángulo *ABFG* representa ______

361. El cuadrado *BDFH* representa ______

362. El pentágono *BCDFH* representa ______

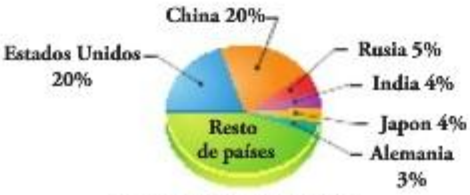
363. El triángulo *HDF* representa ______

Completa cada secuencia.

364. $\frac{17}{5}$; $\frac{15}{8}$; ______ ; ______ ; $\frac{9}{17}$; ______

365. $\frac{6}{5}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{17}{7}$; ______ ; ______ ; $\frac{41}{10}$; ______

Responde las preguntas teniendo en cuenta el gráfico:



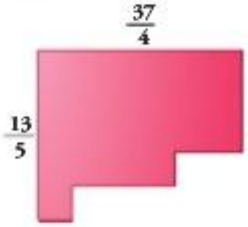
Producción mundial de CO_2

366. ¿Qué fracción representa la producción de CO_2 de Rusia? ______

367. ¿Qué país produce $\frac{1}{5}$ del CO_2 mundial? ______

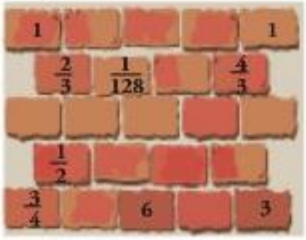
Operaciones entre fracciones

368. Calcula el perímetro de la siguiente figura.

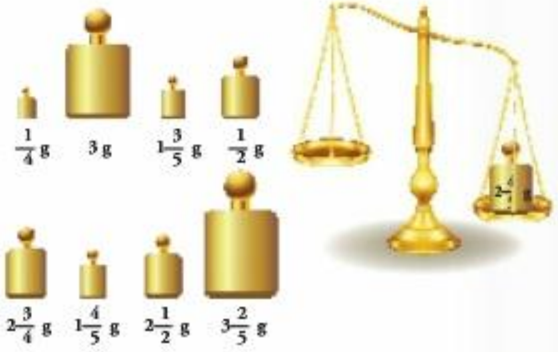


369. **Encuentra tres fracciones diferentes de tal forma que su producto sea $\frac{30}{154}$.**

370. **Completa los espacios que sean posibles teniendo en cuenta la regla que aparece en el gráfico de la derecha.**



371. **Distribuye todas las pesas en los dos platos de la balanza de tal manera que, junto con la que ya está puesta, queden en equilibrio.**



Números decimales

Completa cada secuencia.

372. 1,42; 1,52; ______; ______; 1,82; ______; ______

373. 2,26; 2,28; 2,3; ______; 2,34; ______; ______

374. 2,2; 2,25; 2,3; ______; ______; 2,45; ______

375. Relaciona las fracciones con su expresión decimal y escribe al frente si es exacta, periódica pura o periódica mixta.

$\frac{27}{4}$ $15,\overline{6}$ la cual es ______________

$\frac{19}{6}$ $2,3\overline{571428}$ la cual es ______________

$\frac{47}{3}$ $6,75$ la cual es ______________

$\frac{57}{10}$ $3,1666\ldots$ la cual es ______________

$\frac{33}{14}$ $5,7$ la cual es ______________

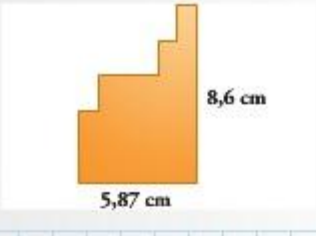
Escribe tres ejemplos que muestren la afirmación indicada en los siguientes casos, con base en ella, genera una hipótesis sobre la veracidad o falsedad de la misma. (Sugerencia: cuando sea conveniente puedes usar fracciones.)

376. La suma de un número natural y un decimal periódico mixto genera un decimal periódico mixto.

377. La suma de un decimal periódico puro y uno periódico mixto puede dar un decimal exacto.

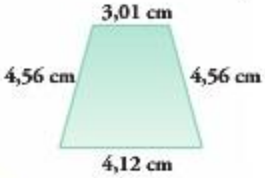
378. La suma de dos decimales exactos es un decimal exacto.

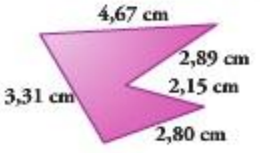
379. Encuentra el perímetro de la siguiente figura.



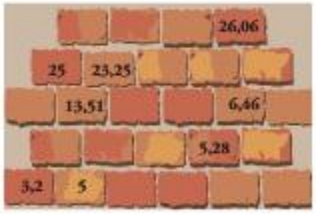
Operaciones con números decimales

380. El polígono que tiene mayor perímetro es el de ______ lados y mide ______.





381. Completa los espacios que sean posibles teniendo en cuenta la regla que aparece en el gráfico de la derecha.



Completa los enunciados de los ejercicios 382 a 384 con base en la siguiente figura.

382. Con respecto al cuadro total, el número decimal que representa la superficie de color rojo es ______ y el porcentaje pintado de color café es ______.

383. La diferencia entre el decimal que representa la superficie de mayor color y la de menor color es ______.

384. Los colores que representan el 58% del gráfico son ______________________.

385. Completa la siguiente tabla realizando las operaciones indicadas hasta tres cifras decimales.

a	b	c	$a + b \times c$	$b + c \div a$	$2b + c$
2,4	1,08	3,8			
5,01	8	0,32			
1,4	8,5	9,7			
9	7,2	5,034			

PROBLEMAS PARA REPASAR

Juan Pablo realizó un trabajo fuera del país. Por este trabajo le consignaron en su cuenta de ahorros 2.500 dólares.

Su banco le descuenta el 3% del valor de la consignación por concepto de trámite interbancario y el resto del dinero lo consigna en pesos, haciendo la conversión al valor de la tasa de cambio, que el día de la consignación era de $1.820,57 por dólar.

¿Cuántos dólares le son descontados a Juan Pablo por el concepto de trámite interbancario?

¿Cuánto dinero debe aparecer consignado en la cuenta de Juan Pablo por su trabajo?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántos dólares le son descontados a Juan Pablo por el concepto de trámite interbancario?

¿Cuánto dinero debe aparecer consignado en la cuenta de Juan Pablo por su trabajo?

¿Cuáles son los datos del problema?

A Juan Pablo le pagarán 2.500 dólares por un trabajo.

Le descuentan el 3% por el trámite interbancario.

Los dólares los convierten a pesos a una tasa de $1.820,57.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determina la cantidad de dólares que le descuentan por el trámite interbancario, que corresponde al 3% de los 2.500 dólares.

$$3\% \text{ de } 2.500 = \frac{3}{100} \text{ de } 2.500$$

$$= \frac{3 \times 2.500}{100} = 75 \text{ dólares.}$$

Luego, se determina la cantidad de dólares que le van a consignar y ese valor se multiplica por $1.820,57 que es el valor en pesos correspondiente a un dólar (tasa representativa).

$2.500 - 75 = 2.425$ dólares. Esto corresponde a los dólares que se deben consignar en la cuenta.

Finalmente, se tiene que $2.425 \times 1.820,57 = 4.414.882,25$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones están bien realizadas. De acuerdo con el proceso, se tiene que el valor del trámite interbancario fue de 75 dólares y fueron consignados en la cuenta de Juan Pablo $4.414.882,25.

Completa las frases con el resultado de las operaciones correspondientes.

386. Si Óscar duerme de las 10 p. m. a las 6 a. m., entonces la fracción del día que dedica a dormir es ______________.

387. Si un pescado de $\frac{3}{4}$ de kilo ha costado $18.550, se puede deducir que el kilo de pescado cuesta ______________.

388. Una niña que camina por un muro que rodea un jardín cuadrado de 4,76 m de lado, recorre __________ al dar tres vueltas y media al muro.

Resuelve los problemas.

Un hombre deja al morir $45.000.000 para repartir entre sus tres hijos. Según su testamento, el mayor debe recibir cinco novenos de la herencia, el segundo la quinta parte de lo que reciba su hermano mayor y el menor lo restante.

389. ¿Cuál de los hermanos recibe más dinero?

____

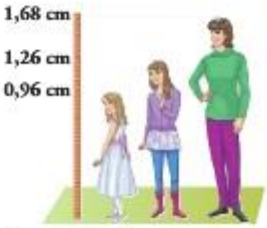
390. ¿Qué fracción de la herencia le corresponde al hermano menor?

____

391. ¿Cuánto dinero más le queda al hermano que más recibe con respecto al que menos dinero recibe?

____

En su última visita al doctor, la señora Astrid y sus dos hijas Paola y Camila han revisado sus estaturas y obtuvieron los resultados que se muestran en el gráfico.



392. ¿Cuál es la estatura de cada una de ellas?

____

393. ¿Cuántos metros más alta es Astrid que la hija menor? ______________________

394. ¿Cuántos metros de diferencia hay entre las estaturas de las hemanas?

____

395. ¿Es mayor la diferencia de estatura entre Astrid y la hija mayor o entre las dos hermanas?

____

396. Un estudiante, al usar su calculadora cometió el error de multiplicar por 100 cuando debía dividir entre 100. Si la respuesta que obtuvo fue 5,3, la respuesta correcta era: ______

En el laboratorio ZAYVAL están haciendo un experimento en el cual se necesita bajar la temperatura cada minuto a $\frac{1}{3}$ de la temperatura anterior. Si la temperatura inicial es 162°, responde:

397. ¿Cuál es la temperatura al segundo minuto de haber iniciado el experimento?

____

398. ¿En cuánto tiempo la temperatura será de 2°?

____

En un medicamento, la dosis para niño se prepara según el peso y debe ser 0,5 mL por kilogramo de peso, disuelto en 4,5 onzas de agua.

399. Si Jerónimo pesa 10,6 kg, ¿cuantos mL de medicamento se le deben dar?

400. ¿Cuánto pesa Valentina si se le dieron 9 mL de medicamento?

____

401. Si a un niño que pesa 12,6 kg se le debe dar el medicamento tres veces al día, ¿para cuántos días alcanza la presentación de 160 mL de medicamento?

____

Pablo Reyes está preocupado por su promedio en matemáticas ya que para aprobar necesita 7,25 y sus notas este período son 9,7; 5,2; 8 y 7,2.

402. ¿Pablo logrará aprobar matemáticas este período?

____

403. ¿Por cuánto debería cambiar su nota más baja para que el promedio final sea 8,5?

____

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para comprender qué es un quilate en gemología y en orfebrería.

Las piedras y metales preciosos han sido muy apetecidos por el hombre a lo largo de la historia, puesto que son símbolo de poder y belleza. Actualmente, se utilizan en el diseño y fabricación de accesorios tales como relojes, anillos, pulseras y cadenas. Por esta razón, en gemología (ciencia que estudia las piedras preciosas) y en orfebrería (ciencia que estudia la aleación de metales preciosos) se utiliza el *quilate* para definir el valor de dichos accesorios.

La palabra *quilate* tiene significados diferentes en gemología y en orfebrería.

El **quilate en gemología** se utiliza para medir la masa de una piedra preciosa. Así, un quilate equivale a la quinta parte de un gramo, es decir, a 0,2 gramos. Por ejemplo, una esmeralda de 4 quilates tiene una masa de 0,8 gramos.

El **quilate en orfebrería** se utiliza para indicar el grado de pureza que tiene una pieza de oro. Así, un quilate indica las partes de oro que tiene una joya, el cual puede estar aleado con otro tipo de metales como el bronce, cobre, hierro, entre otros. Un quilate equivale a $\frac{1}{24}$ parte de la pieza. Por ejemplo, en una cadena de 18 quilates se tiene que $\frac{18}{24}$ partes de la cadena están fabricadas en oro, mientras que la fracción restante $\frac{6}{24}$, corresponde a partes fabricadas con otro tipo de metales.

Los costos de cada piedra preciosa varían en el mercado de acuerdo con sus características físicas como rareza, pureza, color, brillo, durabilidad, resistencia, entre otras.

A continuación se muestran algunas piedras preciosas y sus precios durante el 2011 en Colombia.

Galería de imágenes

La esmeralda es la piedra preciosa más abundante en Colombia. El precio de cada quilate puede variar entre US$300 y US$10.000.

El rubí es la gema más valorada de las piedras preciosas. El precio de cada quilate puede ser hasta de US$146.000.

El costo del diamante depende de cuatro características: peso, color, pureza y tallado. El precio de cada quilate puede variar entre US$3.000 y US$40.000.

La aguamarina es una gema de color azul verdoso que se presenta, generalmente, en piedras de 10 quilates. El precio de cada quilate puede variar entre US$100 y US$510.

1. **Indica la fracción que corresponde a las partes de oro que tiene cada accesorio.**
   - **a.** Una pulsera de 12 quilates
   - **b.** Un anillo de 24 quilates
2. **¿Cuál es la masa de una piedra de aguamarina en gramos?**
3. **Si un diamante y un rubí son de 25 quilates, ¿cuál es la diferencia entre el precio del diamante y el precio del rubí?**
4. **Colombia aporta el 55% de las esmeraldas que circulan en el mercado de las piedras preciosas en el mundo y se han encontrado piedras de hasta 200 quilates.**
   - **a.** Si cada quilate de una de estas piedras se vendiera a su precio máximo, ¿cuál sería su precio?
   - **b.** ¿Cuál es la masa de una de estas esmeraldas?
5. **La explotación minera tiene consecuencias negativas en el medio ambiente pero positivas a nivel económico. Consulta sobre los beneficios y consecuencias de la explotación minera en nuestro país. Luego, resúmelos en un cuadro comparativo.**

...También sirve para entender cómo se calcula la rentabilidad de una empresa.

Cuando los ingresos de dinero son mayores que los costos que se generan en un negocio, se dice que una empresa es rentable.

En las empresas se realizan proyecciones de rentabilidad o utilidad a partir de un estado financiero pasado de donde se deducen porcentajes de crecimiento en los ingresos y en los costos.

Por ejemplo, una empresa importante del país realiza estados financieros trimestralmente y, a partir de ellos, proyecta su rentabilidad para el siguiente trimestre. En el primer trimestre de 2011, la empresa obtuvo ingresos operacionales de 1.863 mil millones de pesos y un costo de ventas de 1.406 mil millones de pesos para obtener una utilidad bruta de 457 mil millones de pesos. Suponiendo que desea incrementar sus ingresos en un 20% para el siguiente trimestre, seguramente requiere un mayor costo en ventas que puede ser incrementado en un 10%.

Para hallar la proyección de la rentabilidad se debe calcular el porcentaje requerido en los ingresos y costos actuales y sumar su valor a los obtenidos el trimestre anterior así:

$1.863 \times 20\% = 372{,}6$ y $1.863 + 372{,}6 = 2.235{,}6$ (Ingresos operacionales)

$1.406 \times 10\% = 140{,}6$ y $1.406 + 140{,}6 = 1.546{,}6$ (Costos de ventas)

Es decir, que la proyección de los ingresos operacionales para el próximo semestre es de 2.235,6 mil millones de pesos y los costos de ventas serán de 1.546,6 mil millones de pesos.

Luego, se calcula la diferencia entre los ingresos operacionales y los costos de ventas para obtener la nueva rentabilidad.

$2.235{,}6 - 1.546{,}6 = 689$ (Rentabilidad proyectada en miles de millones de pesos).

Finalmente, para hallar el porcentaje de rentabilidad esperado para el siguiente trimestre, se utiliza la siguiente expresión.

$$\text{Porcentaje de rentabilidad} = \frac{\text{Rentabilidad} \times 100}{\text{ingresos operacionales}}$$

Realizando la operación se obtiene:

$$\text{Porcentaje de rentabilidad} = \frac{689 \times 100}{2.235{,}6}$$
$$= 30{,}8\%$$

1. **Determina cuál sería el porcentaje de rentabilidad en una proyección para la empresa en cuestión si esta desea incrementar sus ingresos operacionales en el 30%.**
2. **La Bolsa de Valores de Colombia realiza estados financieros mensualmente y los compara con los resultados obtenidos durante el mismo mes del año inmediatamente anterior.**

   En la tabla se muestran los ingresos y costos operacionales durante noviembre del 2011 en comparación con noviembre del 2010 en miles de millones de pesos.

Ingresos operacionales		Gastos operacionales	
2010	2011	2010	2011
54.850	63.727	31.964	38.598

   a. Indica la rentabilidad en la bolsa de valores durante el mes de noviembre.

   b. ¿Cuál es el porcentaje de incremento de los ingresos operacionales en noviembre del 2011 respecto al 2010?

   c. Si desearan crecer en un 10% los ingresos operacionales para noviembre del 2011, ¿cuál será su porcentaje de rentabilidad?

Trabaja con Pedazzitos 1.2

Objetivo: practicar la resolución de operaciones con fracciones, en forma numérica y mediante su representación gráfica.

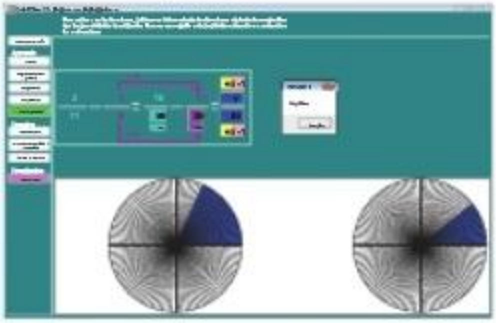
Descripción: resolver sumas y restas de fracciones encontrando el denominador común a partir de la representación gráfica. Luego, practicar operaciones combinadas de suma y resta. Además, resolver multiplicaciones y divisiones entre fracciones.

Para acceder a Pedazzitos 1.2, ingresa y descarga el programa en: pedazzitos.programas−gratis.net/descargar#estasviendo

1. Selecciona la aplicación Pedazzitos 1.2. Luego, elige la opción **Extraer todos** y haz clic en el icono. PedaZZitos 1.2

2. Haz clic en **Suma y resta** en el panel **Aprende**, para que aparezca la suma o resta de dos fracciones con sus respectivas representaciones gráficas en la parte inferior. Luego, haz clic en los denominadores de las fracciones hasta encontrar el denominador común.

3. Utiliza los botones +5 y −1 para anotar el resultado de la suma o de la resta. Si la respuesta es correcta, el numerador y el denominador del resultado se resaltarán con color azul y aparecerá el aviso *Muy bien*.



4. En el panel **Practica,** haz clic en **SUMA Y RESTA**. Aparecerá una operación entre tres fracciones, cada una con una lista de los múltiplos de su denominador.

5. Elige en cada lista el mínimo común múltiplo de los denominadores. Luego, utiliza los botones +5 y −1 para indicar los numeradores de las fracciones.

6. Haz clic en **Comprobar**. Si la operación es correcta aparecerán los números en verde.

7. Realiza otras operaciones haciendo clic, nuevamente, en el botón **SUMA Y RESTA**.

8. En el panel **Practica**, haz clic en el botón **MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN**. Luego, elige la operación e indica el resultado utilizando los botones +5 y −1. Verifica tu respuesta haciendo clic en *Comprobar*.

9. Realiza las siguientes operaciones haciendo clic, nuevamente, en el botón **MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN** del panel **Practica**.

a. $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{2}{4}$

b. $\frac{5}{7}\div\frac{3}{20}$

c. $\frac{1}{7}\times\frac{4}{3}$

d. $\frac{1}{5}+\frac{7}{4}-\frac{1}{3}$

Trabaja con SMathStudio

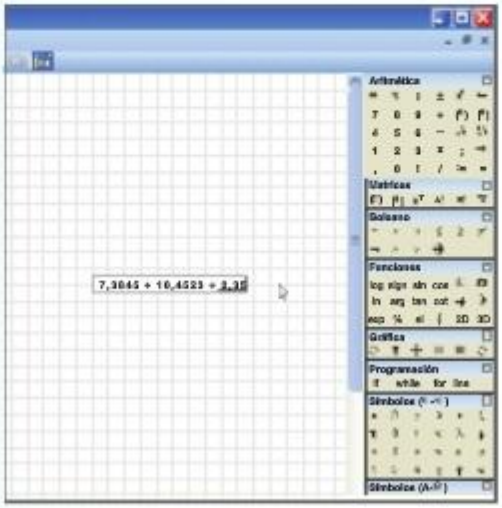
Objetivo: realizar sumas y restas con expresiones decimales.

Descripción: escribir una adición de números decimales en el programa SMathStudio y resolverla. Luego, realizar una sustracción y practicar la resolución de operaciones combinadas de suma y resta.

Para acceder a SMathStudio, ingresa y descarga el programa en: smath – studio.softonic.com

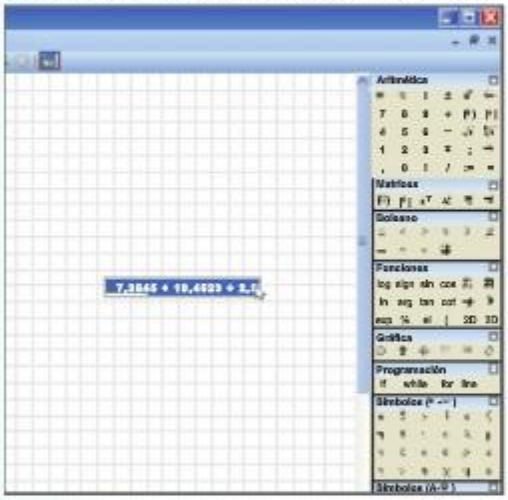
❶ Haz clic en el menú Inicio de programa y haz clic en SMathStudio.

❷ Haz clic sobre el **área de trabajo** y digita la siguiente operación 7,3845 + 10,4523 + 2,35.



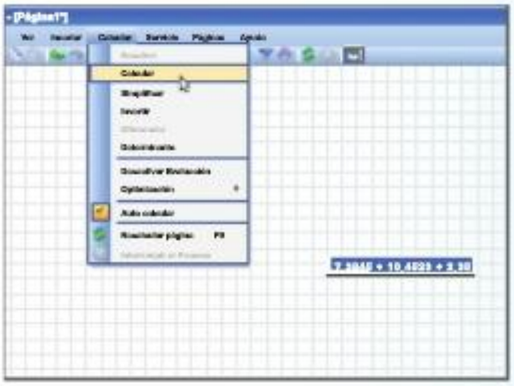
7,3845 + 10,4523 + 2,35

❸ Selecciona la operación haciendo clic izquierdo sostenido, como se ve en la siguiente gráfica.



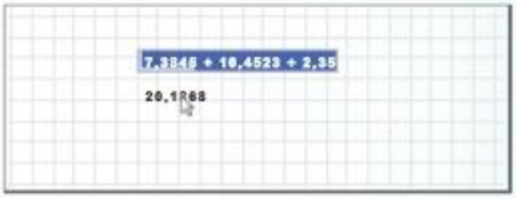
7,3845 + 10,4523 + 2,3

❹ Ubica en la barra de herramientas la opción **calcular** y, luego de que se despliegue la ventana, haz clic en **calcular** para evaluar la operación.



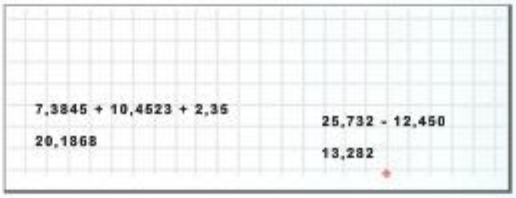
7,3845 + 10,4523 + 2,35

❺ La suma aparecerá debajo de la operación.



7,3845 + 10,4523 + 2,35
20,1868

❻ Repite los pasos 2 a 5 para realizar la siguiente resta : 25,732 − 12,450



7,3845 + 10,4523 + 2,35
20,1868

25,732 - 12,450
13,282

❼ Utiliza SMathStudio para realizar las siguientes operaciones:

a. 527,354 + 827,302 + 405,102

b. 385,420 2 +38,250

c. 827,354 + 908,302 2 325,+07

5 Números enteros

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender cómo está conformado el **conjunto** de los **números enteros**.
- **Utilizar** los **números enteros** en **diferentes contextos**.
- **Ubicar correctamente puntos en el plano cartesiano.**
- **Realizar operaciones con números enteros.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba PISA

4 Multimedia

1 Galería

9 Actividades

1 Audio

9 Imprimibles

3 Enlaces web

Cuanto sabes...

1. Ordena los siguientes acontecimientos históricos, desde el más reciente hasta el más antiguo.

a. En 1914 inició la Primera Guerra Mundial.

b. En 1956 se inventó el reloj digital.

c. En 1452 nació Leonardo da Vinci.

d. En el año 650 se inventó del molino de viento.

2. Escribe el número que falta para que se cumpla la igualdad.

a. $18 + [\ \ ] = 35$

b. $[\ \ ] \times 5 = 90$

c. $28 - [\ \ ] = 18$

d. $108 \div [\ \ ] = 9$

3. Resuelve el siguiente problema.

La temperatura de una ciudad en la mañana fue de 11 °C y en la tarde aumentó 9 °C. ¿Cuál fue la temperatura en la tarde?

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer la altitud en la que habitan algunos animales.

La altitud es la distancia vertical de un objeto, con respecto a un nivel cero, que generalmente corresponde al nivel del mar y puede ser positiva cuando se mide hacia la atmósfera o negativa cuando se mide hacia las profundidades del mar.

- Lee más acerca de este tema en la página 196.

Cronología de los números enteros

Egipto. Se escribe en el papiro *Boulaq 18* el signo nfr para indicar el cero.

Babilonia. Utilizan dos cuñas para simbolizar el cero.

India. Brahmagupta utiliza los números negativos para representar deudas.

Alemania. Michael Stifel utiliza por primera vez los signos + y − para simbolizar los números enteros.

Italia. Gerolamo Cardano estudia los números negativos en su obra *Ars Magna* y los denomina como números "falsos".

Alemania. Karl Weierstrass realiza la construcción formal del conjunto de los números enteros.

Enlace web
Recurso imprimible
Ampliación multimedia

1. Conjunto de números enteros

Los números enteros se aplican en muchas ciencias. Por ejemplo, se aplica en meteorología para mostrar cómo varía la temperatura. En finanzas se utiliza para presentar las ganancias o pérdidas de una empresa en un determinado período de tiempo y en física se usa para indicar el desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta y el aumento o disminución de su velocidad.

1.1 Concepto de número entero

En los números naturales no se pueden resolver sustracciones tales como $5 - 7$ y $9 - 12$, en las que el minuendo es menor que el sustraendo. Para calcular la solución de este tipo de operaciones, es necesario ampliar el conjunto de los números naturales al conjunto de los números enteros.

El conjunto de números enteros está formado por el cero, los números positivos y los números negativos. Los números negativos se escriben anteponiendo un signo menos a cada número natural y los números positivos son los números naturales excepto el cero.

El conjunto de los números enteros negativos se simboliza $\mathbb{Z}^-$ y se determina por extensión, así:

$$\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$$

El conjunto de los números enteros positivos se simboliza $\mathbb{Z}^+$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

El **conjunto de los números enteros** se simboliza $\mathbb{Z}$ y es la unión de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Al determinar por extensión el conjunto $\mathbb{Z}$ se tiene que:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

EJEMPLOS

Escribir un número entero que represente cada situación.

a. En la Antártida se registró una temperatura de 20 grados centígrados bajo cero.

Las temperaturas bajo cero se pueden representar con números enteros negativos. Así, la temperatura que se registró en la Antártida se representa con el número -20.

b. Las ganancias de una empresa en un día fueron \$700.000.

Las ganancias se pueden representar con números enteros positivos. Así, las ganancias de la empresa se representan con el número 700.000.

c. El lugar expuesto más bajo de la Tierra se encuentra en la orilla del mar Muerto, a 413 metros bajo el nivel del mar.

La ubicación de lugares que se encuentran por debajo del nivel del mar se pueden representar con números enteros negativos. Así, el lugar expuesto más bajo de la Tierra se representa con el número -413.

Historia de las matemáticas

Números negativos en la historia

Antiguamente los hindúes y los chinos utilizaban los números negativos para indicar deudas. Para esto, los hindúes escribían un punto encima de las cifras y los chinos escribían el número negativo en rojo.

Muchos matemáticos no aceptaban los negativos como números porque a diferencia de los números naturales no tenían un significado concreto. Solo fueron aceptados como números cuando el matemático alemán Weierstrass realizó su construcción formal.

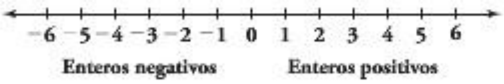
Recurso imprimible

1.2 Representación de los números enteros en la recta numérica

Actividad

Los números enteros se pueden representar en la recta numérica de la siguiente forma:

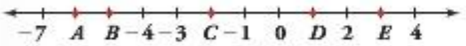
- **Primero,** se ubica un punto sobre la recta al cual le corresponde el número 0.
- **Segundo,** se hacen marcas a la izquierda y a la derecha del cero de tal forma que el espacio entre dos marcas consecutivas sea el mismo para todas las marcas.
- **Luego,** se asocia cada marca con un número entero ubicando los enteros positivos a la derecha del cero y los enteros negativos a la izquierda, así:



Es importante tener en cuenta que a cada número le corresponde un único punto y viceversa, a cada punto le corresponde solo un número entero. La distancia entre dos números enteros consecutivos siempre es la misma.

EJEMPLOS

1. Escribir los números enteros que corresponden a cada letra.



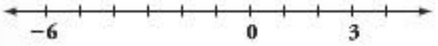
Se identifica el número que representa cada letra, teniendo en cuenta que a la derecha se ubican los enteros positivos y a la izquierda los enteros negativos. Por tanto, se tiene que $A = -6$, $B = -5$, $C = -2$, $D = 1$ y $E = 3$.

2. Representar en una recta numérica los números enteros −6 y 3.

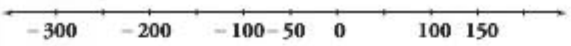
Primero, se traza la recta y se ubica el cero.

Luego, se realizan las marcas teniendo en cuenta que la distancia entre dos marcas consecutivas debe ser la misma.

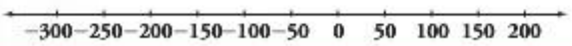
Finalmente, se ubica el −6 a la izquierda del cero y el 3 a la derecha.



3. Completar la recta numérica con los números enteros que faltan.



Como la recta está dividida en partes iguales, se completan los espacios siguiendo la secuencia de números de 50 en 50, así:



4. Leer y responder.

Los pisos de un edificio se pueden representar con números enteros. En la siguiente imagen se muestra un edificio con la representación del cero.

a. ¿Cuáles son los números enteros que representan los sótanos?

Como los dos sótanos están debajo del cero los números enteros que los representan son números negativos. Debido a que el primer sótano está más cerca del cero, se representa con el número −1. Así mismo, como el segundo sótano está dos pisos por debajo del cero se representa con el número −2.

b. ¿Cuál es el número entero que representa la terraza?

Como la terraza se encuentra arriba del cero el número entero que la representa es un número positivo. Debido a que la terraza está cinco pisos arriba del cero, se representa con el número +5.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Escribe el número entero que representa cada situación.

1. El fondo del mar Caribe colombiano alcanza aproximadamente los 3.000 m de profundidad.
2. Alejandro Mago nació en el año 356 antes de Cristo en Macedonia.
3. El récord mundial de inmersión libre (buceo sin equipo) es de 120 m de profundidad.
4. La altura del pico más alto del nevado del Ruiz está a 5.400 m sobre el nivel del mar.

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

5. La resta es una operación que siempre tiene solución en el conjunto de números naturales. ( )
6. Los números enteros están conformados por los números enteros positivos, el cero y los números enteros negativos. ( )
7. Algunos números naturales no son números enteros. ( )
8. Algunos números enteros no son positivos ni negativos. ( )

Representa cada conjunto de números enteros en la recta numérica.

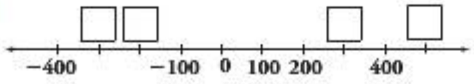
9. $A = \{-5, 4, -3, 0, 7\}$
10. $B = \{-2, 6, 3, -1, -4\}$
11. $C = \{1, -7, 5, 4, -6, -3, -9, 7\}$
12. $D = \{-8, 5, -6, -4, 2, 1, 8, -9, -3, -1\}$

Resuelve.

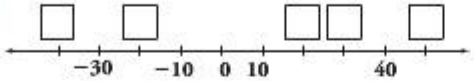
13. Escribe una situación que se relacione con las deudas y las ganancias de una empresa. Luego, escribe los números enteros correspondientes y represéntalos en una recta numérica.

Completa las rectas con los números enteros que faltan.

14.



15.

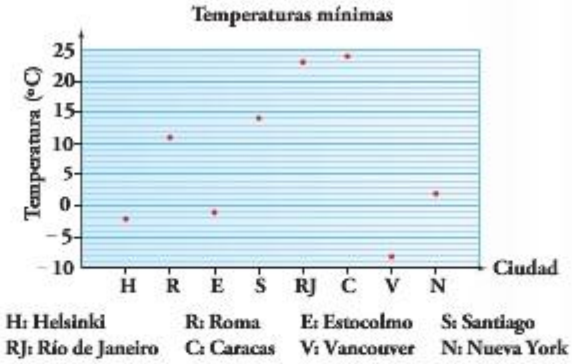


Escribe los números enteros correspondientes a cada situación. Luego, represéntalos en la recta numérica.

16. Acontecimientos históricos.

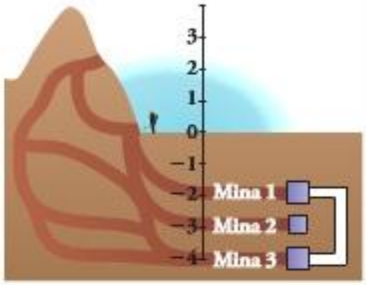
Año	Acontecimiento
850 a. C.	Homero escribe la *Ilíada*.
776 a. C.	Primeros juegos olímpicos.
752 a. C.	Fundación de Roma.
1925 d. C.	Invención del televisor.
1939 d. C.	Inicio de la Segunda Guerra Mundial.
1967 d. C.	Publicación de *Cien años de soledad*.

17. Temperaturas mínimas de varias ciudades.



Lee y resuelve.

Antonio trabaja en las minas que se encuentran en una montaña, las cuales se muestran en la siguiente figura.



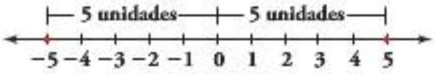
Los recorridos que hace durante tres días son: el primer día sube 2 niveles y baja 6; el segundo día baja 4 niveles y sube 2; y el tercer día sube 2 niveles y baja 5.

18. ¿Qué número entero representa cada mina?
19. ¿En qué mina trabajó Antonio cada día?

Números opuestos

Dos números enteros son **opuestos** si están a la misma distancia del cero en la recta numérica y tienen signos diferentes.

Por ejemplo, -5 y 5 son números opuestos, ya que ambos números están a cinco unidades del cero y tienen signos diferentes, así:



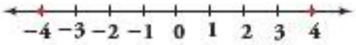
EJEMPLOS

1. Ubicar en la recta numérica el número -4. Luego, determinar gráficamente su opuesto.

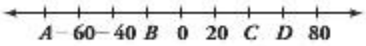
Primero, se ubica el número -4 en la recta numérica, el cual está cuatro unidades a la izquierda de 0.

Luego, se ubica el número 4, el cual está cuatro unidades a la derecha del 0.

Finalmente, se tiene que el opuesto de -4 es 4, porque ambos están a igual distancia del cero y tienen signos diferentes.



2. Hallar el número entero que representa cada letra. Luego, determinar su número opuesto.



Primero, se determina la escala en la que está la recta numérica. Como el número que está enseguida del cero, a la derecha, es 20 los números de la recta están ubicados de 20 en 20.

Luego, se determina el número entero que representa cada letra. Por tanto, se tiene que $A = -80$, $B = -20$, $C = 40$ y $D = 60$.

Finalmente, se determinan los números opuestos. El opuesto de -80 es 80, el de -20 es 20, el de 40 es -40 y el de 60 es -60.

3. Simplificar cada expresión.

a. $-(-19)$.

La expresión $-(-19)$ se lee "el opuesto de -19", el cual es 19. Por tanto, se tiene que $-(-19) = 19$.

b. $-(-(-5))$.

La expresión $-(-(-5))$ se lee "el opuesto del opuesto de -5". El opuesto de -5 es 5 y a su vez el opuesto de 5 es -5. Por tanto, se tiene que $-(-(-5)) = -5$.

4. Escribir la situación opuesta y el número entero que la representa.

a. El tesoro se encontró en el mar a 200 m de profundidad.

La situación es "el tesoro se encontró a 200 m sobre el nivel del mar". El número entero que representa esta situación es 200.

b. Manuel apostó en un partido de fútbol y ganó 5.000 pesos.

La situación es "Manuel apostó en un partido de fútbol y perdió 5.000 pesos". El número entero que representa esta situación es -5.000.

5. Leer y responder.

Sandra y Luis practican escalada en una montaña. Los dos acordaron que el día en que uno de ellos ascienda una determinada cantidad de metros, el otro debe descender el mismo número de metros. El primer día Sandra descendió 45 m y el segundo día Luis ascendió 38 m.

a. ¿Cuál es el número entero que representa la cantidad de metros que ascendió Luis el primer día?

Sandra descendió 45 m el primer día, por tanto, el número que representa su descenso es -45. Como Luis debió ascender la montaña ese día, el número entero que representa su ascenso es 45.

b. ¿Cuál es el número entero que representa la cantidad de metros que descendió Sandra el segundo día?

Luis ascendió 38 m el segundo día, por tanto, el número que representa su ascenso es 38. El número entero que representa el descenso de Sandra -38.

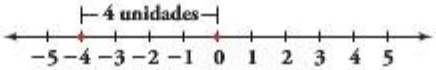
1.3 Valor absoluto

Actividad

El **valor absoluto** de un número entero es la distancia del número a cero en la recta numérica.

El valor absoluto de un número a se simboliza $|a|$ y se lee *valor absoluto de a*.

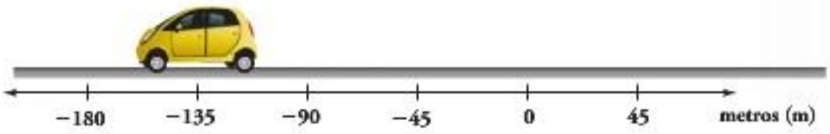
Por ejemplo, el valor absoluto de -4 se simboliza $|-4|$ y es igual a 4, pues la distancia de -4 a 0 es de cuatro unidades, como se muestra en la siguiente recta numérica.



Como $|4|$ también es igual a 4, en general se tiene que el valor absoluto de un número y su opuesto es el mismo.

EJEMPLOS

1. Expresar como valor absoluto la distancia recorrida por el vehículo desde 0.



La distancia recorrida por el vehículo se expresa como $|-135|$ que es igual a 135. Por tanto, el vehículo ha recorrido 135 metros.

2. Encontrar los valores para x que cumplen cada igualdad.

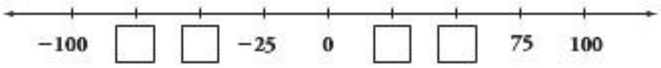
a. $|x| = 12$

Los números enteros cuyo valor absoluto es 12 son 12 y -12 ya que la distancia de cada número a 0 es de 12 unidades.

b. $|x| = 0$

El único número entero cuyo valor absoluto es 0 es el mismo cero.

3. Determinar el valor absoluto de los números enteros que completan la siguiente recta numérica.



Primero, se determina la escala en la que está la recta numérica. Como la diferencia entre 100 y 75 es 25, la distancia entre dos números consecutivos de la recta numérica es de 25 unidades.

Luego, se escriben los números enteros que faltan contando de 25 en 25. Los números que faltan a la izquierda del cero son -75 y -50, y los números que faltan a la derecha del cero son 25 y 50.

Finalmente, se halla el valor absoluto de los números que completan la recta numérica. Por tanto, se tiene que $|-75| = 75$, $|-50| = 50$, $|25| = 25$ y $|50| = 50$.

Matemática*mente*

¿Cuál es el valor que resulta al simplificar la expresión $|-|-5||$?

1.4 Orden en los números enteros

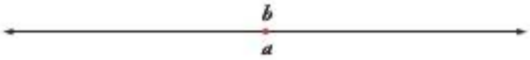
Enlace web · Actividad · Recurso imprimible

Dados dos números enteros *a* y *b*, entre ellos se puede presentar una y solo una de las siguientes relaciones.

- $a < b$, si en la recta numérica *a* se encuentra a la izquierda de *b*.

- $a > b$, si en la recta numérica *a* se encuentra a la derecha de *b*.

- $a = b$, si en la recta numérica *a* y *b* se encuentran ubicados en el mismo punto.



Ten en cuenta que…

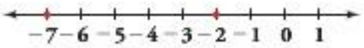
Cualquier número negativo es menor que 0 y cualquier número positivo es mayor que 0.

EJEMPLOS

1. Ubicar cada par de números en una recta numérica. Luego, establecer la relación de orden entre los dos.

a. -7 y -2

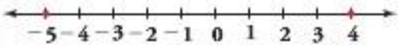
Se ubican los números enteros en la recta numérica.



Como -7 está a la izquierda de -2, entonces, -7 es menor que -2, es decir, $-7 < -2$.

b. 4 y -5

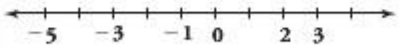
Se ubican los números en la recta numérica.



Como 4 está a la derecha de -5, entonces, 4 es mayor que -5, es decir, $4 > -5$.

2. Ordenar de menor a mayor los números -3, 3, 2, -5 y -1.

Primero, se ubican los números en una misma recta.



Luego, se identifican los números menores, los cuales están a la izquierda en la recta numérica.

Finalmente, se tiene que $-5 < -3 < -1 < 2 < 3$.

3. Escribir $<$, $>$ o $=$ según el caso.

a. -13 ____ -8

Como -13 está a la izquierda de -8 en la recta numérica, entonces, $-13 < -8$.

b. $|-15|$ ____ $-|15|$

Primero, se determinan los valores absolutos.

$$|-15| = 15 \text{ y } |15| = 15$$

Luego, se halla $-|15| = -15$

Finalmente, se tiene $|-15| > -|15|$ porque 15 es mayor que -15.

4. Representar con números enteros los siguientes récords mundiales de buceo en diferentes modalidades, establecidos en el 2010. Luego, ordenar los números de mayor a menor.

Peso constante sin aletas: 100 m
Peso constante con aletas: 124 m
Buceo libre dinámico sin aletas: 218 m
Buceo libre dinámico con aletas: 265 m
Inmersión libre: 120 m.

Como los desplazamientos por debajo del nivel del mar se pueden representar con números negativos, los números enteros que representan los récords son: -100, -124, -218, -265 y -120.

Al ordenar los números de mayor a menor se tiene que:

$$-100 > -120 > -124 > -218 > -265$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde.

20. Si *a*, *b* ∈ $\mathbb{Z}$, de tal forma que *a* se ubica a la izquierda del 0 en la recta numérica y *b* a la derecha, ¿cuál es el mayor de ambos números?

21. ¿Qué número tiene como valor absoluto 10 y en la recta numérica se ubica a la izquierda de 0?

22. ¿Cuándo el valor absoluto de un número es mayor que el número?

23. Si *a*, *b*, *c* ∈ $\mathbb{Z}$ de tal forma que en la recta numérica *a* está a la izquierda de *b* y *c* está a la izquierda de *a*, ¿cuál es el número mayor?

Escribe una situación opuesta y el número entero que la representa.

24. Gané 5.000 pesos.

25. El termómetro registró una temperatura de 3 °C bajo cero.

26. Ricardo incrementó su masa corporal en 8 kilogramos.

27. Una roca se encuentra a 6 metros bajo el nivel del mar.

Escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta con un ejemplo.

28. Algunos números negativos son mayores que cero. ( )

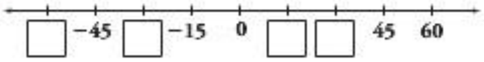
29. El opuesto de algunos números no es positivo ni negativo. ( )

30. El valor absoluto de algunos números enteros es positivo. ( )

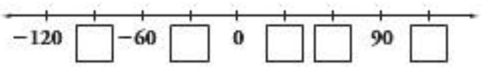
31. Todos los números negativos son menores que cualquier número positivo. ( )

R **Determina el valor absoluto de los números que completan cada recta numérica.**

32.



33.



E **Escribe $>$, $<$ o $=$ según corresponda.**

34. -8 ☐ 10

35. -15 ☐ -18

36. $-(-12)$ ☐ -12

37. $-|8|$ ☐ $|-8|$

38. $-(-10)$ ☐ $|-10|$

39. $-|-17|$ ☐ $|-(-17)|$

R **Encuentra dos valores para *x* de tal manera que se cumpla cada expresión.**

40. $|-x| = 8$

41. $-|x| = -7$

E **42. Completa la siguiente tabla.**

a	b	$-a$	$-b$	$\|a\|$	$\|b\|$
8		−8	−3		3
−5	2			5	
−7			−4		
	12	−13			

E **Ordena de mayor a menor cada grupo de números enteros y descubre los nombres de dos municipios colombianos.**

4	−5	3	−8	−7	6	−11
T	A	U	G	N	I	O

43. ____________________

−10	0	−15	−40	−8	−25	−42	−33
I	C	P	U	H	A	E	Q

44. ____________________

Escribe cinco ejemplos que verifiquen cada proposición.

45. De dos números positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

46. De dos números negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

S **Lee y resuelve.**

47. Los siguientes países registraron temperaturas extremas durante el 2010: Irak 52 °C bajo cero, Bolivia 46 °C bajo cero, Rusia 45 °C, Colombia 42 °C y Pakistán 53 °C bajo cero. Ordena de mayor a menor las temperaturas. Luego, indica en qué país se registró la menor temperatura y en qué país se registró la mayor temperatura.

2. Operaciones con números enteros

Ampliación multimedia

En los números enteros también están definidas la adición, la sustracción, la multiplicación y la división.

2.1 Adición de números enteros

Para sumar números enteros se deben tener en cuenta los siguientes casos:

Caso 1. Suma de dos números enteros con el mismo signo

En este caso, se realiza la suma de los valores absolutos de los números y al resultado se le coloca el signo de los sumandos.

Caso 2. Suma de dos números enteros con distinto signo

En este caso, se restan los valores absolutos de los números y al resultado se le coloca el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

La suma de números enteros se puede representar en la recta numérica. Para ello, se ubica el primer sumando y se avanza o se retroceden tantas unidades como indique el segundo sumando, según sea positivo o negativo.

EJEMPLOS

1. **Efectuar las siguientes sumas entre números enteros.**

a. $(-12) + (-17)$

Primero, se hallan los valores absolutos de los sumandos.

$$|-12| = 12 \text{ y } |-17| = 17$$

Luego, se suman los valores absolutos de los sumandos.

$$|-12| + |-17| = 12 + 17 = 29$$

Finalmente, se escribe la suma de los valores absolutos con el signo de los sumandos.

$$(-12) + (-17) = -29$$

b. $(-19) + 13$

Primero, se hallan los valores absolutos de los sumandos.

$$|-19| = 19 \text{ y } |13| = 13$$

Luego, se restan los valores absolutos de los sumandos.

$$|-19| - |13| = 19 - 13 = 6$$

Finalmente, se escribe la suma con el signo del sumando cuyo valor absoluto es mayor.

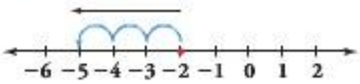
$$(-19) + 13 = -6.$$

2. **Representar la suma $(-2) + (-3)$ en la recta numérica.**

Primero, se ubica el -2 en la recta numérica.

Luego, se retroceden tres unidades a la izquierda.

Finalmente, se tiene que $(-2) + (-3) = -5$.



3. **Un submarino se encuentra a 80 metros de profundidad y desciende 55 metros más. ¿Qué profundidad alcanza el submarino?**

Primero, se expresan los datos del problema con números enteros.

-80: profundidad inicial del submarino.

-55: metros que desciende el submarino.

Luego, se suman los números enteros. Para esto, se realizan los siguientes pasos:

$|-80| + |-55| = 135$ Se suman los valores absolutos.

$(-80) + (-55) = -135$ Se escribe la suma con el signo de los sumandos.

Finalmente, se tiene que el submarino alcanza una profundidad de 135 metros.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • S Soluciono problemas

Responde.

48. ¿Cuál es el signo del resultado de la suma de dos números enteros negativos?

49. ¿Cuál es el signo del resultado de la suma de dos números enteros con signos diferentes?

50. ¿Cuál es el resultado de sumar un número entero con su opuesto?

E Resuelve las siguientes operaciones y descifra el nombre de un matemático del siglo XVIII.

51. $(-13) + (-7)$ L
52. $(-9) + 15$ A
53. $18 + (-21)$ E
54. $4 + (-10)$ N
55. $(-17) + (-6)$ R
56. $(-21) + 12$ U
57. $28 + (-19)$ O
58. $(-14) + 17$ D

−20	−3	9	−6	6	−23	3

−3	−9	−20	−3	−23

E 59. Completa la tabla.

a	b	$a + b$	$-a + (-b)$	$-a + b$
5	8			
4	−3			
−6	7			
−9	−9			

Resuelve y responde.

Completa los siguientes cuadrados mágicos teniendo en cuenta que la suma de cada columna, fila y diagonal de tres casillas debe ser la misma.

60.

2	−5	
	−1	
		−4

61.

−5	−3	−1
		−6

62. ¿Puede tener cada cuadrado mágico más de una solución? Justifica tu respuesta.

Escribe dos problemas de adición de números enteros que se relacionen con las siguientes situaciones. Luego, resuélvelos.

63. Las ganancias de una empresa en una semana.

64. La temperatura corporal de una persona.

S Plantea una adición de números enteros para cada situación. Luego, resuelve.

65. Un radar registra el movimiento de un submarino. Si inicialmente el submarino se encuentra a 32 m bajo el nivel del mar y luego, desciende 23 m, ¿a qué profundidad se encuentra el submarino?

66. En la mañana la temperatura de una ciudad fue de 3 grados bajo cero. Si durante el día la temperatura se incrementó en 5 °C, ¿cuál fue la temperatura al final del día?

67. Un cardumen que está a 7 metros bajo el nivel del mar, desciende 4 metros y luego desciende otros 6 metros. ¿Qué profundidad alcanza el cardumen con respecto al nivel del mar?

68. Camila está en el piso 26 de un edificio. Si sube 12 pisos y después baja 18, ¿a qué piso del edificio llega?

69. Pitágoras nació en el año 582 a. C. y murió a los 86 años de edad. ¿En qué año murió?

70. La parte más profunda de una mina está a 120 m por debajo del nivel de la Tierra. ¿A qué distancia de la superficie de la Tierra se encuentran dos mineros que ascendieron 85 m a partir de la parte más profunda de la mina?

71. Un cachalote que se encontraba a 63 m de profundidad descendió 585 m para buscar alimento. Si después de encontrar alimento ascendió 128 m, ¿a qué profundidad con respecto al nivel del mar se ubicó el cachalote finalmente?

2.2 Sustracción de números enteros

Actividad Recurso imprimible

Para hallar la diferencia de dos números enteros, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Por tanto, se tiene que:

Si a, b son números enteros, entonces,

$$a - b = a + (-b)$$

donde a es el minuendo y b es el sustraendo.

EJEMPLOS

1. **Resolver.**

Se cree que en el año 2510 a. C. se construyó la pirámide de Micerino y en el año 2570 a. C. la pirámide de Keops. ¿Cuál es la diferencia en años entre la construcción de ambas pirámides?

Primero, se expresan los años de construcción de las pirámides como números.

−2.510: año de construcción de la pirámide de Micerino.

−2.570: año de construcción de la pirámide Keops.

Segundo, se establece la relación de orden entre los dos números. Como −2.510 está a la derecha de −2.570 en la recta numérica, entonces, $-2.510 > -2.570$.

Luego, se resta −2.570 a − 2.510. Para esto, se realizan los siguientes pasos.

$(-2.510) - (-2.570)$ Se plantea la resta.

$= (-2.510) + 2.570$ Se suma −2.510 con el opuesto de −2.570.

Finalmente, se tiene que la diferencia entre la construcción de ambas pirámides es de 60 años.

2. **El matemático griego Euclides falleció aproximadamente en el año 265 a. C. y el matemático hindú Brahmagupta nació en el año 598 d. C.**

a. **Si Euclides vivió cerca de 60 años, ¿en qué año nació?**

Primero, se representa con un número entero el año en el que falleció Euclides, es decir, −265.

Luego, se plantea la resta entre −265 y 60.

$$-265 - 60 = -325$$

Finalmente, se tiene que Euclides nació en el año 325 a. C.

b. **¿Cuál es la diferencia entre el año en que nació Brahmagupta y el año en que falleció Euclides?**

Se resta −265 a 598 así:

$598 - (-265)$ Se plantea la resta.

$= 598 + 265$ Se suma el minuendo con el opuesto del minuendo.

$= 863$

Por tanto, la diferencia entre el año que nació Brahmagupta y el año en que falleció Euclides es de 863 años.

3. **En un campeonato de baloncesto, tres cursos de grado sexto obtuvieron los siguientes resultados.**

Curso	Puntos a favor	Puntos en contra
6A	115	120
6B	145	78
6C	81	99

Hallar la diferencia entre los puntos a favor y los puntos en contra de cada curso.

Primero, se plantea la resta entre los puntos a favor y los puntos en contra de cada curso.

6A: 115 − 120 6B: 145 − 78 6C: 81 − 99

Luego, se escribe cada resta como la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo y se resuelve.

$115 + (-120) = -5$; $145 - 78 = 67$; $81 - 99 = -18$

Finalmente, se tiene que el curso 6A tiene 5 puntos en contra, 6B tiene 67 puntos a favor y 6C tiene 18 puntos en contra.

Recuerda que…

Los signos de agrupación son:

Llaves: { }

Corchetes: [ ]

Paréntesis: ( )

Simplificación de signos y paréntesis

Recurso imprimible Actividad

Para resolver operaciones que combinan sumas y restas con números enteros se suprimen los signos de agrupación teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo más, se deja la cantidad que está dentro de él con el mismo signo.
- Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo menos, se cambia el signo de la cantidad que está dentro de él.

Por ejemplo, si *a* es un número entero, para suprimir paréntesis se tiene que:

$$+(a) = +a \qquad +(-a) = -a \qquad -(a) = -a \qquad -(-a) = +a$$

EJEMPLOS

1. Suprimir signos de agrupación y realizar las operaciones.

$$\{-[-458 - (-199)] + 567\} - (344 - 209)$$

Para simplificar la expresión se realizan los siguientes pasos:

$\{-[-458 - (-199)] + 567\} - (344 - 209)$

$= \{-[-458 + 199] + 567\} - (344 - 209)$ Se suprimen los paréntesis.

$= \{458 - 199 + 567\} - (344 - 209)$ Se suprimen los corchetes.

$= \{826\} - (344 - 209)$ Se efectúan las operaciones que están en las llaves.

$= 826 - 344 + 209$ Se suprimen las llaves y los paréntesis.

$= 691$ Se realiza la resta y la suma.

Por tanto, $\{-[-458 - (-199)] + 567\} - (344 - 209) = 691$.

2. Un esquimal se desplaza por una montaña como se muestra en la figura. ¿A qué altura de la base de la montaña se encuentra el campamento del esquimal?

Primero, se determinan los metros que ascendió y que descendió el esquimal en cada trayecto de su recorrido hasta el campamento. En el primer trayecto el esquimal ascendió 850 m, en el segundo descendió 230, en el tercero ascendió 540 m y en el cuarto descendió 125 m.

Luego, se le resta a la cantidad total de metros que ascendió el esquimal, la cantidad total de metros que descendió, así:

$(850 + 540) - (230 + 125)$ Se plantea la resta.

$= 850 + 540 - 230 - 125$ Se suprimen los paréntesis.

$= 1.035$ Se realizan las operaciones.

Finalmente, se tiene que la altura del campamento del esquimal con respecto a la base de la montaña es de 1.035 metros.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Completa.

72. Si a un número entero se le resta su opuesto la diferencia es __________ .

73. Si a la suma de dos números enteros se les resta la suma de sus números opuestos, entonces, el resultado es __________ .

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

74. La diferencia de dos enteros positivos es siempre positiva. (   )

75. La diferencia de un número entero positivo con un entero negativo es siempre negativa. (   )

76. La diferencia entre dos números enteros es igual a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo. (   )

77. La diferencia entre un número entero y su doble es igual al opuesto del número. (   )

78. Completa la tabla.

a	b	$-b$	$a+(-b)$
10		-15	-5
8		12	
	-18		9
-11		11	

Suprime signos de agrupación y realiza las operaciones.

79. $\{[(-13) - (22 - 5)] - 30\} + (19 - 35)$

80. $[(-11) - (2 - 19)] - [(5 - 18) - (17 + 13)]$

81. $[(-12) + (-9)] - \{-[(-4) + 18] + 6\}$

82. $\{(-11) - [(-16) + (-12)]\} + [(-17) - 18]$

Escribe una pregunta relacionada con cada situación. Luego, respóndela aplicando la sustracción de números enteros.

83. La temperatura de un frigorífico estaba en 25 °C y disminuyó 13 °C más.

84. Hipatia de Alejandría fue una filósofa y maestra griega que nació en el año 460 a. C. y murió en el año 415 a. C.

Resuelve.

85. Un termómetro marcaba 8 grados bajo cero a las 7 de la mañana. Cinco horas más tarde subió 9 grados y 6 horas después bajó 5 grados. ¿Qué temperatura marcó finalmente?

86. El Partenón de Atenas se construyó aproximadamente en el año 432 a. C. y la Torre Eiffel se terminó de construir en 1889. ¿Cuántos años transcurrieron entre la construcción de ambas edificaciones?

Observa la siguiente tabla. Luego, responde.

Invento	Año-País
Polea	400 a. C. Grecia
Faro	220 a. C. Egipto
Papel de fibra de madera	231 d. C. China
Molino de viento	850 d. C. Persia

87. ¿Cuántos años hay de diferencia entre la invención de la polea y el molino de viento?

88. ¿Cuántos años pasaron desde la invención del faro y el papel de fibra de madera?

Lee la siguiente situación. Luego, resuelve.

María practica escalada en una montaña de 4.832 m de altura, durante tres días. Antes de alcanzar la cima de la montaña María asciende y desciende una determinada cantidad de metros cada día, como se muestra en la siguiente tabla.

	Ascenso	Descenso
Día 1	1.348	50
Día 2	736	828
Día 3	584	773

89. Plantea una expresión con sumas y restas de números enteros que represente los desplazamientos realizados por María.

90. Calcula cuántos metros le hacen falta a María para alcanzar la cima de la montaña.

2.3 Multiplicación de números enteros

Matemática*mente*

Si se multiplica 583 veces -100 por sí mismo, ¿cuál es el signo del producto?

Para multiplicar dos números enteros se deben tener en cuenta los siguientes casos:

- **Caso 1.** Si los números enteros tienen el mismo signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es positivo.
- **Caso 2**. Si los números enteros tienen distinto signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es negativo.

Los casos anteriores se generalizan en la siguiente **ley de los signos.**

Actividad

Recurso imprimible

Ley de los signos	
El producto de dos factores del mismo signo es positivo.	$(+)(+) = +$ $(-)(-) = +$
El producto de dos factores de signos diferentes es negativo.	$(+)(-) = -$ $(-)(+) = -$

Multiplicación de tres o más números enteros

Para multiplicar tres o más números enteros se multiplican los valores absolutos de los números enteros. Luego, considerando el número de factores, se procede así:

- Si el número de factores negativos es par, el producto es positivo.
- Si el número de factores negativos es impar, el producto es negativo.
- Si todos los factores son positivos, el producto es positivo.

EJEMPLOS

1. Efectuar las siguientes multiplicaciones.

a. $(-12) \times (-6)$

Se multiplican los valores absolutos de ambos números y se escribe el producto positivo porque los factores tienen igual signo.

$$(-12) \times (-6) = 72$$

b. $(-15) \times 7$

Se multiplican los valores absolutos de ambos números.

$$15 \times 7 = 105$$

Luego, se escribe el producto negativo porque los factores tienen distinto signo.

$$(-15) \times 7 = -105$$

c. $(-6) \times (-5) \times (3)$

Se multiplican los valores absolutos de los números.

$$6 \times 5 \times 3 = 90$$

Luego, se escribe el producto con signo positivo porque el número de factores negativos es par.

$$(-6) \times (-5) \times (3) = 90$$

2. Aplicar la multiplicación de números enteros para resolver los siguientes problemas.

a. La deuda de la compañía A es cinco veces mayor que la deuda de la compañía B. Si la compañía B debe 13 millones de pesos, ¿cuánto debe la compañía A?

Primero, se representa con -13 la deuda de la compañía B.

Luego, se calcula la deuda de la compañía A multiplicando -13 por 5 así, $(-13) \times 5 = -65$.

Finalmente, se tiene que la deuda de la compañía A es de 65 millones de pesos.

b. Una máquina perforadora realiza una excavación. Si cada hora excava 25 metros, ¿cuántos metros excavará en 7 horas?

Primero, se representa con -25 el número de metros que excava la máquina en una hora.

Luego, se calcula cantidad de metros que excavará la máquina en 7 horas multiplicando -25 por 7.

$$(-25) \times 7 = -175$$

Finalmente, la máquina excavará 175 metros en 7 horas.

2.4 División exacta de números enteros

Actividad

Para hallar el cociente de dos números enteros se deben tener en cuenta los siguientes casos.

- **Caso 1.** Si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, entonces, el cociente es positivo.
- **Caso 2.** Si el dividendo y el divisor tienen distinto signo, entonces, el cociente es negativo.

En los anteriores casos se puede observar que la ley de signos que se aplica en la multiplicación también se utiliza en la división entre números enteros. Esto se debe a que la división es la operación inversa de la multiplicación, pues permite hallar el factor desconocido de una multiplicación cuando se conoce el producto y el otro factor.

Matemática*mente*

¿Cómo se expresa

$45 \times (-5) = -225$

como una división?

EJEMPLOS

1. Realizar la siguiente división entre números enteros.

a. $(-165) \div 11$

Se realiza la división entre los valores absolutos del dividendo y del divisor.

$$165 \div 11 = 15$$

Luego, se escribe el cociente negativo porque el dividendo y el divisor tienen signos distintos.

$$(-165) \div 11 = -15$$

b. $(-325) \div (-13)$

Se realiza la división entre los valores absolutos del dividendo y del divisor.

$$325 \div 13 = 25$$

Luego, se escribe el cociente positivo porque el dividendo y el divisor tienen el mismo signo.

$$(-325) \div (-13) = 25$$

Recuerda que...

La ley de signos solo se aplica en la multiplicación y en la división de números enteros, ya que, por ejemplo, la suma de dos enteros negativos no es positiva sino negativa.

2. Aplicar la división de números enteros para resolver los siguientes problemas.

a. El factor de enfriamiento de una sustancia A es de −33 °C. ¿Cuál es el factor de enfriamiento de una sustancia B si es la tercera parte del factor de enfriamiento de la sustancia A?

Como el factor de enfriamiento de la sustancia A es de −33 °C y el de la sustancia B es la tercera parte, se realiza la siguiente división.

$$-33 \div 3 = -11$$

Por tanto, el factor de enfriamiento de la sustancia B es de −11 °C.

b. A nueve socias de una empresa les prestaron \$12.573.000 sin intereses. Si se dividieron la deuda en partes iguales, ¿cuánto debe pagar cada socia?

Primero, se representa con un entero negativo la deuda, es decir, −12.573.000.

Luego, se divide la deuda entre los nueve socias de la empresa.

$$-12.573.000 \div 9 = -1.397.000$$

Finalmente, se tiene que cada socia debe pagar \$1.397.000.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

91. Una multiplicación tiene 136 factores y todos son negativos. ¿Cuál es el signo del producto?

92. En una división el dividendo es negativo y el divisor es positivo. ¿Cuál es el signo del cociente?

Justifica con un ejemplo las siguientes proposiciones.

93. El producto de cinco factores pares, cada uno con signo negativo, es negativo.

94. El doble de un número entero puede ser menor que el número.

95. La quinta parte de un número divisible entre 10 puede ser un entero negativo menor que -20.

96. La división exacta entre un número de la forma $-12ab$ y -4, donde a son las decenas y b las unidades, es un número positivo.

E **Relaciona cada multiplicación con su respectivo producto.**

97. $(-3) \times (4) \times (-6)$ **a.** -90
98. $(-10) \times (9)$ **b.** -72
99. $(-4) \times (-2) \times (-6) \times (-3)$ **c.** 144
100. $(6) \times (5) \times (-3) \times (-1)$ **d.** 90
101. $9 \times (-8)$ **e.** 72
102. $(4) \times (3) \times (-12)$ **f.** -144

En el siguiente cuadrado, el producto de cada fila y columna es el mismo.

− 4	5	x
5		− 4

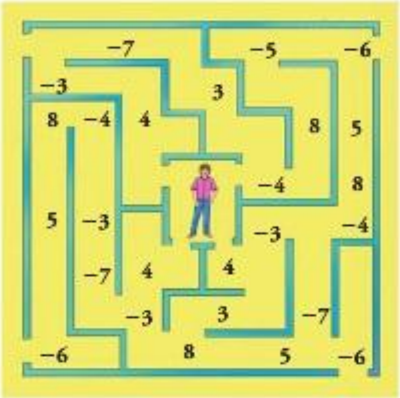
103. Escribe dos posibles valores de x. Luego, completa el cuadrado con cada valor.

R **Se define la operación @ como $x @ y = -7 \times x \times (108 \div y)$. Resuelve las siguientes operaciones.**

104. $4 @ 2$
105. $-5 @ 3$
106. $2 @ 4$
107. $6 @ 4$
108. $-3 @ 6$
109. $5 @ 1$
110. $7 @ 9$
111. $-8 @ 12$
112. $6 @ -6$

E **Encuentra el camino que siguió Miguel para salir del laberinto, teniendo en cuenta que recorrió en orden el cociente de las siguientes divisiones, y no pasó dos veces por el mismo trayecto.**

113. $(-12) \div (-3)$
114. $(-15) \div (5)$
115. $(21) \div (-3)$
116. $(-45) \div (-15)$
117. $(48) \div (-12)$
118. $(-72) \div (-9)$
119. $(-80) \div (16)$
120. $(66) \div (-11)$



R **Halla el factor desconocido en cada caso, teniendo en cuenta que la división es la operación inversa de la multiplicación.**

121. $585 \div \square = 45$
122. $-25 \times \square = -225$
123. $\square \div 36 = -4$
124. $\square \div (-18) = 0$

S **Aplica la multiplicación o la división de números enteros, para resolver los siguientes problemas.**

125. La temperatura de un refrigerador disminuye 3 °C cada hora. ¿En cuánto disminuirá la temperatura del refrigerador al cabo de 8 horas?

126. Con una perforadora de petróleo se excavó un pozo de 1.248 metros en 12 días, trabajando 8 horas diarias. Si cada hora se excavó la misma cantidad de metros, ¿cuántos metros se excavaron en una hora?

127. Si las acciones de cierta compañía disminuyen su rentabilidad en 18 pesos cada mes, ¿cuánto habrá perdido al cabo de 3 años?

2.5 Polinomios aritméticos y aplicaciones

Actividad Ampliación multimedia Recurso imprimible

Un **polinomio aritmético** es una expresión en la que aparecen indicadas varias operaciones.

Para resolver un polinomio es necesario tener en cuenta que:

- Si el polinomio no tiene signos de agrupación, primero se efectúan las multiplicaciones y las divisiones, y luego, las sumas y las restas.
- Si el polinomio tiene signos de agrupación, primero se efectúan las operaciones que están dentro de estos, luego se resuelven las multiplicaciones y las divisiones, y por último, las sumas y las restas.

Recuerda que...

La multiplicación $a \times b$, donde a y b son números enteros, se puede escribir como $(a)(b)$.

EJEMPLOS

1. Resolver el siguiente polinomio aritmético.

$$\{-5 \times [(25 - 7) \div (-3 + 12)]\} - 6$$

Se realizan los siguientes pasos:

$\{-5 \times [(25 - 7) \div (-3 + 12)]\} - 6$

$= \{-5 \times [18 \div 9]\} - 6$ Se realizan la resta y la suma que están en los paréntesis.

$= \{-5 \times 2\} - 6$ Se efectúa la división.

$= -10 - 6 = -16$ Se multiplica y se resta entre enteros.

Por tanto, se tiene que el polinomio es igual a -16.

2. Los puntos que perdió y ganó Laura en tres niveles de un juego de computador, se muestran en la siguiente tabla.

Nivel	Puntos
1	−750
2	1.700
3	−842

Calcular el promedio de los puntos que obtuvo Laura.

Primero, se plantea un polinomio aritmético en el cual se divida la suma de todos los puntos entre el número de niveles que jugó Laura.

$$[(-750) + (1.700) + (-842)] \div 3$$

Luego, se resuelve el polinomio, así:

$[(-750) + (1.700) + (-842)] \div 3$

$= [1.700 - 1.592] \div 3$ Se suman los puntos negativos.

$= [108] \div 3$ Se le restan los puntos negativos a los positivos.

$= 36$ Se efectúa la división.

Finalmente, se tiene que Laura logró un promedio de 36 puntos en los tres niveles del juego.

Matemática*mente*

Escribe un polinomio aritmético que represente la siguiente expresión. Luego, resuélvelo.

"La suma de 7 y 5, dividida entre la resta de sus números opuestos".

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · M Modelo · E Ejercito · S Soluciono problemas

Completa.

128. Para resolver un polinomio que no tiene signos de _________, primero se realizan las _________ y las _________, y luego se efectúan las _________ y las _________.

129. Explica cuál fue el error que se cometió al resolver el siguiente polinomio. Luego, resuélvelo correctamente.

$(5 + 7) \div (-2) - 4 \times (-3)$

$= 12 \div (-2) - 4 \times (-3)$

$= (-6) - 4 \times (-3)$

$= (-10) \times (-3)$

$= 30$

E Resuelve los siguientes polinomios aritméticos.

130. $(-13) - 15 - 22 \times 9 + (-11)$

131. $-4 + [(-6 + (-8)) \div (5 - (-2))]$

132. $17 - [(4 - (-12)) \div (15 + (-7))] \times (-11)$

133. $-5 + (9 - 8 \div 4 + 1) - 215 \times 5$

134. $[(-10) \times (-8)] - \{[(-5) - 7] \div [(-2) + 6]\}$

135. $(-18) \times (-8) - (-5) - 27 \div (-9)$

M Escribe el polinomio que representa cada enunciado. Luego, resuélvelo.

136. El triple de 18 disminuido en 14.

137. La sexta parte de −1.446 aumentada en 500.

138. El cociente de 225 entre −5 aumentado en 12.

139. La suma de 38 y 25 dividida entre el producto de −7 y 3.

Escribe un polinomio aritmético cuyo resultado sea cada uno de los siguientes números.

140. −18 **141.** −38 **142.** 130

S Plantea un polinomio aritmético para resolver los siguientes problemas.

143. La llamada guerra de los Cien Años, de origen puramente sucesorio y feudal, fue una prolongada serie de conflictos armados entre los reyes de Francia y los de Inglaterra, que se inició en 1337 y terminó en 1453. ¿Cuántos años duró la guerra si hubo 55 años de tregua?

144. Mónica consigna el lunes 150.000 pesos en su cuenta de ahorros, el martes retira 80.000 pesos, el miércoles retira 30.000 pesos, el jueves consigna 58.000 pesos y el viernes retira 75.000 pesos. ¿Cuánto dinero le queda a Mónica en la cuenta después de los cinco días?

145. Para estudiar los cambios de temperatura de una ciudad, un meteorólogo registra todos los días de una semana la temperatura a las 7 a. m. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Día	Temperatura (°C)
Lunes	−4
Martes	8
Miércoles	−2
Jueves	6
Viernes	9
Sábado	−7
Domingo	−3

Calcula la temperatura promedio de la ciudad en esa semana.

146. El primer emperador romano fue Augusto quien gobernó desde el año 27 a. C. hasta el año 14 d. C. Luego, gobernó Tiberio desde el 14 d. C. hasta el año 37 d. C. ¿Cuántos años duraron los dos gobiernos?

147. El largo de un rectángulo se expresa con el polinomio $5 \times 18 - 6 - 12 \div 4$ y el ancho con $[25 - (-7)] \div 8$. Calcula su perímetro y su área.

S Lee y resuelve.

Juan y Diana resolvieron un examen de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se obtenían 24 puntos y por cada respuesta incorrecta, 15 puntos.

148. Si Diana tuvo 9 respuestas correctas, ¿cuál fue su puntaje?

149. Si Juan tuvo 16 respuestas incorrectas, ¿cuál fue su puntaje?

150. Diana tuvo 7 respuestas correctas y Juan 13. ¿Cuántos puntos más obtuvo Juan que Diana?

3. Ecuaciones

Actividad Recurso imprimible Enlace web

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay uno o varios valores desconocidos llamados incógnitas.

Todas las ecuaciones tienen dos partes a las que se les denomina **miembros** de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación $2x - 7 = 5$, la expresión $2x - 7$ es el **primer miembro** de la ecuación, y 5 es el **segundo miembro** de la ecuación.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad. Por ejemplo, la solución de la ecuación $x - 10 = -6$, es $x = 4$, puesto que $4 - 10 = -6$.

3.1 Propiedad uniforme

Ampliación multimedia

Para resolver una ecuación se utiliza la siguiente propiedad, que se denomina propiedad uniforme.

Si a ambos miembros de una ecuación se les suma, resta, multiplica o divide por un mismo número, la igualdad se conserva.

Es importante tener en cuenta que cuando se dividen ambos miembros de una ecuación por un mismo número, ese número debe ser diferente de cero, es decir, si a, b y c son números enteros y $a = b$, se tiene que $a \div c = b \div c$, siempre y cuando $c \neq 0$.

EJEMPLOS

1. **Resolver la ecuación $-6x + 15 = -45$.**

Para resolver la ecuación se realizan los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} -6x + 15 &= -45 \\ -6x + 15 - 15 &= -45 - 15 && \text{Se aplica la propiedad uniforme.} \\ -6x &= -60, && \text{Se realiza la resta.} \\ \frac{-6x}{-6} &= \frac{-60}{-6} && \text{Se aplica la propiedad uniforme.} \\ x &= 10 && \text{Se efectúa la división.} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = 10$.

2. **Escribir una ecuación que represente el siguiente enunciado "el doble de un número disminuido en 9 es igual a 15". Luego, resolverla.**

Se realizan los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} 2x - 9 &= 15 && \text{Se plantea la ecuación.} \\ 2x - 9 + 9 &= 15 + 9 && \text{Se suma 9 en ambos miembros de la ecuación.} \\ 2x &= 24 && \text{Se realiza la suma.} \\ \frac{2x}{2} &= \frac{24}{2} && \text{Se divide entre 2 ambos miembros de la ecuación.} \\ x &= 12 && \text{Se realiza la división.} \end{aligned}$$

Por tanto, el número cuyo doble disminuido en 9 es igual a 15, es 12.

Historia de las matemáticas

Michael Stifel

Michael Stifel (1487-1567), fue un teólogo y matemático alemán. Su principal obra es la *Arithmetica integra*, un libro publicado en 1554, que trata, entre otros temas, sobre números negativos. Stifel utilizó números negativos para estudiar cierto tipo de ecuaciones. Además divulgó el uso del signo menos "—" para designar la resta.

Matemática*mente*

La edad de Ricardo es 5 veces la edad de Sofía y la tercera parte de la edad de David, quien tiene 30 años. Halla las edades de Sofía y de Ricardo.

3. Plantear una ecuación para cada situación. Luego, resolverla.

a. Un alpinista que ascendía por una montaña sufrió una lesión cuando había escalado tres cuartos de altura de la montaña. Si se lesionó a los 3.000 metros de altura, ¿cuál es la altura de la montaña?

Para resolver el problema se realizan los siguientes pasos:

$\frac{3}{4}x = 3.000$ Se plantea la ecuación.

$\frac{3}{4}x \times 4 = 3.000 \times 4$ Se multiplica por 4 ambos miembros de la ecuación.

$3x = 12.000$ Se realiza la multiplicación.

$\frac{3x}{3} = \frac{12.000}{3}$ Se divide entre 3 ambos miembros de la ecuación.

$x = 4.000$ Se efectúa la división.

Por tanto, la altura de la montaña es de 4.000 metros.

b. Un parqueadero cobra 3.500 pesos por automóvil más 200 pesos por hora. Si Camilo pagó 4.500 pesos, ¿cuántas horas duró parqueado su automóvil?

Se realizan los siguientes pasos:

$3.500 + 200t = 4.500$ Se plantea la ecuación.

$3.500 - 3.500 + 200t = 4.500 - 3.500$ Se resta 3.500 en ambos miembros de la ecuación.

$200t = 1.000$ Se realiza la resta.

$\frac{200t}{200} = \frac{1.000}{200}$ Se divide por 200 ambos miembros de la ecuación.

$t = 5$ Se efectúa la división.

Por tanto, se tiene que el automóvil de Camilo duró parqueado 5 horas.

c. En la Patagonia (Argentina), existe un bosque sumergido en el lago Traful. Si se representa la profundidad a la que está sumergido el bosque con un número negativo, entonces su triple aumentado en -25 es igual a -115. ¿A qué profundidad se encuentra sumergido el bosque?

Se realizan los siguientes pasos:

$3x + (-25) = -115$ Se plantea la ecuación.

$3x - 25 = -115$ Se suprimen paréntesis.

$3x - 25 + 25 = -115 + 25$ Se suma 25 en ambos miembros de la ecuación.

$3x = -90$ Se efectúa la suma.

$\frac{3x}{3} = \frac{-90}{3}$ Se dividen entre 3 ambos miembros de la ecuación.

$x = -30$ Se realiza la división.

Por tanto, la profundidad a la que está sumergido el bosque es de 30 metros.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · M Modelo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

151. ¿Es 15 una solución de la ecuación $3x = 75$?

152. ¿Cómo se aplica la propiedad uniforme para resolver una ecuación?

153. Si b es divisible entre a y x es la incógnita, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $a \cdot x = b$?

154. Si a y b son números enteros positivos y $a > b$, ¿qué signo tiene el valor que representa x en la ecuación $a + x = b$?

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

155. Si $a = b$, entonces, $5a = 5b$.

156. Si $x = y$, entonces, $x + 4 = y$.

157. Si $a = b$, entonces, $a - 3 = b - 3$.

158. Si $(-2 + 2)\,x = (-2 + 2)$, entonces, $x = 1$.

E **Resuelve las ecuaciones. Luego, escribe la incógnita cuya solución se encuentra en la tabla y descubre la respuesta de la adivinanza.**

159. $l + 2 = -18$

160. $15 - 2o = 7$

161. $6m - 8 = -26$

162. $-e - 20 = -12$

163. $-3r - 9 = -27$

164. $23 - 4c = -5$

165. $-4i - 13 = 7$

166. $-25 + 7a = -39$

167. $12u + 18 = -30$

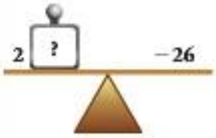
168. $-5g - 15 = 55$

"Vuelo de noche, duermo de día
y nunca verás plumas en el ala mía".

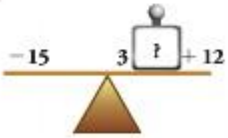
−3	−4	6	7	−5	−8	−20	−2	−14	4

R **Determina el valor que representa cada pesa para que las balanzas estén en equilibrio.**

169.



170.



Escribe una ecuación para cada una de las siguientes soluciones.

171. $a = 3$ **172.** $x = 9$ **173.** $m = 10$

M **Expresa una ecuación que represente cada enunciado. Luego, resuélvela.**

174. Un número más 18 es igual a 35.

175. El doble de un número menos 13 es igual a 17.

176. El triple de un número disminuido en 15 es igual a −3.

177. Cinco veces un número aumentado en 45 es igual a 50.

178. La mitad de un número es igual a −36.

179. La cuarta parte de un número más 10 es igual a 7.

S **Plantea una ecuación para cada situación. Luego, resuélvela.**

180. En una prueba de alpinismo Jaime debía ascender una montaña de 3.417 m, pero solo logró avanzar hasta la tercera parte de su altura. ¿A qué altura llegó Jaime?

181. Catalina presta 25.000 pesos y por cada semana que pasa cobra 500 pesos adicionales. Si le pagaron 30.000 pesos, ¿durante cuántas semanas prestó el dinero?

182. Un agujero azul es una cueva submarina. El Agujero azul de Dean es el más profundo del planeta y se encuentra en las Bahamas. Si el doble de su profundidad aumentada en −36 es igual a −440 metros, ¿cuál es su profundidad?

183. Rocío tiene 20.000 pesos más que el triple de dinero que tiene María. Si Rocío tiene 80.000 pesos, ¿cuánto dinero tiene María?

184. En un videojuego Santiago obtuvo 700 puntos más que la sexta parte de los puntos que consiguió Milena. Si Santiago logró 1.800 puntos, ¿cuántos puntos obtuvo Milena?

185. En un examen se asignan 6 puntos a las preguntas que se responden correctamente y −4 puntos, a las preguntas que se responden en forma incorrecta. Si Camilo respondió bien 5 preguntas y obtuvo 2 puntos, ¿cuántas preguntas respondió mal?

Conjunto de números enteros

Escribe el número entero que se relaciona con cada situación.

186. El delfín Mular alcanza una profundidad de hasta 390 metros para conseguir alimento. ______

187. El origen del vidrio fue aproximadamente en el año 3000 a. C. ______

188. José le debe al banco 5 millones de pesos. ______

189. María perdió 100.000 pesos en un negocio. ______

190. La altura del monte Aconcagua es de 6.692 metros sobre el nivel del mar. ______

191. Completa la tabla escribiendo el número entero que cumple cada condición.

Condición	Número
Su opuesto es el número −25.	
Es mayor que −9 y menor que −7.	
Su valor absoluto es 0.	
Es mayor que −24 y menor que el opuesto de 22.	
Es menor que el opuesto de −19 y mayor que el valor absoluto de −17.	

Escribe los números que faltan en cada secuencia numérica.

192. −10, −8, ____, −4, ____, ____, 2, 4

193. −55, ____, ____, ____, −35, −30, −25

194. ____, ____, −27, −18, ____, 0, 9 ____

195. 18, 12, ____, ____, −6, −12, ____, ____

196. 5, 1, 2, −2, −1, ____, ____, ____, ____

Simplifica cada expresión. Luego determina el opuesto del resultado.

197. $|-50| =$ ____ Su opuesto es: ____

198. $-(-18) =$ ____ Su opuesto es: ____

199. $-|(-13)| =$ ____ Su opuesto es: ____

200. $-|21| =$ ____ Su opuesto es: ____

201. $|-(-42)| =$ ____ Su opuesto es: ____

Utiliza los signos > y < para ordenar cada grupo de números enteros.

202. −5, 4, −3, 0, −2, 3, 1

____

203. 13, −14, −9, 10, −12, 11, −13

____

204. −11, 6, −4, 13, 9, −14, 4, 11

____

205. −35, 36, 40, −41, −42, 37, −38

____

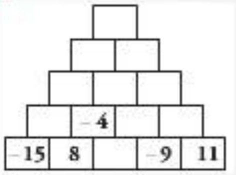
206. −121, 122, −123, 124, −125, 126, −127

____

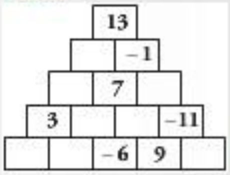
Operaciones con números enteros

Completa las siguientes pirámides, teniendo en cuenta que el número entero de cada casilla es igual a la suma de los números de las dos casillas inferiores.

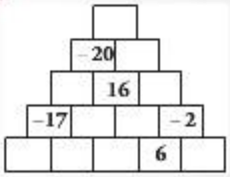
207.



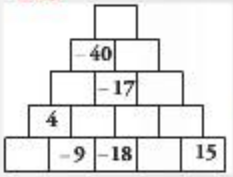
209.



208.



210.



Efectúa las siguientes multiplicaciones y divisiones.

211. $(7)(-5) =$ ____

212. $(-12)(-13) =$ ____

213. $(144) \div (-6) =$ ____

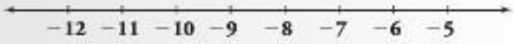
214. $(-1.024) \div (32) =$ ____

215. $(-6)(5)(-7)(11) =$ ____

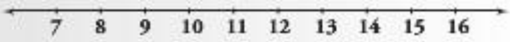
216. $[(-132.576) \div (-8)] \div (-12) =$ ____

Calcula cada suma. Luego, represéntala en la recta numérica.

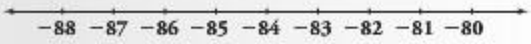
217. $(-5) + (-6) =$ ______



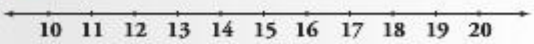
218. $(14) + (-5) =$ ______



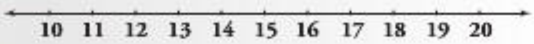
219. $(-81) + (-7) =$ ______



220. $(19) + (-8) =$ ______



221. $(20) + (-7) =$ ______



Completa el crucinúmero con los resultados de las siguientes operaciones.

Horizontales

222. $12 - 15 \div 3 - 37$

223. $((-3) + (-4) \times (-2) - (29)) \times (-1)$

224. $\{[28 + (-19)] \times (-5)\} - 33$

225. $[(-125) \times (-25)] \div 625$

Verticales

226. $(-31 - 17) \div (-4) + 20$

227. $343 \div \{[(-58) + (23)] \div (-5)\}$

228. $(-2 + 11) \times (-5 + 8) + 251$

229. $3 - [(12 + 7) \times (-2)]$

222	226		223	227
■		228	■	
■	■		229	■
224				225

230. Completa.

a	b	c	$a \times b + c$	$b \times c - a$
−3	9	10		
5	−4	−8		
−2	6	−7		
−8	−5	12		
14	−11	−7		
−9	16	−15		

Ecuaciones con números enteros

Escribe la ecuación que representa cada enunciado. Luego, resuélvela.

231. El triple de un número aumentado en −100 es igual a 50.

232. La octava parte de un número disminuida en 35 es igual a 64.

Resuelve las ecuaciones. Luego, escribe la incógnita cuya solución se encuentra en la tabla y descubre el nombre de una de las partículas constituyentes de la materia.

233. $2A + 5 = -13$

234. $6R - 10 = 2$

235. $5 - 3Q = 20$

236. $22 - K = 28$

237. $4U + 29 = -3$

238. $6 + 7S = 55$

−5	−8	−9	2	−6	7

PROBLEMAS PARA REPASAR

La siguiente tabla muestra las tres formas de gobierno que hubo en la Antigua Roma, así como el año aproximado en que inició y culminó cada una.

Forma de gobierno	Año de inicio	Año de culminación
Monarquía	753 a. C.	509 a. C.
República	509 a. C.	27 a. C.
Imperio	27 a. C.	476 d. C.

¿Cuántos años duró cada forma de gobierno? y ¿cuál forma de gobierno duró más tiempo?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántos años duró cada forma de gobierno en la Antigua Roma? y ¿cuál forma de gobierno duró más tiempo?

¿Cuáles son los datos del problema?

La Monarquía duró desde el año 753 a. C. hasta el año 509 a. C., la República desde el 509 a. C. hasta el 27 a. C. y el Imperio desde el 27 a. C. hasta el 476 d. C.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se representan con números negativos y positivos los años de inicio y culminación de cada forma de gobierno.

Forma de gobierno	Año de inicio	Año de culminación
Monarquía	-753	-509
República	-509	-27
Imperio	-27	-476

Luego, se le resta al número que representa la culminación de cada forma de gobierno, el número que representa su inicio. De esta forma se determina cuántos años duró cada forma de gobierno.

Monarquía: $-509 - (-753) = 244$

República: $-27 - (-509) = 482$

Imperio: $476 - (-27) = 503$

Finalmente, se ordenan los resultados de mayor a menor.

$$503 > 482 > 244$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se puede verificar cada resta sumando la diferencia con el sustraendo.

$244 + (-753) = -509$ $\quad$ $482 + (-509) = -27$ $\quad$ $503 + (-27) = 476$

Como el resultado de cada suma es igual al minuendo, se tiene que la diferencia en cada resta es correcta.

Por tanto, la Monarquía en la Antigua Roma duró 244 años, la República 482 y el Imperio 503. Así la forma de gobierno que más tiempo duró fue el imperio.

239. Una bióloga observa que una especie A de algas marinas habita a 10 m de profundidad y una especie B a 25 m de profundidad. ¿Cuál es la diferencia entre las profundidades de ambas especies de algas?

240. El fundador de la dinastía Han fue Liu Pang, un plebeyo que se rebeló contra la anterior dinastía reinante: la Qin. Con el nombre de Gao Zu, fue emperador de China desde el 202 a. C. al 195 a. C. Si murió el 167 a. C., calcula cuántos años transcurrieron desde que dejó de gobernar hasta su muerte.

241. En una congeladora, el termómetro indica 0 °C. Luego de cuatro horas, el termómetro registra −48 °C. Si la temperatura desciende constantemente cada hora, ¿cuántos grados disminuye por hora?

Responde las preguntas 242 a 244, de acuerdo con la siguiente información.

La siguiente tabla muestra las temperaturas extremas registradas en algunos lugares del planeta.

Lugar	Temperatura (°C)
Oimiakon en Siberia.	−76
Valle de la Muerte en EE. UU.	38
Vostok, en la Antártida.	−88
Dallol en Etiopía.	34

242. ¿En cuál lugar se registró la menor temperatura?

243. ¿Qué lugar registró la temperatura más alta?

244. ¿Cuál es la temperatura promedio de las regiones que se muestran en la tabla?

245. La Fosa de las Marianas es la fosa marina más profunda de la corteza terrestre con aproximadamente 11.033 m por debajo del nivel del mar, mientras que el monte Everest es la montaña más alta sobre el nivel del mar, con 8.848 m de altura. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre la cima del Everest de la Fosa de las Marianas?

Resuelve las actividades 246 a 249 de acuerdo con la siguiente información.

La línea del Ecuador divide al planeta en dos hemisferios: el hemisferio norte y el hemisferio sur. La latitud es la distancia, medida en grados, entre un lugar del planeta y la línea del Ecuador. Por definición, la latitud de la línea del Ecuador es de 0°.

La siguiente tabla muestra la ubicación de algunas ciudades según su latitud.

Ciudad	Latitud
Bogotá	4° Norte
Berlín	52° Norte
La Paz	16° Sur
Buenos Aires	34° Sur

246. Representa con un número entero la latitud de las ciudades que aparecen en la tabla.

247. Determina cuál es la ciudad que está más alejada de la línea del Ecuador.

248. Calcula cuántos grados hay de diferencia entre la latitud de Berlín y la de Buenos Aires.

249. Halla la latitud del glaciar Perito Moreno de Argentina, si es aproximadamente el triple de la latitud de La Paz.

...Para conocer la altitud en la que habitan algunos animales.

Galería de imágenes

La **altitud** es la distancia vertical de un objeto, con respecto a un nivel cero, que generalmente corresponde al nivel del mar y puede ser positiva cuando se mide hacia la atmósfera o negativa cuando se mide hacia las profundidades del mar.

La altitud es un factor determinante del clima y de las condiciones ambientales de una región, ya que por cada 100 metros de diferencia en la altitud, la temperatura ambiente cambia cerca de 0,6 °C. Así, la temperatura de un objeto disminuye cuando se aleja cada vez más del nivel del mar. Por esta razón, la altitud es de vital importancia en la supervivencia de los animales. A continuación se muestra la altitud a la cual pueden sobrevivir algunos animales.

Paraliparis copel copel es una especie marina que se encuentra en la zona norte y sur del Atlántico y vive a 1.690 metros bajo el nivel del mar.

Stauroteuthis syrtensis es un molusco con bioluminiscencia capaz de vivir a 2.500 metros bajo el nivel del mar.

Microlophus peruvianus es una lagartija que habita en regiones de Perú, Ecuador y Chile a una altitud de 2.500 metros.

Atelopus c. es una rana que habita en la cordillera de los Andes a una altitud de 3.000 metros sobre el nivel del mar.

Aquila chrysaetos es el águila real la cual forma su nido a una altura de 3.000 metros, para alejar sus crías de los depredadores.

Vultur gryphus es el cóndor andino que habita en Suramérica y sobrevuela a una altitud máxima de 7.000 metros.

1. **Representa, como un número entero, la altitud en la que habita cada animal.**
2. **Indica cuál es la especie que puede sobrevivir a menor altitud y la que alcanza mayor altitud.**
3. **Calcula la diferencia entre la altitud de cada par de animales.**
   a. El cóndor andino y el águila real.
   b. La lagartija de Perú y el molusco *Stauroteuthis syrtensis.*
   c. La *Paraliparis copel copel* y la rana *Atelopus c.*
4. **Consulta algunas enfermedades que se producen en los seres humanos debido al cambio de altitud. Luego, haz un resumen con la información que obtuviste y preséntalo a tus compañeros.**

Trabaja con Geonext

Objetivo: realizar las operaciones básicas adición, sustracción, multiplicación y división de números enteros.

Descripción: representar las operaciones básicas de los números enteros en el programa Geonext. Enseguida, variar los números enteros para realizar las operaciones básicas, encontrando generalidades y formular sus conclusiones.

Para acceder a Geonext, ingresa y descarga el programa en: www.geonext.uni-bayreuth.de

1. Haz clic en **Geonext**.
2. Observa la ventana que se despliega. Selecciona **Archivo**. Luego, haz clic en **Nueva pantalla**, como se muestra en la figura.

3. En la barra de herramientas, selecciona **Objetos**. Luego, haz clic en **Textos y cálculos**, después haz clic en Texto, como se muestra en la figura.

4. En la ventana que se despliega, haz clic en la opción **Término**.

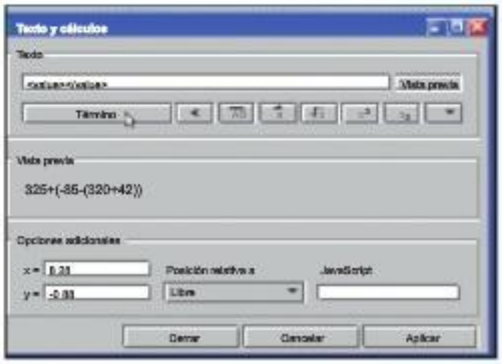
Texto: <value></value>

Vista previa: 325+(-85-(320+42))

5. Escribe la operación entre los términos <value> </value>, como se muestra en la figura.

Texto: <value>325+(-85-(320+42))</value>

6. Para verificar la notación haz clic en vista previa y luego clic en cerrar.



Texto: <value></value>

Vista previa: 325+(-85-(320+42))

7. Haz clic en **Aplicar**, para obtener el resultado.

Vista previa: -122

8. Utiliza Geonext para resolver las siguientes expresiones y analiza sus respuestas.
   - **a.** (345) × (−2 + 73)
   - **b.** ((−24) × (3)) + (−28 − 35))
   - **c.** ((420 − 328) + (−19 − 23)) × (−42)
   - **d.** ((835 − 528) + (−230)) × ((89 − 45) + 10)
   - **e.** (39.810 − 4.212) + (−32.050)

6 Geometría

Estándares: pensamientos espacial y métrico

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer y establecer relaciones de **paralelismo** y **perpendicularidad**.
- Construir, reconocer y clasificar **ángulos** y **polígonos**.
- Realizar los **movimientos** en **polígonos** e identificar el tipo de transformación aplicado a una figura.
- Aplicar el concepto de **perímetro** en la solución de situaciones problemáticas.

Encuentra en tu Libromedia

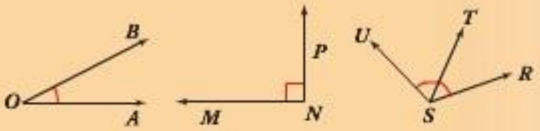
Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

- **9** Multimedia
- **1** Galería
- **13** Actividades
- **1** Audio
- **9** Imprimibles
- **2** Enlaces web

Lo que sabes...

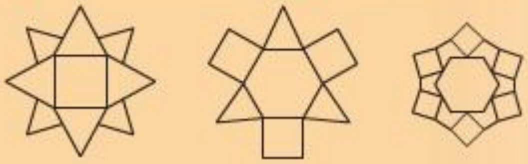
1. Observa los ángulos y completa la tabla.



Ángulo	AOB			TSU
Vértice	O			
Lados	$\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB}$			

2. Colorea cada polígono según la clave.

🟩 Polígonos regulares 🟥 Polígonos irregulares



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para reconocer los ángulos y posturas saludables al sentarse.

Las personas que estudian, así como quienes trabajan en una oficina, pasan muchas horas sentados en una silla. Con el tiempo, esto puede generar ciertos problemas de salud, como por ejemplo, desviaciones de la columna, dolores de espalda y daño en músculos, tendones y nervios.

:: Lee más acerca de este tema en la página 240.

Cronología de geometría

Egipto. Utilizan unidades de medidas antropomorfas. Es decir, a partir del cuerpo humano. La medida más conocida es el codo real que equivale a 0,523 metros.

Egipto. Se unifican las tablas de medida de longitud, como el dedo, palmo, mano, puño, codo sagrado, codo corto, codo real entre otros.

Grecia. Euclides, en su obra *"los elementos"*, muestra la geometría como un sistema de axiomas.

Francia. Jonathan Sisson construye el primer goniómetro, instrumento que permite medir el ángulo existente entre dos objetos.

Alemania. Carl Friedrich Gauss realiza la construcción del polígono regular de 17 lados utilizando regla y compás.

Alemania. Lidermann demuestra que el número π no puede ser raíz de ningún número y llega a la conclusión de que no se puede construir un cuadrilátero con la misma área de un círculo.

Actividad

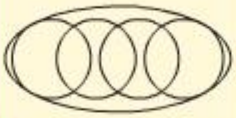
Recurso imprimible

1. Conceptos básicos de la geometría

Los conceptos básicos de la geometría son: punto, recta y plano. Estos conceptos no se pueden definir, sin embargo, tienen ciertas características que permiten describirlos y representarlos.

Matemática*mente*

Dibuja las figuras de un solo trazo. Es decir, sin levantar el lápiz.



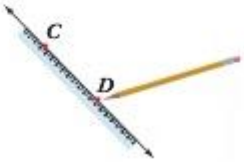
1.1 Punto, recta y plano

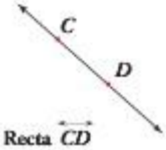
- El **punto** es el elemento geométrico más simple: no tiene tamaño, sólo indica una posición. La idea de punto se puede entender como la marca que deja un lápiz bien afilado sobre una hoja de papel.

  Los puntos se simbolizan con letras mayúsculas.

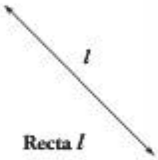
Punto *A*

- La **recta** está formada por una sucesión de puntos que se prolonga indefinidamente en dos sentidos opuestos. La idea de recta se puede entender como la marca que deja un lápiz al pasarlo a lo largo del borde de una regla. Cuando se representa una recta se dibujan flechas en cada extremo para indicar que se prolonga indefinidamente en ambos sentidos. Las rectas se simbolizan usando dos de sus puntos, o con letras minúsculas.



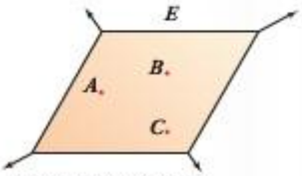


Recta $\overleftrightarrow{CD}$



Recta *l*

- El **plano** está conformado por un conjunto infinito de puntos y se prolonga en todas las direcciones. Una hoja de papel, una pared o el piso permite comprender la idea de plano. Para representar el plano se utilizan tres de sus puntos que no estén en la misma recta. Se puede simbolizar mediante estos tres puntos o mediante una letra mayúscula.



Plano *E* o plano *ABC*

Los puntos que pertenecen a una misma recta son **colineales**.

Los puntos que están en un mismo plano son **coplanares**.

EJEMPLO

De acuerdo con el gráfico, nombrar los siguientes elementos geométricos:

Una recta, un punto, un plano, puntos colineales, puntos coplanares.

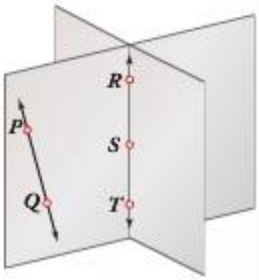
Una recta: $\overleftrightarrow{PQ}$

Un punto: *R*

Un plano: *PQS*

Puntos colineales: *R*, *S* y *T*

Puntos coplanares: *P*, *Q* y *S*

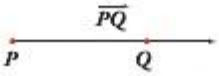


Semirrecta y segmento

A partir de los elementos geométricos estudiados anteriormente, se definen otros conceptos importantes para el estudio de la geometría.

Segmento: parte de la recta que comprende dos puntos y los puntos que están entre ellos.

Semirrecta: parte de la recta que comprende un punto y los puntos que están en una dirección a partir de éste.



EJEMPLO

Dibujar en un plano los siguientes elementos.

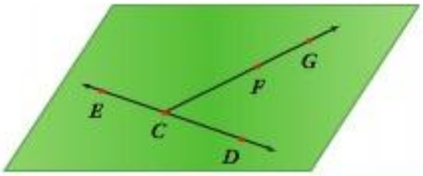
Una recta $\overleftrightarrow{CD}$.

Un segmento $\overline{CF}$.

Un punto E que sea colineal con los puntos C y D.

Una semirrecta $\overrightarrow{CG}$.

Una de las figuras que se puede construir, teniendo en cuenta las condiciones dadas, es la siguiente:



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • S Soluciono problemas

Relaciona cada situación con los conceptos básicos de la geometría. Explica tu respuesta.

1. Una estrella en el cielo.
2. Un rayo de luz.
3. La superficie del agua en un lago.

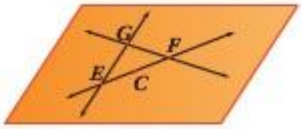
Determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

4. Dados dos puntos distintos, hay exactamente una recta que los contiene.
5. Dos rectas que se intersecan determinan un plano.
6. Tres puntos diferentes no colineales determinan un plano.

Resuelve.

7. Construye una figura geométrica donde se representen cinco puntos coplanares y no haya tres puntos colineales.

E Nombra los siguientes elementos, a partir de la figura.



8. Un punto: ______
9. Una recta: ______
10. Un plano: ______
11. Un segmento: ______
12. Tres puntos colineales: ______
13. Una semirecta: ______

S Soluciona.

Selecciona tres puntos diferentes no colineales en un plano.

14. ¿Cuántas rectas se pueden formar con estos tres puntos?
15. ¿Cuántas rectas se pueden formar con cuatro puntos no colineales? Analiza todas las posibilidades.

Ampliación multimedia

Recurso imprimible

Matemática*mente*

Mira de cerca la imagen y responde la pregunta.

¿Las líneas verticales son paralelas?

1.2 Rectas paralelas, secantes y perpendiculares

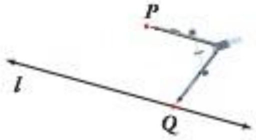
Dos rectas coplanares se pueden clasificar en paralelas, secantes o perpendiculares según si se intersecan o no, así:

- **Rectas paralelas:** dos rectas son paralelas si al prolongarse en ambas direcciones no se intersecan en ningún punto. Si l es paralela a m, se escribe, $l \parallel m$.
- **Rectas secantes:** dos rectas son secantes si se intersecan en un solo punto.
- **Rectas perpendiculares:** dos rectas son perpendiculares si son secantes y forman ángulos rectos, es decir, ángulos de 90°. Si l es perpendicular a m, se escribe, $l \perp m$.

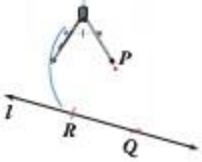
Construcción de rectas paralelas

Para construir una recta paralela a otra, que pase por un punto dado, se realiza el siguiente procedimiento:

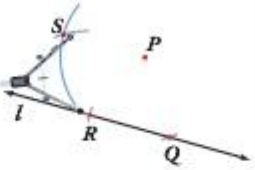
1. Se traza con una regla una recta l y se ubica el punto P fuera de ésta. Luego se ubica el punto Q sobre la recta y se toma con el compás la distancia entre P y Q.



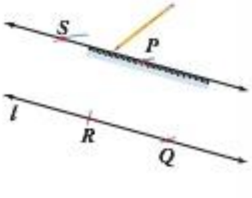
2. Con la abertura del compás, del paso anterior, se ubica un punto R sobre la recta l, con centro en Q. Luego, con la misma abertura se hace centro en P y se traza un arco.



3. Con la misma abertura del compás del paso 1 y con centro en R, se traza un arco de tal forma que interseque el arco trazado en el paso 2. El punto de intersección de ambos arcos se nombra S.

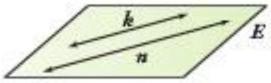


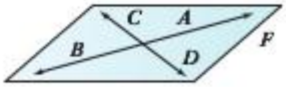
4. Se traza con una regla la recta $\overleftrightarrow{PS}$, la cual resulta paralela a la recta l.



EJEMPLO

Determinar en cada plano si las rectas son paralelas, secantes o perpendiculares.





En el plano E las rectas k y n son paralelas, porque no se intersecan en ningún punto. Se escribe $k \parallel n$.

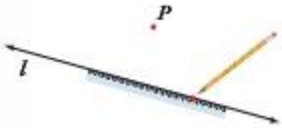
En el plano F las rectas AB y CD son secantes, porque se intersecan en un punto.

Construcción de rectas perpendiculares

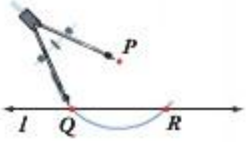
Recurso imprimible

Para construir una recta perpendicular a otra, que pase por un punto dado, se realizan los siguientes pasos:

1. Se traza con la regla una recta *l* y se ubica un punto *P* por fuera de esta.

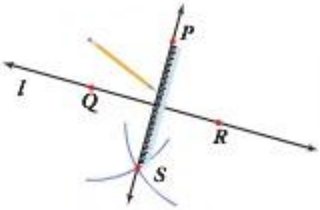


2. Haciendo centro con el compás en el punto *P*, se traza un arco que interseque a la recta *l* en dos puntos, *Q* y *R*.



3. Con la misma abertura del compás del paso 2, se hace centro en *Q* y se traza un arco por debajo de la recta *l*. Luego, se hace centro en *R* y se traza otro arco que corte al arco ya trazado en el punto *S*.

4. Se traza con la regla la recta $\overleftrightarrow{PS}$ que es perpendicular a la recta *l*.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Soluciono problemas

Responde.

16. ¿Cómo se distinguen dos rectas paralelas?

17. ¿Cómo se identifican dos rectas perpendiculares?

Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Explica con un ejemplo en cada caso.

18. Si $r \parallel s$, entonces, r y s son secantes.

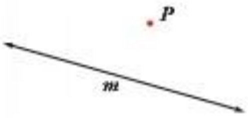
19. Si r y s son secantes, entonces, $r \perp s$.

20. Si $r \parallel s$ y $s \parallel t$, entonces, $r \parallel t$.

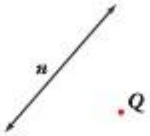
21. Si $r \parallel s$ y $s \perp t$, entonces, $r \parallel t$.

Con regla y compás, traza la recta que se indica por el punto señalado.

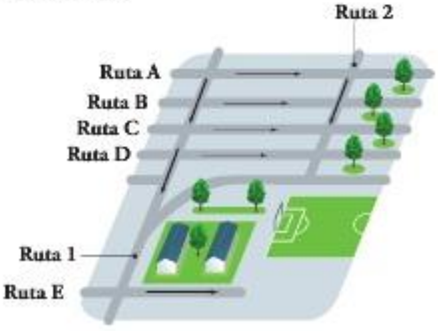
22. Paralela a la recta *m* por *P*.



23. Perpendicular a la recta recta *n* por *Q*.



Observa y resuelve.



24. Determina 7 pares de rectas paralelas.

25. Determina 5 pares de rectas perpendiculares.

2. Ángulos

Figura 1.

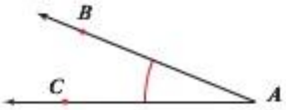
Un **ángulo** está formado por la unión de dos semirrectas que parten de un mismo punto. Las semirrectas corresponden al **lado inicial** y al **lado final** del ángulo, y el punto común es el **vértice** (figura 1).

Un ángulo se puede simbolizar de las siguientes formas:

- Se indica el vértice con una letra mayúscula anteponiéndole el símbolo ∢. Por ejemplo:

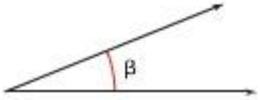
Se escribe ∢*B*

- Se nombran con letras mayúsculas el vértice, y un punto distinto en cada lado del ángulo. Luego, se escribe el símbolo ∢ y enseguida las letras de los puntos, dejando la del vértice siempre en el centro. Por ejemplo:

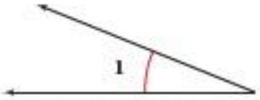


Se escribe ∢*BAC*

- Se escribe una letra griega (α, β) o un número entre los lados del ángulo, así:



Se escribe ∢β



Se escribe ∢1

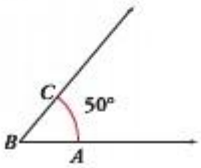
2.1 Medición de ángulos

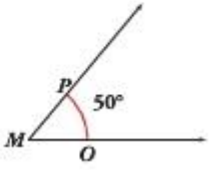
Recurso imprimible

La unidad de medida de la amplitud de un ángulo es el grado. Para determinar la medida de un ángulo se usa como instrumento el transportador. Así, para medir un ángulo se hace coincidir el centro del transportador con el vértice del ángulo y, el cero, con uno de sus lados. Luego, se lee el número que marca el otro lado del ángulo sobre el transportador.

El ángulo ∢*ABC* mide 40° (se lee cuarenta grados). Es importante tener en cuenta que el vértice del ángulo *B* coincide con el centro del transportador, y que la semirrecta $\overrightarrow{BA}$ coincide con 0°.

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida, así, el ángulo ∢*ABC* es congruente con el ángulo ∢*OMP*.





Recuerda que…

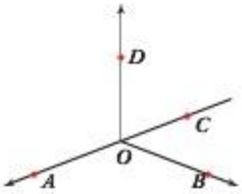
Entre los lados de un ángulo suele dibujarse un arco, que indica a cuál de los dos ángulos que forman dos semirrectas se está haciendo referencia.

Cuando el ángulo es recto (90°) se suelen hacer dos segmentos formando un cuadrado con los lados, así:

EJEMPLO

Nombrar los ángulos que aparecen en las siguientes figuras.

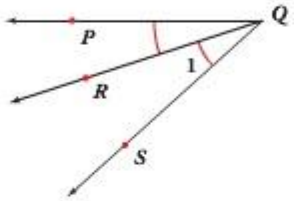
a.



En la figura se aprecian los siguientes ángulos:

∢*AOB*, ∢*AOD*, ∢*AOC*, ∢*BOD*, ∢*BOC*, ∢*COD*.

b.



Los ángulos de esta figura son: ∢*PQR*, ∢1, ∢*PQS*.

Cuando en una figura se muestran varios ángulos, resultan de mayor utilidad notaciones como ∢1 o ∢*RQS*, para no confundir los ángulos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · S Soluciono problemas

Responde.

26. ¿Cuáles son los elementos de un ángulo?

27. ¿Cuáles son las formas para simbolizar un ángulo?

28. ¿Cómo se mide un ángulo?

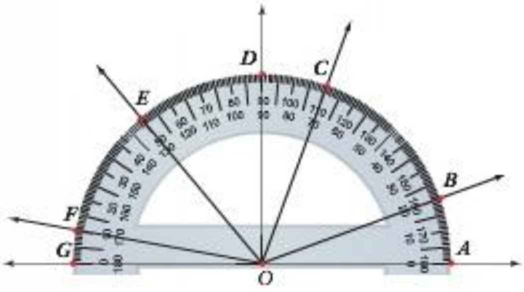
29. ¿Cuándo dos ángulos son congruentes?

E Nombra de dos formas diferentes el ángulo que se señala en cada fotografía.

30.

31.

E 32. Observa la representación de cada ángulo en el transportador. Luego, nombra y escribe su medida.

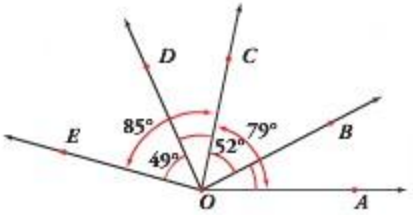


S Mide cada ángulo visual, con la ayuda de un transportador.

33.

34.

Determina la medida de cada uno de los siguientes ángulos, a partir de la figura. Luego, responde.



35. ∢*AOB*

36. ∢*AOD*

37. ∢*AOC*

38. ∢*COD*

39. ∢*BOD*

40. ∢*BOC*

41. ¿Cuáles de estos ángulos son congruentes? Explica tu respuesta.

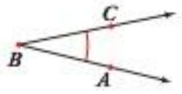
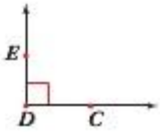
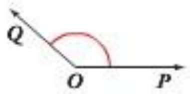
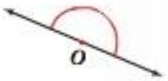
42. Explica cómo medir ángulos mayores a 180°.

2.2 Clasificación de ángulos

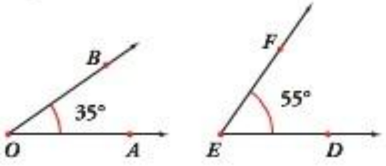
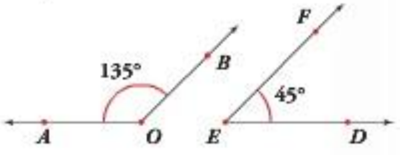
Actividad Recurso imprimible

Los ángulos se clasifican según sus medidas, según la suma de sus medidas y según su posición.

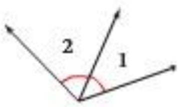
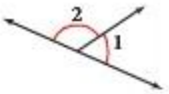
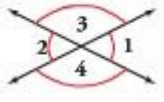
Según sus medida

Agudo	Recto	Obtuso	Llano
Mide menos de 90°.	Mide 90°.	Mide más de 90° y menos de 180°.	Mide 180°.
			

Según la suma de sus medidas

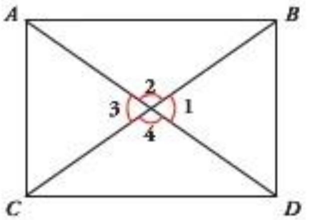
Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°. Si $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle B$ son complementarios, se dice que el $\sphericalangle A$ es el complemento de $\sphericalangle B$ y que $\sphericalangle B$ es el complemento de $\sphericalangle A$.	Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°. Si $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle B$ son suplementarios, se dice que el $\sphericalangle A$ es el suplemento de $\sphericalangle B$ y que $\sphericalangle B$ es el suplemento de $\sphericalangle A$.
	
Observa que: 35° + 55° = 90°	Observa que: 135° + 45° = 180°
Los ángulos $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle DEF$ son, por tanto, complementarios.	Los ángulos $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle DEF$ son, por tanto, suplementarios.

Según su posición

Consecutivos	Adyacentes	Opuestos por el vértice
Tienen en común, solamente, el vértice y un lado.	Son consecutivos, y los lados no comunes forman un ángulo llano.	Se forman a partir de dos rectas secantes.
		
$\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ son consecutivos.	$\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ son adyacentes.	$\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ son opuestos por el vértice; $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$ también lo son.

EJEMPLO

Observar la siguiente figura. Luego, determinar cuáles ángulos son consecutivos, cuáles ángulos son adyacentes y cuáles opuestos por el vértice.



Los ángulos ∢1 y ∢2, ∢3 y ∢2, ∢3 y ∢4, ∢1 y ∢4, son ángulos consecutivos, porque tienen en común solamente el vértice y un lado. Además, son adyacentes porque forman un ángulo llano.

Los ángulos ∢1 y ∢3, ∢2 y ∢4, son opuestos por el vértice.

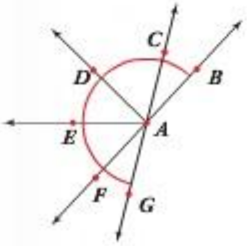
Se puede observar que los ángulos que son opuestos por el vértice no son adyacentes. Además, si se miden con un transportador cualquier par de ángulos opuestos por el vértice, se notará que siempre tienen la misma medida.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · **R** Razono · **S** Soluciono problemas

43. **Nombra y clasifica los ángulos que aparecen en la figura según sus medidas.**

44. **De acuerdo con la figura, nombra un par de ángulos que cumplan la condición indicada.**



Adyacentes: _______

Complementarios: _____

Consecutivos: _______

Suplementarios: _______

Opuestos por el vértice: _______

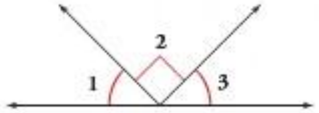
Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

45. Dos ángulos adyacentes siempre son suplementarios.

46. Dos ángulos consecutivos siempre son adyacentes.

47. Dos ángulos opuestos por el vértice pueden ser complementarios.

R **Lee el enunciado y observa la figura. Luego, responde.**



48. De acuerdo con la clasificación de los ángulos según su medida el ∢2 es recto. ¿Qué clase de ángulos son el ∢1 y el ∢3?

Construye los siguientes ángulos.

49. Un ángulo que sea el complemento de ∢1 y un ángulo que sea suplemento de ∢2.

S **50.** **Identifica y clasifica cinco ángulos en la ruta de transmilenio.**

2.3 Construcción de ángulos

Ampliación multimedia

Para construir ángulos con una medida determinada se usa el transportador y para construir un ángulo que tenga la misma medida que otro, se usa regla y compás.

Construcción de un ángulo con una medida dada

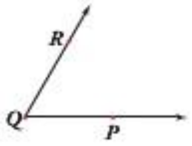
Los siguientes son los pasos para construir un ángulo $\sphericalangle PQR$ que mida 50°, utilizando el transportador.

1. Con la regla, se traza $\overrightarrow{QP}$.

2. Se coloca el centro del transportador sobre el punto inicial de la semirrecta, es decir Q, de tal forma que 0° coincida con $\overrightarrow{QP}$.

3. Se marca el punto R, donde se indica en el transportador 50°.

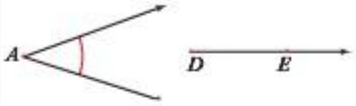
4. Con la regla se traza la semirrecta $\overrightarrow{QR}$.



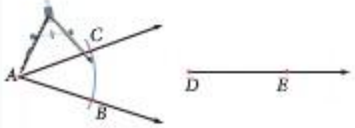
Construcción de ángulos con regla y compás

Los siguientes son los pasos para construir otro ángulo con la medida del $\sphericalangle A$.

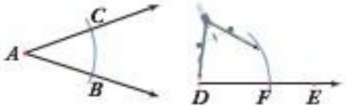
1. Dado el ángulo A, se traza la semirrecta $\overrightarrow{DE}$.



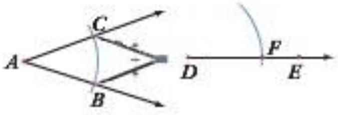
2. Con centro en A se traza un arco, y se nombran como B y C los puntos de intersección del arco con los lados del ángulo.



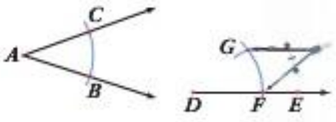
3. Con la misma abertura del compás del paso 2, se traza un arco con centro en D y se nombra como F al punto de intersección del arco con $\overrightarrow{DE}$.



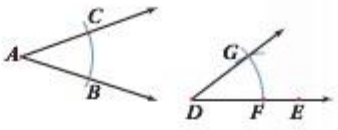
4. Con el compás, se mide la distancia de B a C.



5. Con la distancia del paso 4, se hace centro en F y se traza un arco. Al punto de intersección de los arcos se nombra G.

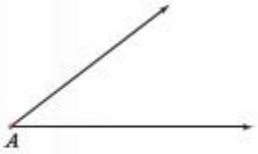


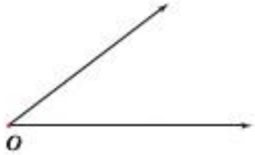
6. Se traza la semirrecta $\overrightarrow{DG}$. El $\sphericalangle FDG$ tiene igual medida que el ángulo A.



EJEMPLOS

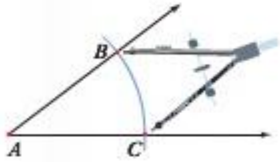
1. Determinar si los siguientes ángulos tienen la misma medida.

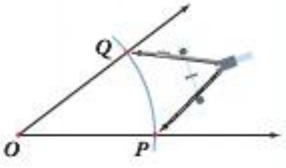




Primero, con centro en A, se traza un arco que interseque a los lados del $\measuredangle A$ en B y C. Luego, con la misma abertura del compás, se traza un arco con centro en O que interseque al $\measuredangle E$ en los puntos P y Q.

Finalmente, se mide con el compás la distancia de B a C y se comprueba que sea la misma que de P a Q.

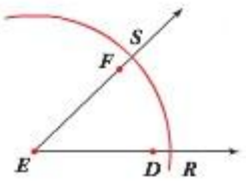




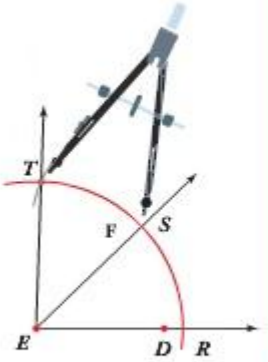
Al realizar dichos pasos se comprueba que el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle E$ tienen igual medida.

2. Construir un ángulo con el doble de medida del ángulo $\measuredangle DEF$.

Primero, se traza un arco que interseque los lados del ángulo. Luego, se nombran los puntos de intersección.



Luego, se toma la medida de S a R con el compás. Después, con centro en S, se traza un arco que se interseque con el trazado en el paso anterior en el punto T. Por último, se traza la semirrecta $\overrightarrow{ET}$. Así, $\measuredangle DET$ tiene el doble de la medida del $\measuredangle DEF$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • E Ejercito

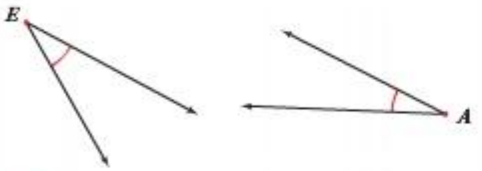
Responde. Luego, explica tu respuesta con un ejemplo.

51. ¿Cómo se mide la distancia de un punto A a un punto B con el compás?

52. ¿Cómo se determina si dos ángulos son congruentes, utilizando el compás?

E **Determina con el compás, si cada par de ángulos tienen o no tienen la misma medida.**

53.



54.

E **Construye, con el transportador, un ángulo con cada una de las siguientes medidas.**

55. $\measuredangle ABC = 80°$

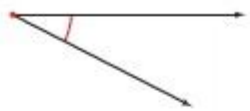
56. $\measuredangle GHI = 90°$

57. $\measuredangle DEF = 145°$

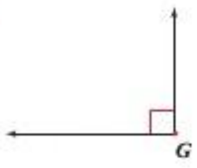
58. $\measuredangle JKL = 35°$

Construye con regla y compás, un ángulo que sea congruente con cada uno de los siguientes ángulos.

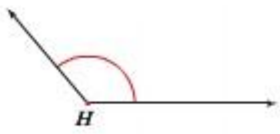
59.



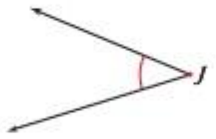
61.



60.



62.



3. Polígonos

Historia de las matemáticas

Pentágono místico

Los pitagóricos tenían un símbolo llamado **pentágono místico**, que representaba la salud, la belleza y el amor.

Un **polígono** es una figura plana limitada por tres o más segmentos de tal forma que:

- Como máximo dos segmentos se encuentran en un punto.
- Cada segmento toca exactamente a otros dos segmentos.

3.1 Elementos de un polígono

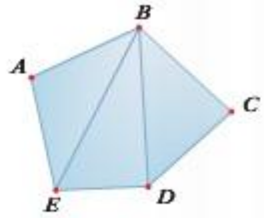
Ampliación multimedia

Los elementos de un polígono son: lados, vértices, ángulos interiores y diagonales.

- Los **lados**: son los segmentos que conforman y limitan el polígono. En el polígono de la figura de la derecha, los lados son: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$.
- Los **vértices**: son los puntos donde se intersecan cada par de lados. Los vértices del polígono de la figura son: A, B, C, D y E.
- Los **ángulos interiores**: son los ángulos determinados por los lados del polígono. En el polígono de la figura Los ángulos interiores son: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$ y $\sphericalangle E$.
- Las **diagonales**: son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono. En la figura $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ son diagonales del polígono. Para calcular el número de diagonales de un polígono se utiliza la fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

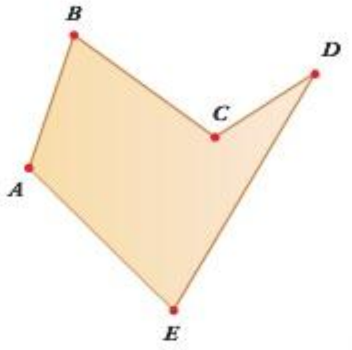
Donde n es el número de lados del polígono.



Un polígono se nombra escribiendo las letras que simbolizan sus vértices. Así, el polígono de la figura se simboliza polígono *ABCDE*.

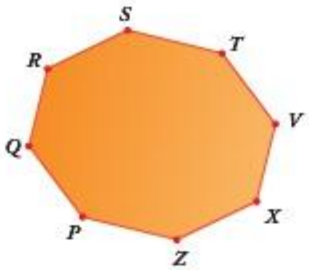
EJEMPLOS

1. Determinar si la siguiente figura es un polígono.



La figura *ABCDE* es un polígono porque está formado por 5 segmentos, donde cada par de segmentos se intersecan en un solo punto y cada segmento toca exactamente a otros dos.

2. Hallar el número de diagonales del siguiente polígono.



Primero, como el polígono *PQRSTVXZ* tiene 8 lados, se remplaza n por 8 en la fórmula

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Luego, se tiene que: $d = \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$

Por tanto, el polígono *PQRSTVXZ* tiene 20 diagonales.

3.2 Clasificación de polígonos

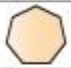
Actividad

Recurso imprimible

Los polígonos se pueden clasificar según el número de lados, según sus ángulos interiores y según la medida de sus lados y sus ángulos.

Según su número de lados

Según el número de lados, los polígonos se clasifican así:

Número de lados	Nombre	Ejemplo
3	Triángulo	
4	Cuadrilátero	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	

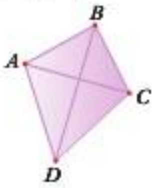
Número de lados	Nombre	Ejemplo
8	Octágono	
9	Nonágono	
10	Decágono	
11	Undecágono	
12	Dodecágono	

Según sus ángulos interiores

Según sus ángulos interiores, los polígonos se clasifican en: convexos y cóncavos.

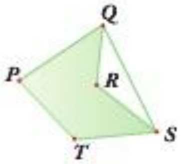
Convexos

Todos sus ángulos interiores miden menos de 180°. Si al trazar las diagonales de un polígono todas están contenidas en él, el polígono es convexo.



Cóncavos

Tienen algún ángulo interior mayor que 180°. Si al trazar las diagonales de un polígono, se tiene que al menos una diagonal está por fuera, el polígono es cóncavo.

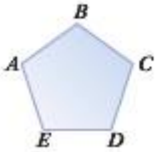


Según la medida de sus lados y de sus ángulos

Según la medida de sus lados y ángulos, los polígonos se clasifican en: regulares e irregulares.

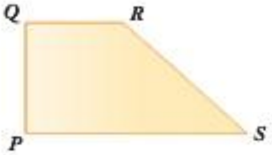
Regulares

Los polígonos en los cuales todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida, se llaman polígonos regulares.



Irregulares

Los polígonos en los cuales al menos dos de sus lados o ángulos tienen distinta medida, se llaman polígonos irregulares.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

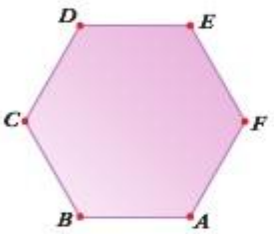
Responde.

63. ¿Qué condiciones debe cumplir una figura plana para ser polígono?

64. ¿Cómo se clasifican los polígonos según su número de lados?

65. ¿Cómo se determina si un polígono es cóncavo o convexo?

E 66. Nombra los elementos del polígono *ABCDEF*.



Lados: ____________

Vértices: ____________

Ángulos: ____________

____

Diagonales: ____________

____

R 67. Completa la siguiente tabla.

Polígono	Clasificación		
	Número de lados	Medida de sus ángulos interiores	Medida de los lados y los ángulos
	Cuadrilátero		
			
		Convexo	
			

E Calcula el número de diagonales de cada uno de los siguientes polígonos.

68. Cuadrilátero

69. Hexágono

70. Nonágono

71. Dodecágono

R Construye un polígono para cada condición dada.

72. Pentágono convexo.

73. Heptágono convexo con dos ángulos congruentes de 70°.

74. Un polígono convexo cuyo número de diagonales sea igual al número de vértices.

Determina si cada afirmación es verdadera o falsa.

75. Todos los triángulos son siempre polígonos convexos.

76. Un polígono es cóncavo si tiene algún ángulo interior mayor que 180°.

77. Todo polígono regular es también polígono convexo.

78. El número de diagonales de un pentágono es 2.

Divide cada figura en cuatro figuras idénticas a la coloreada. Luego, clasifica el polígono dado inicialmente según su número de lados, su forma y la medida de sus lados y sus ángulos.

79.

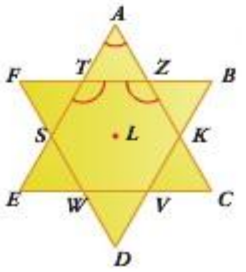
80.

R Observa la figura. Luego, responde.

81. ¿Cuántos polígonos convexos diferentes hay?

82. ¿Cuáles polígonos son cóncavos?

S Resuelve a partir de la figura.



83. ¿Cuántos triángulos hay?

84. ¿*TZKVWS* es un polígono?

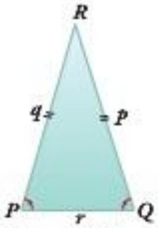
85. ¿*AZKDS* es un polígono? ¿Por qué?

86. ¿Qué se debe eliminar para que la figura nombrada sea un polígono?

3.3 Triángulos

Un **triángulo** es una región del plano limitada por tres rectas que se intersecan dos a dos.

Para nombrar un triángulo se escribe el símbolo $\triangle$ seguido de las tres letras que indican sus vértices. Así, el triángulo mostrado se nombra $\triangle PQR$, donde P, Q y R son los vértices, $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$ y $\overline{PQ}$ son los lados, y $\sphericalangle P$, $\sphericalangle Q$ y $\sphericalangle R$ son los ángulos interiores.



Para nombrar los lados de un triángulo, también se puede escribir la letra que indica el vértice del lado opuesto, en minúscula. Así, en el $\triangle PQR$, el lado $\overline{PR}$ se nombra q, el lado $\overline{RQ}$ se nombra p y el lado $\overline{PQ}$ se nombra r.

Cuando dos lados o dos ángulos son congruentes, se utilizan las mismas marcas para indicar dicha congruencia. Así, en $\triangle PQR$ se tienen que $\overline{PR} \cong \overline{RQ}$ y $\sphericalangle QPR \cong \sphericalangle PQR$.

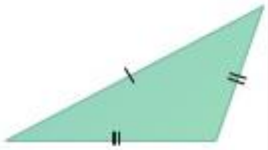
Recuerda que…

Dos ángulos o dos lados son congruentes cuando tienen la misma medida. El símbolo de congruencia es $\cong$.

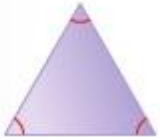
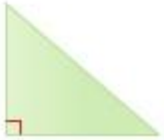
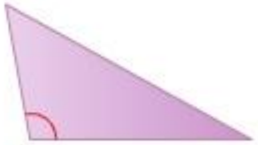
Clasificación de triángulos

Actividad

Los triángulos se clasifican según **la medida de sus lados** y según **la medida de sus ángulos.**

Equilátero	Isósceles	Escaleno
Los tres lados son congruentes entre sí.	Dos lados son congruentes.	Ningún par de lados son congruentes.
		

Según la medida de sus ángulos los triángulos se clasifican en:

Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Los tres ángulos son agudos, es decir, miden menos de 90°.	Un ángulo es recto, es decir, mide exactamente 90°.	Un ángulo es obtuso, es decir, mide más de 90°.
		

Historia de las matemáticas

En el antiguo Egipto (6000 a. C.), cada año el río Nilo inundaba las tierras desapareciendo los límites que separaban las parcelas.

Los sacerdotes debían medir año tras año dichos terrenos, que en general tenían formas irregulares.

Así que usaron como estrategia para esta división la triangulación, es decir, dividían cada terreno en triángulos, como se muestra en la figura.

Recurso imprimible

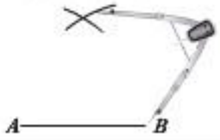
Construcción de triángulos con regla y compás

Los triángulos se pueden construir con regla y compás si se conocen las medidas de sus lados.

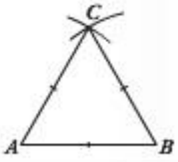
Construcción de un triángulo equilátero

1. Se traza un segmento $\overline{AB}$ con la medida indicada. Luego, se toma su medida con el compás.

2. Con esta abertura, se traza un arco con centro en A. Luego, se repite el mismo procedimiento con centro en B.



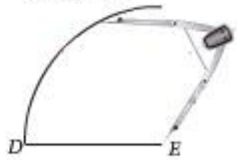
3. Se nombra el punto C que es la intersección de los arcos. Luego se trazan los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.



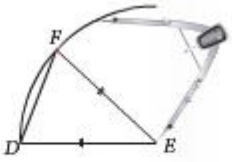
Construcción de un triángulo isósceles

1. Se traza un segmento $\overline{DE}$ con la medida de los dos lados congruentes. Luego, se toma su medida con el compás.

2. Con esta abertura, se traza un arco con centro en E. Luego, se ubica en este arco el tercer vértice del triángulo.

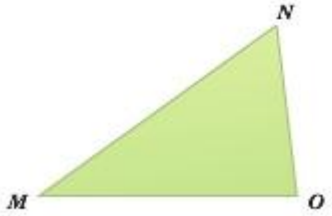


3. Se nombra el tercer vértice del triángulo con F. Finalmente, se trazan los segmentos $\overline{DF}$ y $\overline{EF}$.



EJEMPLOS

1. **Medir los lados y los ángulos interiores del siguiente triángulo. Luego, clasificarlo según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.**



Los lados del triángulo MNO miden: $MN = 3{,}4$ cm, $ON = 2$ cm y $OM = 3$ cm. Además, las medidas de los ángulos interiores son:

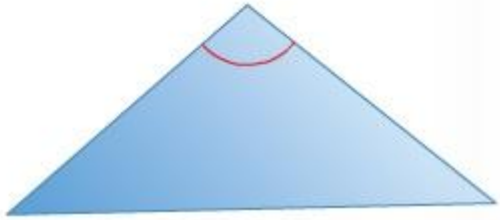
$m\sphericalangle MNO = 61°$, $m\sphericalangle NMO = 36°$ y $m\sphericalangle MON = 83°$.

De acuerdo con lo anterior, el triángulo es escaleno porque las medidas de sus lados son diferentes.

También, se puede deducir que el triángulo es acutángulo porque las medidas de sus ángulos interiores son menores que 90°.

2. **Dibujar un triángulo obtusángulo e isósceles.**

Para dibujar este triángulo es necesario que el triángulo tenga dos lados de igual tamaño, y esos dos lados deben formar un ángulo obtuso, el lado diferente debe formar ángulos agudos con cada lado. Así el triángulo obtusángulo e isósceles se observa en la figura de abajo.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · **E** Ejercito · **R** Razono · **S** Soluciono problemas

Responde.

87. ¿Cuáles son los elementos que conforman un triángulo?

88. ¿Cómo se clasifican los triángulos según la medida de sus lados?

89. ¿Cómo se construye un triángulo equilátero utilizando regla y compás?

Lee los pasos para construir un triángulo escaleno con lados *a*, *b* y *c*. Luego, resuelve.

- Se traza un segmento *BC* de medida *a*.
- Sobre una regla, se toma con el compás la medida de *b*. Luego, se traza un arco haciendo centro en *B*.
- Sobre una regla, se toma la medida *c*. Luego, se traza un arco haciendo centro en *C*.
- Se nombra el punto de intersección de los arcos (*A*). Luego, se trazan *AB* y *AC*.

90. Construye un triángulo escaleno *POQ*, con regla y compás, de tal forma que $PO = 4$ cm, $PQ = 5$ cm y $OQ = 6$ cm.

Determina el valor de verdad de cada enunciado. Justifica tu respuesta.

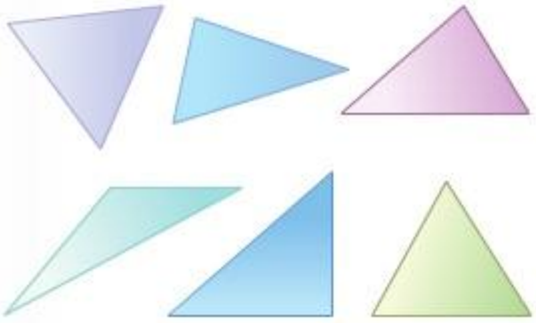
En todo triángulo:

91. La medida de sus tres lados es igual.

92. Dos de sus ángulos interiores pueden ser obtusos.

93. La suma de dos de sus lados es menor que el tercer lado.

E **Observa y resuelve.**



94. Nombra cada uno de los anteriores triángulos. Luego, determina cuáles son los vértices, los lados y los ángulos interiores.

95. Clasifica cada triángulo según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.

Construye los triángulos con las condiciones que se indican.

96. Triángulo equilátero que mide 5 m de lado.

97. Triángulo escaleno de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm.

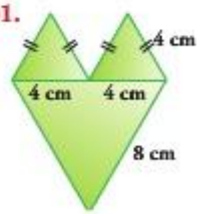
98. Triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm.

99. Triángulo rectángulo e isósceles, tal que la medida de sus lados iguales es 4,5 cm.

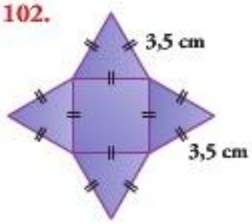
100. Triángulo de 6 cm de base y 5,5 cm de altura y un ángulo de 60°.

R **Realiza las siguientes construcciones con regla y compás.**

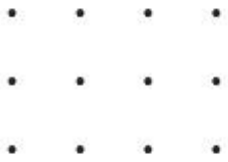
101.



102.

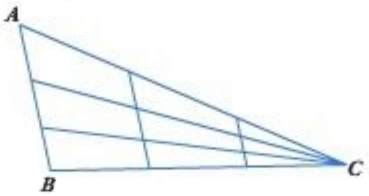


S **Resuelve, a partir de la siguiente figura, donde la distancia entre punto y punto es la misma, en forma vertical y horizontal, y que cada punto es un posible vértice.**



103. Determina la cantidad de triángulos isósceles no rectángulos que se pueden formar, utilizando los puntos como vértices.

S **104. Determina cuántos triángulos se forman en la siguiente figura.**



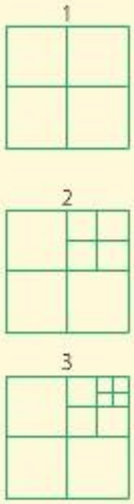
3.4 Cuadriláteros

Recurso imprimible

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos interiores.

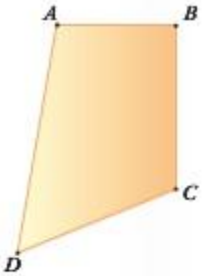
Matemática*mente*

Según la secuencia, calcular el número de cuadrados en la posición 10.



En todos los cuadriláteros se identifican los siguientes elementos:

- Los **lados opuestos** son aquellos que no tienen ningún vértice en común, por ejemplo, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
- Los **lados consecutivos** son aquellos que tienen un vértice en común, por ejemplo, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- Los **ángulos opuestos** son aquellos que no tienen ningún lado común, por ejemplo, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle D$.
- Los **ángulos consecutivos** son aquellos que tienen un lado común, por ejemplo, $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle D$.



Clasificación de cuadriláteros

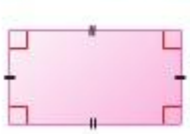
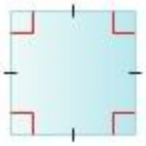
Actividad

Los cuadriláteros convexos se clasifican en paralelogramos, trapecios o trapezoides, dependiendo de si tiene o no lados paralelos.

Paralelogramos

Ampliación multimedia

Los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sus dos pares de lados opuestos paralelos. Se clasifican en: rectángulos, cuadrados, rombos y romboides.

Paralelogramos			
Rectángulo	**Cuadrado**	**Rombo**	**Romboide**
			

Algunas propiedades de los paralelogramos son:

- Cada diagonal lo descompone en dos triángulos iguales.
- Los lados opuestos son congruentes.
- Los ángulos opuestos son congruentes.
- Dos ángulos consecutivos son suplementarios.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.

Por ejemplo, en el rombo $ABCD$ (figura 2), O es el punto medio de $\overline{AC}$ y de $\overline{DB}$.

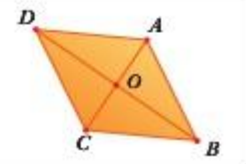


Figura 2.

Además, existen otros cuadriláteros, como los trapecios y los trapezoides.

Trapecios

Los trapecios son cuadriláteros que tienen solo un par de lados opuestos paralelos (figura 3).

Figura 3.

Trapezoides

Los trapezoides son cuadriláteros convexos en los que ningún par de lados opuestos son paralelos (figura 4).

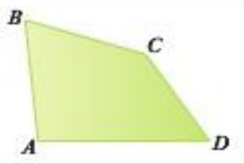


Figura 4.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde.

105. ¿Qué es un cuadrilátero?

106. ¿Cuáles son las propiedades de los paralelogramos?

107. ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros convexos?

108. ¿Qué diferencias hay entre un paralelogramo, un trapecio y un trapezoide?

Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica con un ejemplo.

109. Los cuadrados son rectángulos.

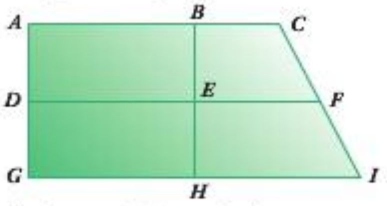
110. Los rectángulos son cuadrados.

111. Los rombos son cuadrados.

112. Los cuadrados son rombos.

113. Los trapecios tiene dos pares de lados paralelos.

R **Observa la figura. Luego, resuelve.**



114. Halla la cantidad de cuadriláteros.

115. Indica cuáles son paralelogramos.

116. Determina la cantidad de rectángulos.

117. Indica cuáles son trapecios.

E **Clasifica cada uno de los siguientes cuadriláteros en paralelogramos, trapecios y trapezoides.**

118.

120.

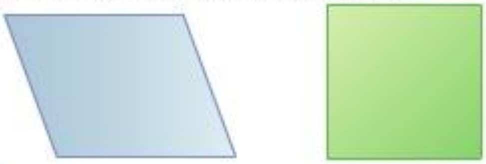
119.

121.

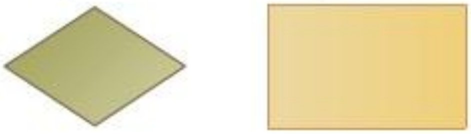
Escribe el nombre de cada paralelogramo. Luego, toma las medidas necesarias para comprobar la propiedad indicada en cada caso.

122. Los lados opuestos tienen la misma medida.

123. Los ángulos opuestos son congruentes.

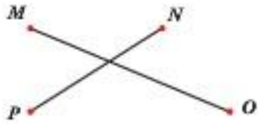


124. Dos ángulos consecutivos son suplementarios.

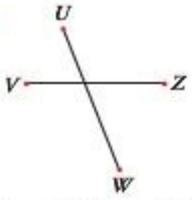


Une las diagonales en cada caso, para formar cuadriláteros. Luego, clasifica los cuadriláteros que se forman.

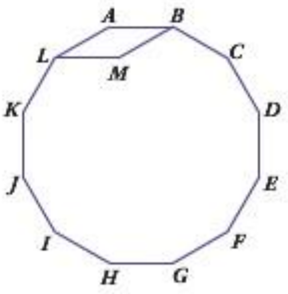
125.



126.



S **Construye un dodecágono regular y dibuja en él el paralelogramo *ABML*, como se muestra en la figura.**



Continúa dibujando paralelogramos hasta llenar la figura. Luego, responde.

127. ¿Cuántos paralelogramos tiene el dodecágono?

4. Transformaciones en el plano cartesiano

Recurso imprimible

Enlace web

En un plano, se pueden aplicar sobre los polígonos dos tipos de transformaciones. Las primeras, llamadas **transformaciones rígidas**, no cambian las características de los polígonos, es decir, la medida de sus lados y de sus ángulos permanece igual. Las transformaciones rígidas en el plano son: traslación, rotación y reflexión.

El segundo tipo de transformación que se puede aplicar sobre los polígonos es la llamada **homotecia**, en la cual se conserva la forma pero no la longitud de los lados del polígono.

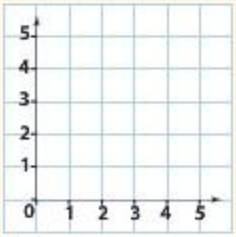
Para realizar las transformaciones rígidas es necesario estudiar primero la representación de polígonos en un plano cartesiano.

Matemática*mente*

Para el estudio de poblaciones, los biólogos usan cuadrículas y cercan las regiones con lazos y estacas.

Usa los vértices para identificar la forma de la región en donde fue encontrado el insecto llamado *mantis sagrada*.

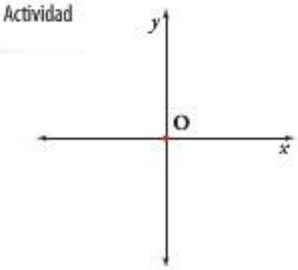
(1, 2), (2, 5),(4, 5), (3, 0)



4.1 Plano cartesiano

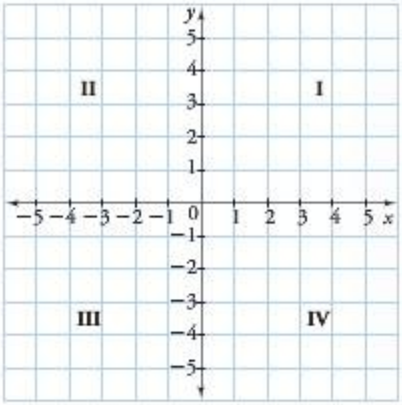
Actividad

El **plano cartesiano** es un sistema que se utiliza para localizar puntos. Está formado por dos rectas perpendiculares llamadas ejes, cuyo punto de intersección recibe el nombre de origen.



Para identificar los ejes se nombran como **eje *x*** y **eje *y***. En cada eje se establece una escala numérica, de tal forma que en el eje *x* se escriben los valores positivos hacia la derecha del origen y en el eje *y* hacia arriba del origen. Además, los valores negativos se escriben hacia la izquierda del origen en el eje *x*, y hacia abajo del origen en el eje *y*.

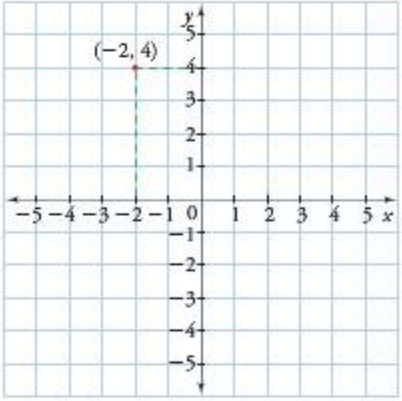
Los ejes dividen al plano cartesiano en cuatro regiones denominadas cuadrantes. Cada cuadrante se enumera con números romanos.



En el plano cartesiano, un punto se representa con un par de números llamados pareja ordenada que se simboliza (*a*, *b*), donde *a* es la primera componente o abscisa y *b* es la segunda componente u ordenada.

Para ubicar un punto (*a*, *b*), se ubica *a* según el eje *x* y *b* según el eje *y*.

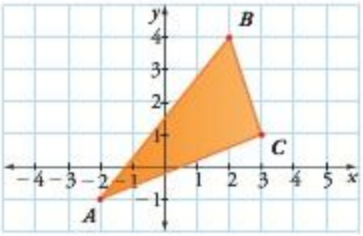
Por ejemplo, para ubicar el punto (−2, 4), se ubica la abscisa −2, según el eje *x*, y la ordenada 4, según el eje *y*, como se muestra en la gráfica.



Representación de polígonos en el plano cartesiano

Para representar un polígono en el plano cartesiano, se ubica cada uno de sus vértices. Luego se trazan sus lados.

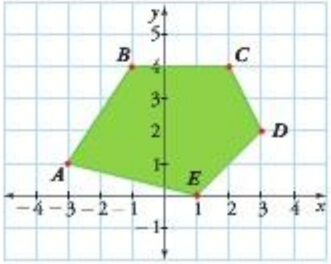
Por ejemplo, para representar el triángulo *ABC* en el plano cartesiano, cuyos vértices son $A = (-2, -1)$, $B = (2, 4)$ y $C = (3, 1)$; primero, se traza el plano cartesiano. Luego, se ubican los vértices *A*, *B* y *C*. Por último, se trazan los lados del triángulo.



EJEMPLO

En el plano cartesiano está representado el pentágono *ABCDE*. Determinar las coordenadas de sus vértices.

Para determinar las coordenadas de los vértices se ubica la abscisa y la ordenada para cada uno. Así, se tiene que las coordenadas son: $A = (-3, 1)$, $B = (-1, 4)$, $C = (2, 4)$, $D = (3, 2)$ y $E = (1, 0)$.

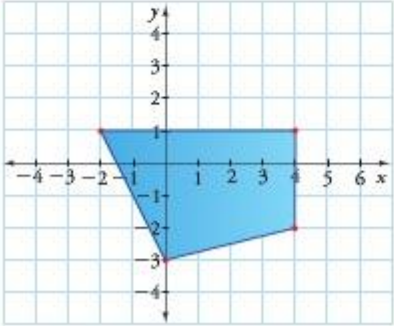


Afianzo COMPETENCIAS

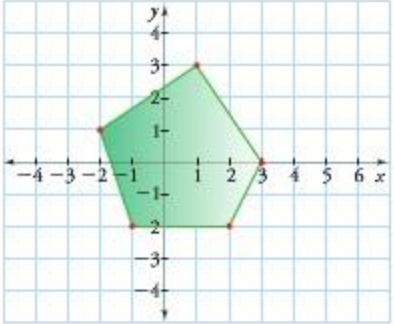
Interpreto • Argumento • Propongo • Soluciono problemas

Escribe las coordenadas de los vértices de cada polígono.

128.



129.



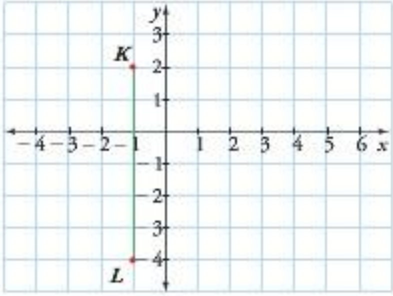
Determina el vértice que falta para formar el rectángulo *GHIJ* en el plano cartesiano.

130. Si, $G = (-3, -2)$, $H = (-3, 4)$, $I = (1, 4)$. Realiza la representación en el plano cartesiano.

Resuelve.

131. Representa en el plano cartesiano un hexágono cóncavo. Luego, escribe las coordenadas de los vértices.

A partir del lado $\overline{KL}$, determina un tercer posible vértice del $\triangle KLM$, de tal manera que:



132. $\triangle KLM$ sea un triángulo isósceles.

133. $\triangle KLM$ sea un triángulo escaleno.

4.2 Traslación

La **traslación** es una transformación que consiste en desplazar una figura a lo largo de una línea recta conservando la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.

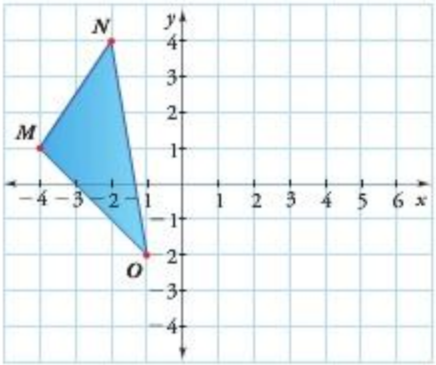
Para determinar la traslación de una figura es necesario indicar los tres elementos de una traslación:

- La dirección, que puede ser horizontal o vertical.
- El sentido que puede ser derecha, izquierda, arriba o abajo.
- La magnitud, que corresponde al número de unidades que se va a trasladar la figura.

Para realizar la traslación de un polígono es conveniente usar el plano cartesiano.

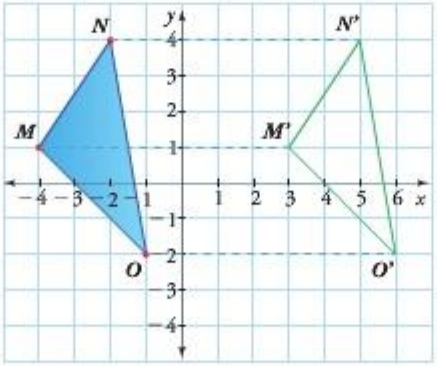
EJEMPLOS

1. Trasladar el $\triangle MNO$, siete unidades hacia la derecha.



Primero, se traslada cada vértice siete unidades hacia la derecha para encontrar los nuevos vértices $M'N'O'$.

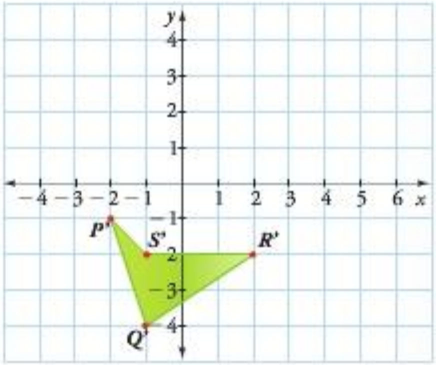
Luego, se unen los vértices.



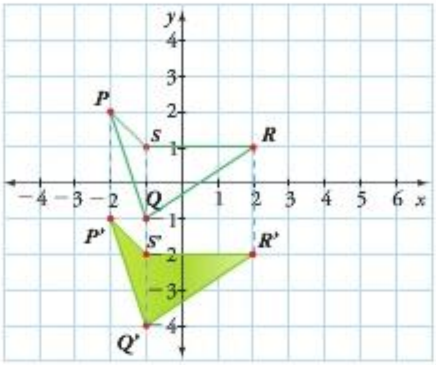
Es importante observar que las ordenadas de los vértices permanecen igual.

Por ejemplo, las ordenadas de los puntos $M = (-4, 1)$ y $M' = (3, 1)$ son iguales.

2. El polígono $P'Q'R'S'$ es la imagen del polígono $PQRS$ mediante una traslación de 3 unidades hacia abajo. Determinar los vértices del polígono inicial.



Como el desplazamiento del polígono inicial fue hacia abajo, es necesario trasladar el polígono $P'Q'R'S'$, 3 unidades hacia arriba, para determinar el polígono $PQRS$.



Los vértices del polígono inicial son:

$P = (-2, 2)$, $Q = (-1, -1)$, $R = (2, 1)$ y $S = (-1, 1)$.

Afianzo COMPETENCIAS

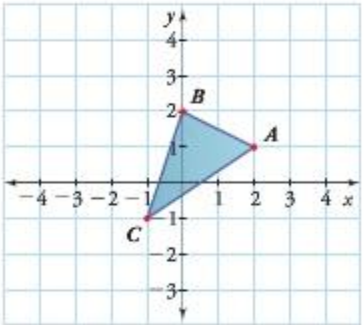
Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Responde.

134. ¿Cuáles son los elementos para tener en cuenta en la traslación de una figura?

135. ¿Cómo es posible cambiar el sentido de una traslación, utilizando números enteros?

E Traslada el $\triangle ABC$, de acuerdo con la dirección, el sentido y la magnitud que se indica. Luego, escribe en cada caso, los vértices de la posición final.



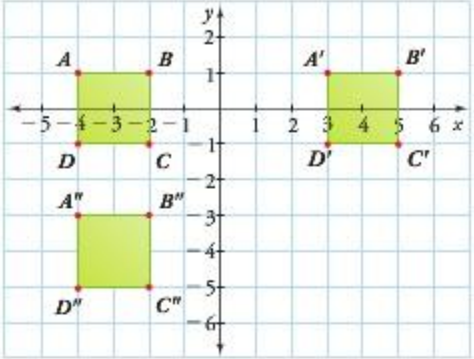
136. Tres unidades hacia arriba.

137. Dos unidades hacia la derecha.

138. Cuatro unidades hacia la izquierda.

139. Tres unidades hacia abajo.

Determina la dirección, el sentido y la magnitud de las dos traslaciones realizadas al cuadrado *ABCD*. Explica tu respuesta.



140. Traslación 1 ______________________

____

141. Traslación 2 ______________________

____

R Resuelve.

142. Determina la traslación realizada al polígono *GHIJ* que tiene como vértices $G = (-2, -3)$, $H = (-1, -1)$, $I = (-1, 1)$ y $J = (2, 2)$, si las coordenadas de los vértices de la posición final del polígono son: $G' = (3, -3)$, $H' = (4, -1)$, $I' = (4, 1)$ y $J' = (7, 2)$.

Luego, representa la transformación en un plano cartesiano.

Se han aplicado dos traslaciones T_1 y T_2, sobre el $\triangle KLM$. A partir de los vértices de la posición final de cada traslación, completa los enunciados y, luego, determina las traslaciones T_1 y T_2.

Vértices $\triangle KLM$	Vértices por T_1	Vértices por T_2
$K = (-3, -1)$	$K' = (-3, 4)$	$K'' = (0, -1)$
$L = (-2, 2)$	$L' = (-2, 7)$	$L'' = (1, 2)$
$M = (-1, 1)$	$M' = (-1, 6)$	$M'' = (2, 1)$

143. Al comparar los vértices correspondientes del triángulo inicial con la imagen obtenida por T_1, se observa que la abscisa ____________ y la ordenada se aumenta en ____ .

144. Al comparar los vértices correspondientes del triángulo inicial con la imagen obtenida por T_2, se observa que la abscisa ____________ y la ordenada ____________

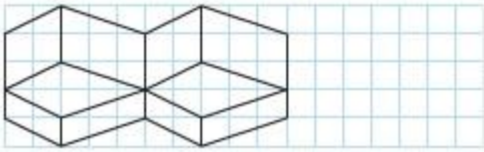
145. Por tanto, la traslación T_1 es ______________________

____

146. Por tanto, la traslación T_2 es: ______________________

____

S 147. Mediante la composición de traslaciones se pueden formar distintos frisos. Completa en tu cuaderno.



4.3 Rotación

Una **rotación** es una transformación rígida en el plano que consiste en girar una figura alrededor de un punto.

Recuerda que…

Cuando se realiza una rotación en el sentido de las manecillas del reloj, el sentido es negativo. En cambio, cuando la rotación se realiza en sentido contrario a las manecillas de un reloj, el sentido es positivo.

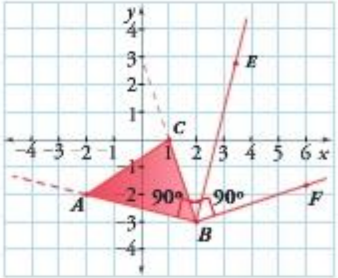
Para rotar una figura es necesario indicar tres elementos:

- El **ángulo de giro** que debe expresarse en grados.
- El **sentido** que puede ser en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- El **centro de rotación** que corresponde al punto alrededor del cual se va a rotar la figura. El centro de rotación puede estar en el interior de la figura, en uno de sus vértices o en su exterior.

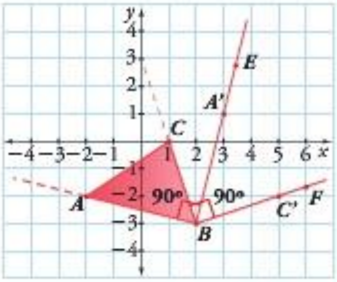
EJEMPLO

Rotar el $\triangle ABC$ alrededor del vértice B, 90° en el sentido de las manecillas del reloj.

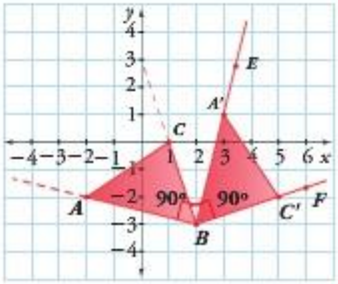
Primero, desde el punto de rotación B, se construyen, en el sentido de las manecillas del reloj, los ángulos $\measuredangle ABE$ y $\measuredangle CBF$ de 90° cada uno.



Luego, con el compás se toman las medidas de los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$, y se marcan los puntos A' y C' en las semirrectas $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BF}$ para formar los segmentos $\overline{BA}'$ y $\overline{BC}'$.



Finalmente, se traza el segmento $\overline{A'C'}$ para obtener el $\triangle A'B'C'$ que corresponde a la imagen del $\triangle ABC$, después de ser rotado alrededor del vértice B, 90° en el sentido de las manecillas del reloj.



Para verificar que la rotación realizada es correcta, se mide el ángulo que forma un lado de la figura inicial con el que corresponde al de la figura rotada. Además, se debe tener en cuenta que al rotar una figura no cambian ni las medidas de sus lados, ni las medidas de sus ángulos internos.

4.4 La reflexión

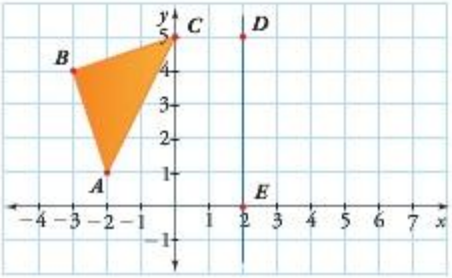
La **reflexión** es una transformación rígida en el plano que consiste en "dar media vuelta" a una figura a partir de una recta llamada **eje de reflexión**.

Una propiedad importante de la reflexión es que cada punto de la figura inicial y su correspondiente punto en la imagen reflejada, equidistan del eje de reflexión. Al reflejar una figura, su imagen se ve como si sobre el eje de reflexión se hubiera colocado un espejo.

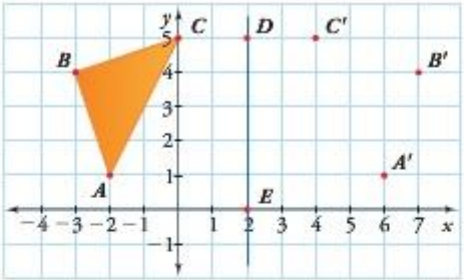
EJEMPLO

Reflejar el triángulo cuyos vértices son $A = (-2, 1)$, $B = (-3, 4)$ y $C = (0, 5)$, a partir del eje de reflexión que pasa por los puntos $D = (2, 5)$ y $E = (2, 0)$.

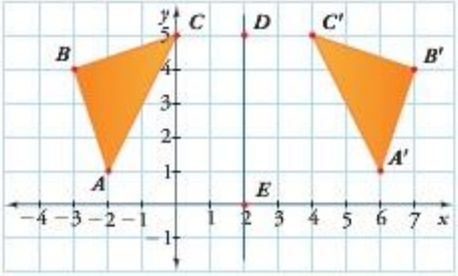
Primero, se traza el eje de reflexión por los puntos $D = (2, 5)$ y $E = (2, 0)$.



Luego, se mide con el compás la distancia de cada vértice del triángulo al eje de reflexión y se traslada cada medida al otro lado del eje, de tal forma que cada vértice y su respectiva imagen, queden sobre la misma recta horizontal.

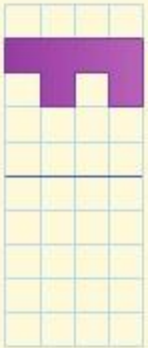


Finalmente, se tiene que el triángulo de vértices A', B' y C' es la imagen reflejada del $\triangle ABC$.



Matemática*mente*

Traza la imagen de la siguiente figura teniendo en cuenta el eje de reflexión.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Soluciono problemas

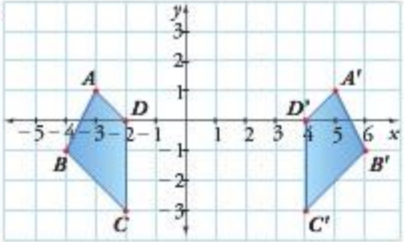
Completa.

148. Si los puntos extremos de un segmento $\overline{AB}$ tienen coordenadas A (2, 1) y B (2, 4), al rotarlo 45° alrededor del punto A, en el sentido de las manecillas del reloj, las coordenadas de la imagen del punto B son B'(____, ____).

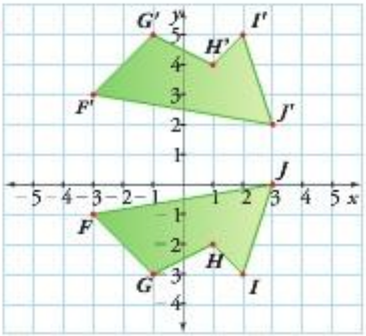
149. Si los puntos extremos de un segmento $\overline{AB}$ tienen coordenadas A (−3, 1) y B (−1, 1), al reflejarlo sobre el eje y, las coordenadas de los puntos extremos de la imagen son A' (____, ____) y B' (____, ____).

Explica el procedimiento para encontrar el eje de reflexión a partir de una figura y de su imagen. Luego, traza el eje de reflexión en cada caso.

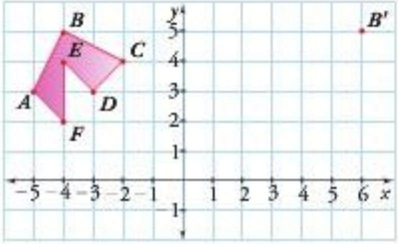
150.



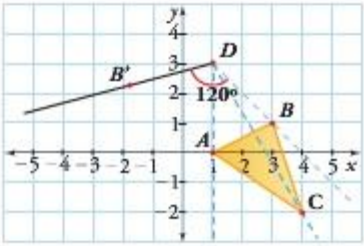
151.



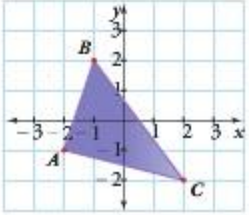
152. **Traza la imagen reflejada de la siguiente figura. Luego escribe las coordenadas de dos puntos del eje de reflexión.**



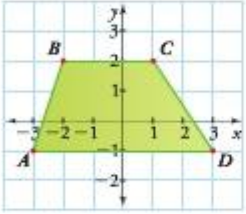
153. **Completa la rotación del triángulo de vértices $A = (1, 0)$, $B = (3, 1)$ y $C = (4, -2)$, alrededor del punto D, 120° en el sentido de las manecillas del reloj.**



Copia en tu cuaderno cada figura. Luego, efectúa la rotación indicada.



154. Rotación alrededor del vértice C, 90° en el sentido de las manecillas del reloj.



155. Rotación alrededor del vértice A, 60° en el sentido de las manecillas del reloj.

Resuelve.

156. Un triángulo ABC se refleja con respecto al eje x, de manera que las coordenadas de los vértices de su imagen son $A'(-1, 3)$, $B'(-6, 2)$ y $C'(-3, 1)$. Determinar los vértices del triángulo ABC.

157. Sobre un cuadrilátero $ABCD$ se aplica una rotación alrededor del punto O (0, 0) con un ángulo de 270° en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si las coordenadas de los vértices de su imagen son $A'(7, 9)$, $B'(-5, 3)$, $C'(10, -5)$ y $D'(6, 6)$, determinar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$.

4.5 Homotecias

Ampliación multimedia

Enlace web

Una **homotecia** es una transformación en el plano que conserva la forma de la figura pero no la longitud de sus lados. La figura que resulta al aplicar una homotecia se denomina imagen. Una homotecia se puede relacionar con la idea de ampliar o reducir una figura.

Para realizar una homotecia se deben tener en cuenta los siguientes elementos:

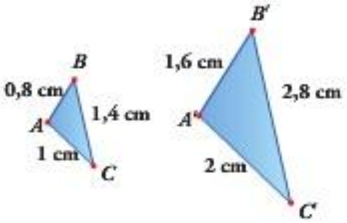
- **El centro de homotecia:** es el punto a partir del cual, se trazan líneas imaginarias que pasan por los vértices de la figura que se va a transformar.
- **El factor de conversión:** es el cociente de las medidas de los lados correspondientes entre la figura y su imagen.

Estas son las propiedades de una homotecia:

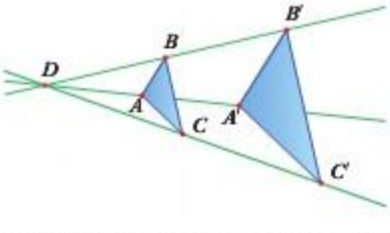
- Cada lado de la figura es paralelo al lado correspondiente de su imagen.
- Los ángulos correspondientes de la figura y de su imagen, son congruentes.
- El cociente entre las longitudes de los lados correspondientes de la figura y de su imagen, llamado factor de conversión, es el mismo.

EJEMPLOS

1. **Hallar el centro de homotecia y el factor de conversión a partir del $\triangle ABC$ y de su imagen por homotecia el $\triangle A'B'C'$.**



Primero, se halla el centro de homotecia. Para esto, se trazan las rectas que unen los vértices y se encuentra el punto de intersección de éstas. El centro de homotecia es el punto D.

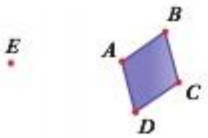


Luego, se halla el factor de conversión de la homotecia, calculando los cocientes entre las medidas de los lados correspondientes del $\triangle ABC$ y de su imagen.

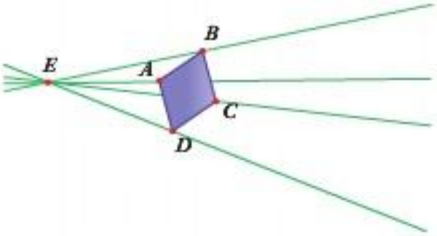
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1,6 \text{ cm}}{0,8 \text{ cm}} = 2 \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2,8 \text{ cm}}{1,4 \text{ cm}} = 2 \qquad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 2$$

Finalmente, se tiene que el factor de conversión de la homotecia es 2. Por tanto, el $\triangle ABC$ se ha ampliado el doble.

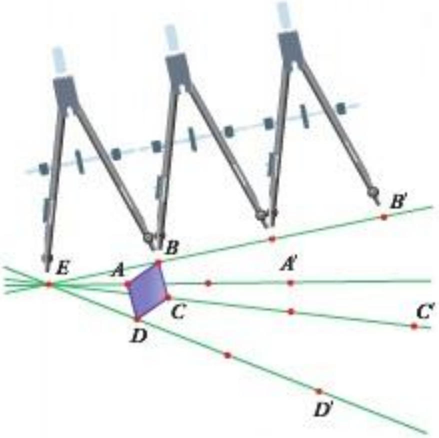
2. Hallar la imagen del cuadrilátero *ABCD* mediante la homotecia con centro *E* y factor de conversión igual a 3.



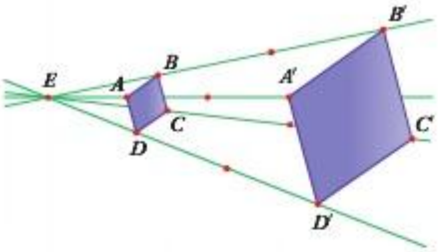
Primero, se trazan semirrectas desde el centro de la homotecia *E* hasta cada uno de los vértices del cuadrilátero.



Luego, con el compás se toma la medida del centro *E* al vértice *B*. Esa medida se traslada tres veces sobre la semirrecta. El nuevo punto *B′* es el vértice correspondiente a la figura ampliada. Se repite este procedimiento con cada uno de los vértices.



Finalmente, se trazan los lados de la imagen uniendo los nuevos vértices, con lo cual se consigue "la ampliación" del cuadrilátero *ABCD*.



El cuadrilátero *A′B′C′D′* es la imagen de *ABCD* por la homotecia de dentro en *E* y factor de conversión 3.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • A Argumento • R Razono • S Soluciono problemas

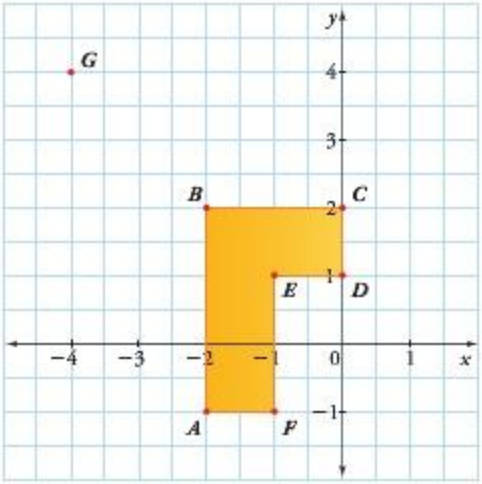
I **Responde.**

158. ¿Qué es una homotecia?

159. Si ABC es un triángulo equilátero y $A'B'C'$ es su imagen por homotecia, ¿cuál es la medida del $\measuredangle A'B'C'$?

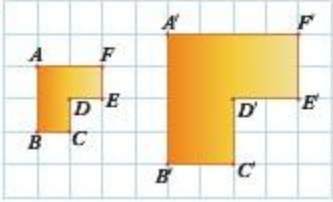
160. Si se aplica una homotecia de factor de conversión 4 a un cuadrado de lado 6 cm, ¿cuál es el perímetro de su imagen?

161. Copia la siguiente figura en tu cuaderno. Luego, realiza una homotecia con centro en G y factor de conversión 2.

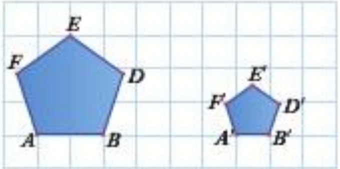


A **Determina el factor de conversión de la homotecia aplicada sobre los polígonos *ABCDEF* y *ABDEF*. Justifica tu respuesta.**

162.



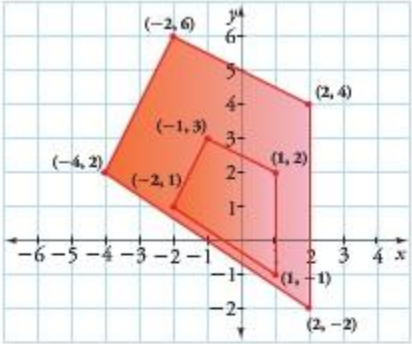
163.



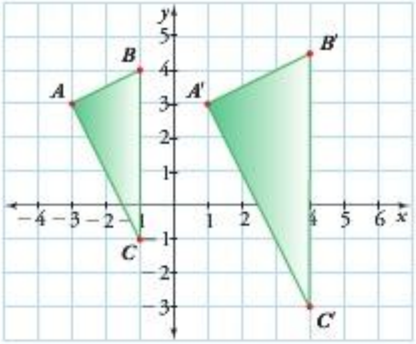
164. Traza en el plano cartesiano una figura plana. Luego, ubica un centro y halla su imagen mediante una homotecia con factor de conversión 3.

R **Halla el centro de homotecia y el factor de conversión, a partir de las coordenadas de los vértices de cada figura y de su imagen.**

165.

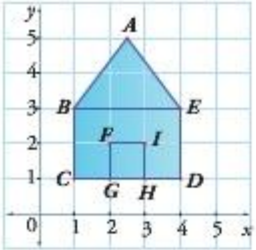


166.



167. Dibuja el polígono de vértices $P = (-3, -2)$, $Q = (-1, 3)$ y $R = (1, -1)$. Luego, halla su imagen mediante la homotecia de centro en el punto $S = (-5, 4)$ y factor de conversión 3.

S **Una estudiante trazó la figura de una casa en el plano cartesiano como se muestra en la siguiente figura.**



168. Traza la figura de la casa reducida mediante una homotecia de factor $\frac{1}{2}$ y centro en $(1, 1)$.

169. Determina las coordenadas de los vértices de la figura reducida.

5. Medición

Ampliación multimedia

La **medición** es un proceso que consiste en comparar un patrón seleccionado, con el objeto o magnitud que se desea medir, para saber cuántas veces el patrón está contenido en esa magnitud. Algunas magnitudes físicas son la longitud, el área, la masa y el tiempo.

5.1 Longitud

Actividades

La **longitud** es una magnitud que se mide en una dimensión, como el ancho, el largo y la altura.

Unidades de medida de longitud

La unidad fundamental para medir longitudes en el Sistema Internacional de Medidas y en el Sistema Métrico Decimal, es el metro, el cual se simboliza con la letra m.

En este sistema de medición, existen unidades mayores que el metro, conocidas como múltiplos del metro, y unidades menores que el metro llamadas submúltiplos del metro.

Múltiplos del metro			Submúltiplos del metro		
Kilómetro (km)	Hectómetro (hm)	Decámetro (dam)	Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
1.000 m	100 m	10 m	$\frac{1}{10}$ m	$\frac{1}{100}$ m	$\frac{1}{1.000}$ m

Para convertir unidades de medida en el Sistema Métrico Decimal, se multiplica o se divide por potencias de 10, de la siguiente manera:

- Para convertir unidades de orden superior a orden inferior, se multiplica por la potencia de diez correspondiente.
- Para convertir unidades de orden inferior a orden superior, se divide por la potencia de diez correspondiente.

EJEMPLO

De Bogotá a Cartagena hay aproximadamente 109.000 dam. En cambio, la distancia de Bogotá a Tunja es de 1.200 hm. ¿Cuántos kilómetros más lejos de Bogotá queda Cartagena que Tunja?

Primero, se convierten ambas distancias a kilómetros. Como 1 km equivale a 1.000 m y 1 dam equivale a 10 m, se divide la medida expresada en decámetros (dam) entre 10^2. Además, como 1 hm equivale a 100 m se divide la medida expresada en hectómetros entre 10.

$$109.000 \div 100 = 1.090 \qquad 1.200 \div 10 = 120$$

Luego, se realiza la resta entre la distancia de Bogotá a Cartagena y la distancia de Bogotá a Tunja.

$$1.090 - 120 = 970$$

Finalmente, se tiene que Cartagena queda 970 km más lejos de Bogotá que de Tunja.

Otras unidades de longitud

Existen otras unidades de longitud que no pertenecen al Sistema Internacional de Medidas, que generalmente se utilizan en la aviación, en la navegación, y en el comercio de partes de maquinaria. Sus equivalencias en el sistema métrico son:

Unidad	Abreviatura	Equivalencia
Pulgada	pul	2,54 cm
Pie	p	30,48 cm
Yarda	yd	91,44 cm
Milla	mi	1.609,347 m

Para realizar conversiones se utilizan estas equivalencias.

Perímetro

Actividad

El **perímetro** de una figura es la medida de longitud de la línea que forma su contorno o borde. Para calcular el perímetro *P* de un polígono se suman las medidas de sus lados.

EJEMPLOS

1. Laykyun Setkyar es una de las estatuas más altas del mundo. Está ubicada en la República de Myanmar, al sudeste de Asia y tiene 116 pies de altura. ¿Cuántos metros de altura tiene la estatua Laykyun Setkyar?

Primero, se realiza la conversión de pies a metros. Como 1 p equivale a 30,48 cm, se divide entre 100, con lo cual se tiene que 1p equivale a 0,3048 m.

Luego, se multiplica 116 por 0,3048.

$$116 \times 0{,}3048 = 35{,}35$$

Finalmente, se tiene que la altura aproximada de la estatua Laykyun Setkyar es de 35,35 m.

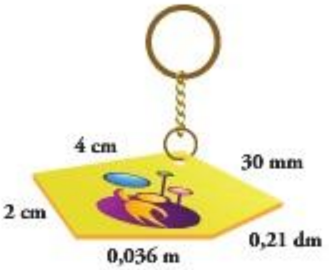
2. Un avión comercial alcanza una velocidad de 600 millas por hora. ¿Cuál es su velocidad en kilómetros por hora?

Primero, se convierte una milla a kilómetros. Como 1 milla equivale, aproximadamente, a 1.609,347 m, se divide este valor entre 1.000 para hallar su equivalencia en kilómetros. Así, 1 mi equivale a 1,609 km.

Luego, se tiene que $600 \times 1{,}609 = 965{,}4$

Finamente, se tiene que la velocidad del avión se aproxima a los 965 km por hora.

3. Calcular el perímetro de un llavero con la siguiente forma.



Primero, se expresan todas las medidas en una misma unidad de medida. Como 2 de las 5 medidas están en centímetros se convierten las demás medidas a centímetros multiplicando o dividiendo entre la potencia de diez correspondiente.

$30 \div 10 = 3$, así 30 mm equivalen a 3 cm.

$0{,}21 \times 10 = 2{,}1$, así 0,21 dm equivalen a 2,1 cm.

$0{,}036 \times 100 = 3{,}6$, así 0,036 m equivalen a 3,6 cm

Luego, se suman las medidas en centímetros de todos los lados, para hallar el perímetro *P*.

$$P = 2\text{ cm} + 4\text{ cm} + 3\text{ cm} + 2{,}1\text{ cm} + 3{,}6\text{ cm}$$
$$= 14{,}7\text{ cm}$$

Finalmente, se tiene que el perímetro del llavero es de 14,7 cm.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto · E Ejercito · S Soluciono problemas

I Completa.

170. Para convertir de centímetros a hectómetros se ________ entre ________. En cambio, para convertir de kilómetros a ________ se ________ por 10.000.

171. Una milla equivale a ________ kilómetros y una yarda equivale a ________ milímetros.

E Convierte las siguientes medidas a metros.

172. 5 km
173. 4,3 hm
174. 79 cm
175. 13 dam
176. 12.200 mm
177. 85 dm
178. 4 mi
179. 62 pul
180. 31 p
181. 54 yd

E Halla el perímetro de cada polígono.

182. Un cuadrado de 4,5 cm de lado.

183. Un rectángulo de 6,5 cm de base y 4 cm de altura.

184. Un triángulo equilátero de 5,2 cm de lado.

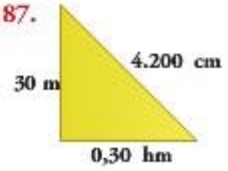
185. Un pentágono regular de 8 cm de lado.

186. Ordena las altitudes de las siguientes ciudades de menor a mayor.

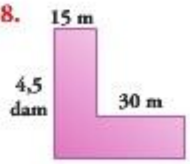
Ciudad	Altitud
Cali	995 m
Barranquilla	14.200 cm
Bogotá	2.630 m
Medellín	14,79 hm

E Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

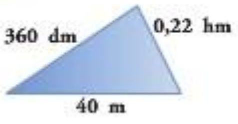
187.



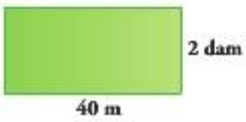
188.



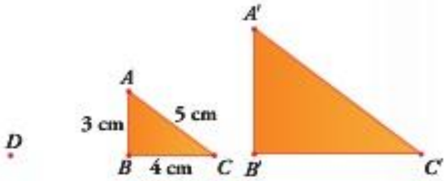
189.



190.



191. Determina el perímetro de cada uno de los triángulos de la figura si se conoce que el triángulo $A'B'C'$ es la imagen del triángulo ABC por la homotecia con centro en D y factor de conversión 2.



S Lee y responde.

192. Los ríos más largos del mundo son el Amazonas con 6.800 km de longitud y el Nilo con 67.560 hm. ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de ambos ríos?

193. La Torre Eiffel tiene 330 metros de altura. ¿ Cuál es la altura de la Torre Eiffel en decámetros?

194. Un edificio tiene una altura de 20 m y 35 cm. ¿Cuál es su altura en decámetros?

195. Un buzo se sumergió a 20 pies de profundidad para estudiar cierto tipo de algas. ¿Cuántos metros se sumergió?

196. Una carretera de 8 km 2,5 hm 20 dam 50 m de largo tiene, a ambos lados, árboles separados entre sí 10 m. ¿Cuántos árboles hay en la carretera?

197. Se quiere cercar un terreno con forma de cuadrado, cuyo lado mide 8 hm 3 dam y 50 m. Si 200 metros de alambre de púas tienen un costo de $35.500, ¿cuánto cuesta cercar el terreno?

S Lee y resuelve.

Charlotte Motor Speedway es un kartódromo en forma óvalo de 1,5 mi inaugurado en 1960 cerca de la ciudad de Charlotte, Estados Unidos. Las instalaciones también incluyen un circuito mixto de 2,25 mi y un kartódromo de 0,6 mi.

198. Calcula cuántos kilómetros de longitud tiene el Charlotte Motor Speedway.

199. Determina cuántos hectómetros de longitud mide el circuito mixto.

200. Halla cuántos pies de longitud tiene el kartódromo.

5.2 Área

Actividad Ampliación multimedia

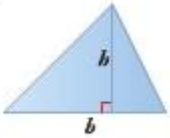
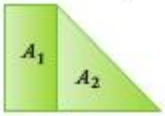
El **área** es la medida de la superficie de una figura plana. Para hallar el área de una figura se elige una unidad o patrón de medida y se calcula la cantidad de veces que la figura contiene a la unidad elegida.

Las unidad básica de medida de área en el Sistema Métrico Decimal es el metro cuadrado (m^2). También se utiliza con frecuencia el centímetro cuadrado (cm^2).

El área de una figura cumple las siguientes propiedades:

- Siempre es un número positivo.
- Si una región se divide en varias regiones que no se superponen, el área de la región total equivale a la suma de las regiones en que se ha dividido.

Para calcular el área de un polígono se pueden utilizar las siguientes expresiones:

Rectángulo	Triángulo	Otros polígonos
$A = b \times h$, donde b es la base y h es la altura.  	$A = \frac{b \times h}{2}$, donde b es la base y h la altura.  	$A = A_1 + A_2$, donde A_1 es el área del rectángulo y A_2 es el área del triángulo. 

Ampliación multimedia Actividad

En general, para calcular el área de cualquier polígono se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se divide el polígono en regiones triangulares.
- **Luego,** se calcula el área de cada triángulo.
- **Finalmente,** se suman las áreas resultantes.

EJEMPLO

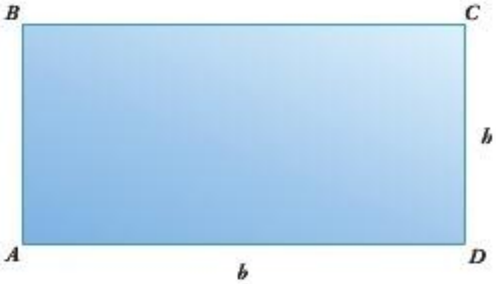
Hallar el área del rectángulo *ABCD* cuyas dimensiones son 2 cm y 4 cm.

Para hallar el área A del rectángulo $ABCD$ se pueden realizar dos procedimientos:

Se divide la figura en cuadrados de un centímetro de lado y se cuenta el número de cuadrados que recubren la figura.

Como el rectángulo contiene 8 cuadrados de un centímetro de lado su área es 8 cm^2.

Se multiplica la medida de la base por la altura.



Como la base (b) es igual a 4 cm y la altura (h) es igual a 2 cm, se tiene que

$$A = b \times h$$
$$A = 4 \times 2 = 8$$

Así, el área del rectángulo $ABCD$ es de 8 cm^2.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · E Ejercito · S Soluciono problemas

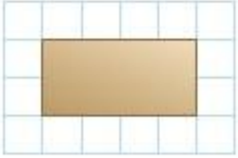
Responde.

201. ¿Cuál es la diferencia entre superficie y área?

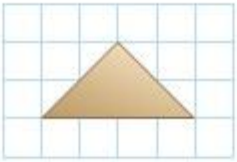
202. ¿Cuáles son las propiedades del área?

E **Calcula el área de cada polígono si la unidad que indica la cuadrícula es 1 cm².**

203.

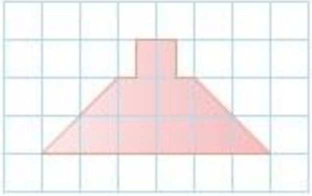


204.

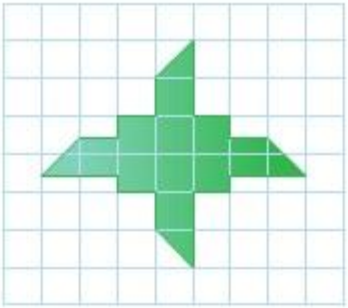


E **Sea ⊿ la unidad de medida, calcula el área de los siguientes polígonos.**

205.

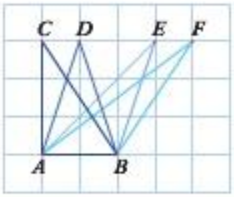


206.



207.

208. Observa los triángulos en la cuadrícula y completa la tabla. Luego, responde.



Triángulo	Base	Altura	Base
ABC			
ABD			
ABE			
ABF			

209. ¿Qué elementos tienen en común todos los triángulos?

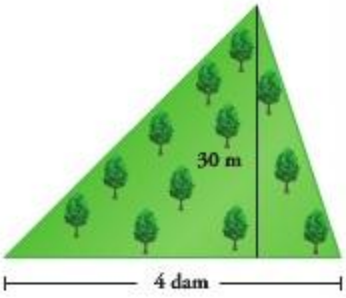
210. ¿Qué relación existe entre el área de cada triángulo?

211. Dibuja otro triángulo que cumpla las mismas condiciones.

S **Resuelve.**

212. Determina el número de baldosas cuadradas que se requieren para colocar el piso a un salón de forma rectangular de 6 m de largo y 4,5 m de ancho, si se sabe que cada baldosa mide 60 cm de lado.

213. Halla la cantidad de naranjos que pueden sembrarse en un terreno de forma triangular, como el que se muestra en la figura, si cada árbol necesita 6 m² para desarrollarse.



5.3 Tiempo

Actividad

En el Sistema Internacional de Medidas (SI) se establece el **segundo** (s) como unidad fundamental para calcular el tiempo.

El sistema que mide el tiempo no se maneja en base diez, como el Sistema Métrico Decimal, sino que se trabaja en base 60; por esta razón es llamado **sexagesimal** y es usado de esta forma desde la antigua Babilonia.

Algunas unidades de tiempo utilizadas con frecuencia son:

Unidad	minuto (min)	hora (h)	día	año	lustro	década	siglo	mileno
Equivalencia	60 s	60 min	24 h	365 días	5 años	10 años	100 años	1.000 años

Para expresar medidas de tiempo en diferentes unidades, se multiplica o se divide por las equivalencias que se muestran en la tabla.

El reloj mundial está situado en una plaza en el centro de la ciudad de Berlín. Esta gran estructura construida con metal, rota de manera permanente y muestra la hora de todo el mundo. Este reloj fue inaugurado el 30 de septiembre de 1969.

EJEMPLOS

1. **Sofía se está entrenando para participar en el campeonato internacional de triatlón. En su último entrenamiento, sus tiempos fueron de 18 minutos y 37 segundos en natación, 34 minutos y 59 segundos en la bicicleta y 1 hora y 48 segundos en la carrera. ¿Cuál fue el tiempo total de Sofía en su práctica?**

Para calcular el tiempo total que gastó Sofía en su último entrenamiento, se deben sumar los tiempos de cada modalidad, así:

Natación:	0 hora	+	18 minutos	+	37 segundos
Ciclismo:	0 hora	+	34 minutos	+	59 segundos
Carrera:	1 hora	+	0 minutos	+	48 segundos
Tiempo total:	1 hora	+	52 minutos	+	144 segundos

Como 60 segundos corresponden a 1 minuto, entonces, se hallan los minutos que hay 144 segundos.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 60 \\ \hline \underbrace{24}_{\text{segundos}} & \underbrace{2}_{\text{minutos}} \end{array}$$

Luego, se suma 2 min a 52 min. Es decir, 54 min.

Por tanto, el tiempo total de Sofía en su práctica fue 1 hora, 54 minutos y 24 segundos.

2. **Calcular la cantidad de días que hay en 4 lustros.**

Como cada lustro tiene 5 años, entonces, 4 lustros equivalen a:

$$4 \text{ lustros} = 4 \times 5 \text{ años} = 20 \text{ años}.$$

Ahora, la cantidad de días que hay en 20 años es:

$$20 \times 365 \text{ días} = 7.300 \text{ días}.$$

Por tanto, en 4 lustros hay 7.300 días.

5.4 Masa

Actividad

El kilogramo está definido como la masa de un cilindro patrón compuesto por una aleación de platino e iridio. Este cilindro se encuentra en la Oficina de pesos y medidas en Francia.

La **masa** se relaciona con la cantidad de materia de un cuerpo. La unidad fundamental para medir la masa en el Sistema Internacional es el kilogramo, que se simboliza como kg.

El **gramo** (g) es una de las unidades de masa más usadas. Al igual que el metro, el gramo tiene múltiplos y submúltiplos. Así,

Múltiplos	Símbolo	Equivalencia en g
Kilogramo	kg	1.000 g
Hectogramo	hg	100 g
Decagramo	dag	10 g

Submúltiplos	Símbolo	Equivalencia en g
decigramo	dg	0,1 g
centigramo	cg	0,01 g
miligramo	mg	0,001 g

Para expresar una unidad de masa en términos de otra unidad se realiza el mismo procedimiento indicado para las unidades de longitud.

Recuerda que...

1 tonelada = 1.000 kg

1 onza = 28,35 g

1 quilate = 0,2 g

EJEMPLOS

1. Un camión transporta 4,5 toneladas de papa y 32.500 hg de cebolla. ¿Cuántos kilogramos transporta el camión?

Primero, se convierte la cantidad de papa a kilogramos, así:

$$4{,}5 \text{ t} = 4{,}5 \times 1.000 \text{ kg} = 4.500 \text{ kg}$$

De donde se obtiene que en 4,5 toneladas hay 4.500 kilogramos.

Luego, se convierte 32.500 hg de cebolla a kilogramos, así:

$$32.500 \div 10 = 3.250$$

Así, en 32.500 hg de cebolla hay 3.250 kg de cebolla.

Finalmente, se suma 4.500 kg y 3.250 kg, así:

$$4.500 + 3.250 = 7.750$$

Por tanto, el camión transporta 7.750 kg.

2. Joaquín tiene tres bultos de zanahorias marcados con 75 kg, 650 hg y 5.000 dag, respectivamente. ¿Cuál de los tres bultos tiene mayor masa?

Para comparar las masas de los tres bultos de zanahorias, se deben convertir a una misma unidad, así:

$$75 \text{ kg} = 75 \text{ kg}$$
$$650 \text{ hg} = 650 \div 10 = 65 \text{ kg}$$
$$5.000 \text{ dag} = 5.000 \div 100 = 50 \text{ kg}$$

Así que el bulto de mayor masa es el de 75 kg.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

214. Responde. ¿Cómo se puede definir un segundo?

E **Calcula.**

215. Los segundos que hay en 2 h 10 m 50 s.

216. Los segundos que hay en 9 días.

217. Los años que hay en 5 décadas, 3 lustros.

218. Las décadas que hay en 7 milenios, 8 siglos.

E **Convertir en gramos las siguientes medidas de masa.**

219. 342 t

220. 435 kg

221. 140 dg

222. 0,047 hg

223. 3,25 hg

224. 0,00245 t

225. 18 quilates

226. 25.894 mg

Determina si cada afirmación es verdadera o falsa.

227. 4 horas = 7.200 segundos (   )

228. 90 minutos = 1,5 horas (   )

229. 3 horas = 1.800 minutos (   )

230. 5.400 segundos = 90 minutos (   )

231. 1.800 segundos = 0,5 horas (   )

232. 13 horas = 6.000 minutos (   )

R **Completa.**

233. $\frac{1}{2}$ hora =__________ min =__________ s

234. $\frac{1}{2}$ día =________ h =_______ min =_____ s

235. $\frac{1}{2}$ siglo =____ décadas =___ lustros =___ años

236. $4\frac{1}{2}$ años =___ días =___ h =___ min =___ s

R **237. Determina los precios de un queso doble crema de 300 g, un queso mozarela de 750 g, y un queso campesino de 1.000 g, a partir de la información.**

Lee la información. Luego, resuelve.

La expectativa de vida que tiene un hámster es de 1.095 días. La expectativa de vida que tiene una ballena es de 80 años.

238. Determina cuántas veces más vive una ballena que un hámster.

S **Lee y resuelve.**

239. Un móvil recorre 600 km en 7 horas, otro recorre 500 km en 6 horas. ¿Cuál de los dos móviles tiene mayor velocidad?

240. Luisa decidió mandar fundir sus joyas para hacer anillos de 25 g cada uno. Tenía un collar de oro de 420 dg, una pulsera de oro de 0,35 hg y un par de aretes de 1,5 dag cada uno. ¿Cuántos anillos se pueden fabricar?

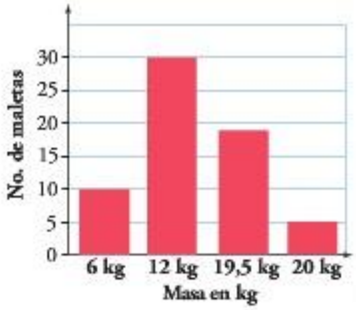
S **Soluciona.**

241. Halla cuántos días ha vivido Felipe si hoy está cumpliendo 23 años.

242. Determina la hora de llegada de un automóvil que empleó 10 h 35 min para hacer un viaje de Bogotá a Medellín, si se sabe que salió a las 7h 25 min.

243. Determina la cantidad de minutos y segundos que se adelanta un reloj en una semana, si se sabe que el reloj se adelanta 5 s cada hora.

S **Observa la siguiente gráfica de barras que muestra la cantidad de equipajes con diferentes masas en un vuelo. Luego, responde.**

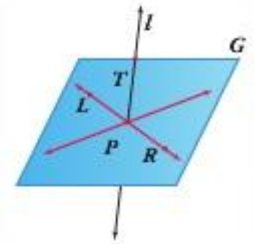


244. ¿Cuál es la masa total de las maletas de 6 kg en gramos?

245. ¿Cuál es la masa total en gramos de todos los equipajes?

Conceptos básicos

Observa la siguiente figura. Luego, completa cada expresión.



246. *G* es ____________________.

247. Los puntos *P*, *R* y *L* son ____________.

248. Los puntos *P*, *L*, *R* y *T* no son ____________.

249. La semirrecta ________ está en *G*.

250. La recta *l* se puede escribir como ________.

Realiza la construcción y responde.

- Traza una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y ubica un punto *C* por fuera de la recta.
- Construye una recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por *C*. Nombra la recta construida como *m*.
- Construye una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por *C*. Al punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta trazada nómbralo *D*.
- Construye una recta paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ que pase por A, nómbrala *n*. Al punto de intersección de *n* y *m* nómbralo como *F*.

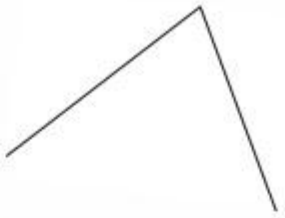
251. ¿Qué figura geométrica forman los segmentos *AF*, *FC*, *CD*, *DA*? Justifica tu respuesta:

____

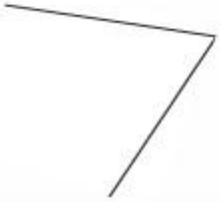
____

Completa cada paralelogramo teniendo en cuenta los criterios de paralelismo y perpendicularidad.

252.



253.



Ángulos

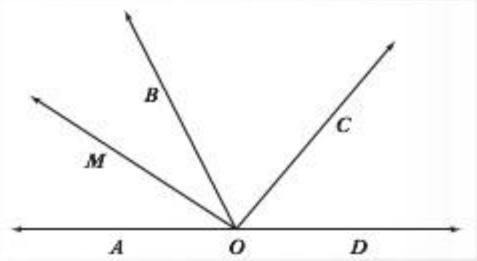
Construye, con transportador, cada uno de los siguientes ángulos. Luego, clasifícalos según su medida.

254. 50°

255. 120°

256. 10°

Utiliza el transportador para medir los siguientes ángulos.



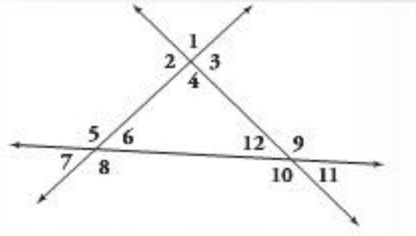
257. ∡*DOC*: ________

258. ∡*AOM*: ________

259. ∡*DOM*: ________

260. ∡*COM*: ________

Observa la figura. Luego, responde.



261. ¿Cuáles pares de ángulos son consecutivos?

____

262. ¿Cuáles pares de ángulos son adyacentes?

____

263. ¿Cuáles pares de ángulos son opuestos por el vértice?

____

Polígonos

Nombra los vértices, los lados, las diagonales y los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

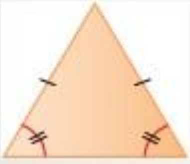
264.

265.

266. Observa la figura. ¿Cuántos pentágonos convexos hay?

Nombra y clasifica los siguientes triángulos según la medida de sus lados y sus ángulos.

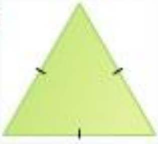
267.



269.

268.

270.



Clasifica los siguientes cuadriláteros en paralelogramos, trapecios o trapezoides.

271.

272.

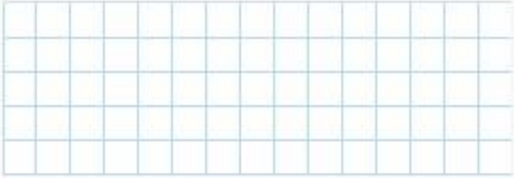
273.

Transformaciones en el plano cartesiano

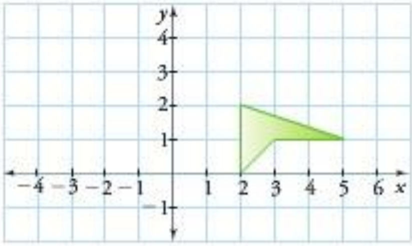
Representa los polígonos en el plano cartesiano.

274. Un triángulo de vértices: $A = (-3, -2)$, $B = (1, 5)$ y $C = (2, -1)$.

275. Un pentágono de vértices: $H = (4, -2)$, $I = (8, -2)$, $J = (8, 3)$, $K = (6, 5)$ y $L = (4, 3)$



Aplica las siguientes transformaciones sobre el polígono de la figura.



276. Una traslación de 4 unidades hacia la izquierda.

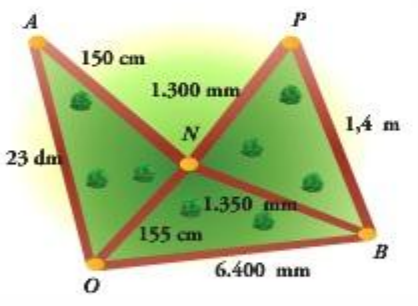
277. Una rotación alrededor del vértice $B = (2, 0)$, 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

278. Una reflexión sobre el eje y.

279. Una homotecia con centro en $D = (-1, -1)$ y factor de conversión 3.

Medición

280. Uno de los caminos que van de O a B tiene longitud 6,5 m. ¿Cuál camino es?



PROBLEMAS PARA REPASAR

La jirafa es el animal terrestre más alto que existe actualmente. Puede llegar a medir hasta 5,5 m de altura y su masa puede ser hasta de 900 kg. Las jirafas se transportan en camiones especiales que tiene un vagón abierto en la parte superior por el cual sobresale su cuello.

Si la altura del vagón del camión en el que se transporta una jirafa es la tercera parte de su altura total, ¿cuántos centímetros mide el cuello de la jirafa? y ¿cuántas toneladas debe soportar como mínimo el camión para transportar la jirafa?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántos centímetros mide el cuello de la jirafa? y ¿cuántas toneladas debe soportar como mínimo el camión para transportar la jirafa?

¿Cuáles son los datos del problema?

Una jirafa puede llegar a medir 5,5 m de altura y su masa puede ser hasta de 900 kg. Además, la medida de la altura del vagón del camión en el que transporta una jirafa es la tercera parte de su altura total.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se convierte a centímetros la altura que puede llegar a medir una jirafa. Para esto se multiplica 5,5 por 100.

$$5{,}5 \times 100 = 550$$

Luego, se divide entre 3 el resultado y se multiplica por 2 para calcular la longitud del cuello de la jirafa.

$$\frac{550}{3} = 183{,}33;\ 183{,}33 \times 2 = 366{,}66 \text{ cm}$$

Finalmente, se divide entre 1.000 la masa de la jirafa para determinar cuántas toneladas como mínimo debe soportar el camión.

$$\frac{900}{1.000} = 0{,}9$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que, al realizar las conversiones de las unidades de medida, se haya multiplicado o dividido entre la potencia de diez correspondiente. Luego, se tiene que el cuello de la jirafa mide aproximadamente 367 cm y el camión en el que se transporta debe soportar como mínimo 0,9 toneladas.

281. ¿Cómo deben ser las líneas de cables de un teleférico para que las cabinas que ascienden a la montaña no se choquen con las que descienden de la misma?

282. Si la cometa gira con respecto a la mano del niño, 20° en sentido contrario a las manecillas del reloj, dibuja la posición de la cometa.

Responde las preguntas 283 a 285 de acuerdo con las siguiente tabla.

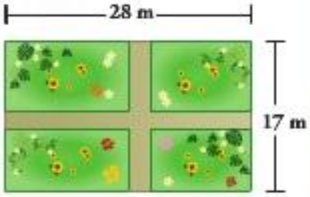
Montaña más alta:	Monte Everest, 8,848 km
Mayor altura de América:	Aconcagua, 69,60 hm
Río más largo de Asia:	Yang-tsé, 63.790 hm
Río más largo de América:	Amazonas, 6.800 km
Río más largo de África:	Nilo, 675.600 dam

283. ¿Cuántos metros de diferencia hay entre el Aconcagua y el Everest?

284. ¿Cuántos metros de diferencia hay entre el Nilo y el Yang-tsé?

285. ¿Cuántos metros de diferencia hay entre el Yang-tsé y el Amazonas?

286. Determina el área sembrada del siguiente jardín sin tener en cuenta los dos caminos perpendiculares que lo atraviesan cuyo ancho es de 75 cm.



Resuelve las actividades 287 a 288 de acuerdo con la siguiente situación.

Se quiere construir un corral con 72 m de malla. Para esto un granjero establece dos opciones para construir el corral:

- Que sea rectangular y que el largo sea el doble del ancho.
- Que tenga forma cuadrada.

287. Calcula las dimensiones de cada posible corral.

288. Establece cuál de los dos corrales tiene la mayor superficie.

289. El colibrí es el animal que aletea más rápido. Bate sus alas 90 veces por segundo. ¿Cuántas veces por hora puede llegar a batir sus alas?

290. Se quiere empacar una carga de 3.528.000 g de arroz en sacos, de tal forma que en cada uno se empaquen 36 kg, ¿cuántos sacos se necesitan?

291. En un refugio se consumen 2.686 kg de alimentos en un día, si se tiene una provisión de alimentos de 1.106 t, ¿cuántos días durará la provisión?

292. El elefante africano es el animal que pasa más horas comiendo, necesita consumir 200 kilos de hierba, tarea a la que dedica 16 horas diarias. ¿Cuántos gramos de hierba debe consumir, aproximadamente, un elefante durante un mes?

293. El filósofo británico Alfred Jules nació en 1910 y el matemático alemán August Möbius nació en 1790, ¿cuántos lustros transcurrieron entre el año en que nació August Möbius y el año en el que nació Alfred Jules?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para reconocer los ángulos y posturas saludables al sentarse.

Galería de imágenes

Las personas que estudian, así como quienes trabajan en una oficina, pasan muchas horas sentados en una silla. Con el tiempo, esto puede generar ciertos problemas de salud, como por ejemplo, desviaciones de la columna, dolores de espalda y daño en músculos, tendones y nervios.

Sin embargo, existen algunas recomendaciones que se deben tener en cuenta para sentarse correctamente:

Es importante apoyar los pies en una caja o una pila de revistas para evitar que se queden colgando.

- Las rodillas deben formar un ángulo recto con los muslos.
- El pie debe formar un ángulo de 90° con la pantorrilla.
- La pantorrilla debe estar en posición vertical y formar un ángulo de 90° con el muslo.
- El muslo debe estar en forma horizontal y formar un ángulo de 90° con el tronco.

Además, se recomienda que la línea de visión sea paralela a la superficie de trabajo, y que el ángulo de visión sea menor de 60° en el plano horizontal.

No se aconseja sentarse muy cerca al monitor, ya que puede ocasionar miopía, la distancia ideal entre la persona y el monitor, no debe ser menor de 40 cm de los ojos de la persona.

El borde superior de monitor debe quedar al nivel de los ojos de la persona y esta debe mirar de frente, de lo contrario, puede ocasionar cansancio visual y molestia en los músculos del cuello.

1. **Consulta y responde. ¿Cómo se describe la forma en la que normalmente se sienta un estudiante?**
2. **Ensaya miradas al frente que formen ángulos de 90°, 60°, 45° y 30°, en relación con la posición de la mirada horizontal y la postura vertical de tu tronco.**
3. **Investiga cuál es el menor ángulo que pueden formar doblando su brazo, teniendo como vértice su codo.**
4. **Observa la ilustración. Luego, responde.**
   - **a.** ¿Cuáles son errores que se presentan en la postura de la persona que aparece en la ilustración?
   - **b.** ¿Cuáles son las posibles molestias que puede presentar la persona?

... También para reconocer la importancia de superficies horizontales y verticales.

Indicar la horizontalidad y verticalidad de una superficie es una herramienta de suma importancia en diversas actividades como carpintería, herrería, albañilería, entre otros. Para ello existen instrumentos como la plomada y el nivel que permiten conocer si un objeto está alineado perfectamente en posición horizontal o vertical.

La **plomada** es una pesa de forma cilíndrica o cónica fabricada de un metal pesado ligada a una cuerda y en el otro extremo tiene una chapa de las mismas dimensiones de la pieza de metal. En construcción es muy utilizada para medir la verticalidad de un muro colocando la chapa en un extremo del mismo y verificando que la línea generada hasta el otro extremo sea paralela a la línea vertical que forma el muro como se ve en la figura.

Como se observa en la fotografía, la plomada forma una línea paralela al muro. Se puede construir fácilmente una plomada casera con una tuerca amarrada a un extremo de una pita para verificar líneas paralelas con objetos que deben estar verticalmente.

El **Nivel de burbuja** es un artefacto que tiene dos ampollas de cristal, una horizontal y otra vertical para verificar la horizontalidad o verticalidad de una superficie. En cada ampolla se puede observar una burbuja que es menor a dos marcas, para verificar que una superficie está como se requiere al colocar el nivel sobre una superficie, debe quedar la burbuja perfectamente distribuida entre las dos marcas. Para verificar la horizontalidad de una superficie se usa la ampolla horizontal y para verificar la verticalidad de una superficie se utiliza la ampolla vertical. Es fácil construir un nivel casero con un recipiente transparente que tenga divisiones marcadas en su estructura como un biberón o una vasija. Se llena de algún líquido hasta una de estas franjas y cuando se coloca sobre una superficie el agua debe coincidir horizontalmente con la marca del recipiente como si fueran líneas paralelas.

1. **Utiliza elementos que encuentres en tu casa para construir una plomada y un nivel de acuerdo con la lectura.**
2. **Mide en tu salón de clase la horizontalidad o verticalidad de diferentes superficies con la plomada y el nivel construidos. Luego, describe los resultados obtenidos en tu cuaderno.**
3. **Observa la imagen de una casa en construcción. Lee las instrucciones y desarrolla la actividad.**
   - a. Marca con azul dos paredes de líneas paralelas en la construcción.
   - b. Marca con rojo dos paredes de líneas perpendiculares en la construcción.
   - c. Marca con amarillo dos lugares donde los constructores necesiten usar la plomada. Justifica tu respuesta.
   - d. Marca con naranja dos lugares donde se necesite utilizar el nivel en la construcción. Justifica tu respuesta.
4. **Investiga cómo se utiliza la plomada y el nivel en carpintería y herrería. Luego, muestra un ejemplo a tus compañeros de clase y explica la relación de estas herramientas con las líneas paralelas.**

Trabaja con GeoGebra

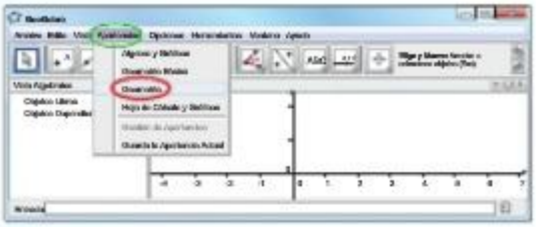
Objetivo: determinar el área, el perímetro y las dimensiones de una figura plana.

Concepto: calcular el área, el perímetro y las dimensiones de un rectángulo en el programa GeoGebra.

Para acceder a GeoGebra, ingresa y descarga el programa en: www.geogebra.org

❶ Haz clic en el icono

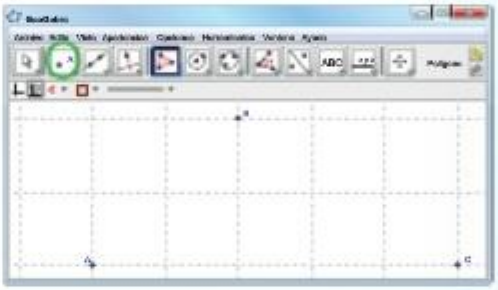
❷ Observa la ventana que se despliega. Luego, en el menú, selecciona **Apariencias** y haz clic en **Geometría,** como se muestra en la figura.



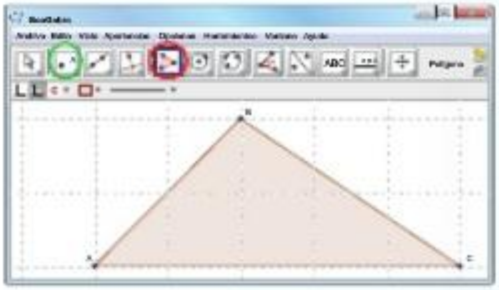
❸ Visualiza la ventana de trabajo con sus diversas herramientas, como se muestra en la siguiente figura.

❹ En el menú de herramientas, selecciona la opción **Vista**, luego la opción **Cuadrícula**, como se muestra en la figura.

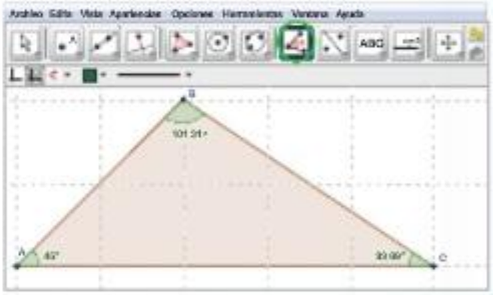
❺ Para construir un polígono de tres lados, selecciona **Nuevo Punto** de la barra de herramientas y haz clic tres veces en el área gráfica para crear los vértices del triángulo.



❻ Selecciona **Polígono** de la barra de herramientas y vuelve a hacer clic sobre los vértices *A*, *B* y *C*, terminando en *A* para cerrar el polígono.



❼ Calcula la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo *ABC*. Selecciona la herramienta **Ángulo**. Luego, haz clic en cada uno de los vértices del triángulo. Repite el proceso comenzando desde otro vértice, como se muestra en la figura.



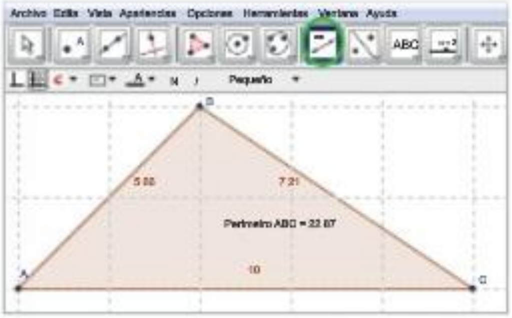
8. Calcula la medida de cada uno de los lados del triángulo *ABC*.

Selecciona la herramienta **Ángulo** de herramientas, después haz clic en **Distancia** o **Longitud**.

Luego, haz clic en cada uno de los lados del triángulo, como se muestra en la figura.

9. Determina el perímetro del triángulo *ABC*. Selecciona **Distancia o Longitud** de la barra de herramientas.

Luego haz clic en el interior del triángulo *ABC*, como se muestra en la figura.



10. Realiza la construcción de los siguientes triángulos, dadas las condiciones.

a. Un triángulo *CDE*, tal que el ángulo *E*, sea recto y la medida del lado *CD* sea 4 cm.

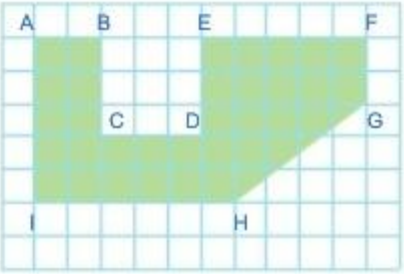
b. Un triángulo isósceles, donde un ángulo interno mida 120°.

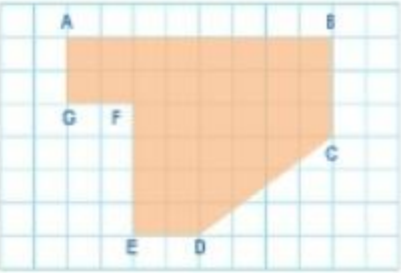
c. Un triángulo de perímetro 15 cm.

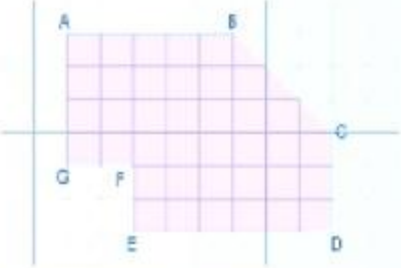
d. Un triángulo escaleno donde uno de sus lados mide 6 cm.

11. Determina el área del triángulo *ABC*. Selecciona **Distancia** o **Longitud** de la barra de herramientas, después haz clic en **Área**. Luego haz clic en el interior del triángulo *ABC*, como se muestra en la figura.

12. Dibuja los siguientes polígonos y calcula su área. Recuerda que cada ☐ equivale a 1 cm.







7 Estadística y probabilidad

Estándar: pensamiento aleatorio

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer los **conceptos básicos de estadística**.
- Identificar los **tipos de muestreo** que se pueden realizar dentro de una población.
- Caracterizar **variables cualitativas**.
- Realizar el **conteo** de los elementos de un espacio muestral.
- Hallar la **probabilidad de ocurrencia de un evento**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

- **5** Multimedia
- **1** Galería
- **12** Actividades
- **1** Audio
- **6** Imprimibles
- **2** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Expresa cada porcentaje como fracción y decimal.

Porcentaje	75%	50%	25%	20%	10%
Como fracción	$\frac{3}{4}$				
Como decimal	0,75				

2. Organiza en una tabla y en un gráfico de barras las edades de los estudiantes de primero que asisten al taller de informática.

11 13 12 12 12 13 11 12 11 11 12 12 12 11 12

a. ¿Cuántos estudiantes asisten al taller de informática?

b. ¿Cuántos estudiantes no tienen 11 años?

c. ¿Cuántos estudiantes tienen menos de 13 años?

d. Solo la mitad de los que tienen 12 años son niños. ¿Cuántos son niñas?

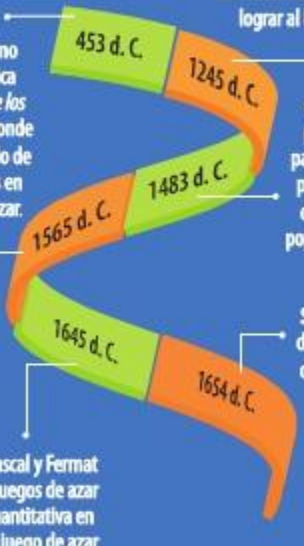
Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

… Para analizar problemas ambientales y ecológicos.

Los seres humanos, por naturaleza, producimos desperdicios de comida, papel y plásticos entre otros materiales. Se diría que cada persona participa en la contaminación del mundo. Aunque esto suene un poco irónico, es así; a diario solamente con el hecho de consumir las onces, estás dejando a un lado empaques de paquetes, jugos o botellas.

:: Lee más acerca de este tema en la página 282.

Cronología de estadística y probabilidad



Europa. En el Renacimiento se empiezan a contabilizar las posibilidades de obtener un resultado, buscando resolver problemas cotidianos.

Francia. Richard de Founival escribe el poema *De Vetula*, en donde se habla por primera vez de las combinaciones que se pueden lograr al lanzar tres dados.

Italia. Luca Pacioli propone problemas particulares para pagar premios en los juegos de arco que son muy populares en esta época.

Italia. Girolamo Cardano publica su obra *Libro de los juegos de azar* donde estudia el cálculo de probabilidades en los juegos de azar.

Francia. Pascal y Fermat utilizan los juegos de azar de forma cuantitativa en su teoría del juego de azar.

Suiza. Jacob Bernoulli da la primera definición clásica de probabilidad en su obra *Ars conjectandi* (el arte de la conjetura).

1. Conceptos generales

Actividad

Historia de las matemáticas

Heródoto
(485 a. C.-425 a. C.)

Fue quien descubrió que hacia el año 305 a. C. se realizó un registro para saber el número de habitantes y las ganancias en Egipto, este es el primer censo del cual se tiene conocimiento.

La **estadística** es la ciencia que se ocupa del estudio de fenómenos de tipo genérico, en el ámbito social y económico, normalmente complejos y enmarcados en un contexto variable.

Esta ciencia emplea modelos de organización de la información y de análisis de la misma, permitiendo así, validar los resultados de tal forma que se puedan considerar representativos.

En el uso cotidiano, el término estadística está relacionado con hechos numéricos, sin embargo, la estadística involucra mucho más que números.

En un sentido más amplio, la estadística es la ciencia de reunir, analizar, presentar e interpretar datos. Especialmente en los negocios, en la economía, en la física, en la medicina y en otras muchas ciencias, la estadística brinda herramientas para la toma de decisiones más acertadas.

La estadística se puede clasificar en dos grandes ramas: descriptiva e inferencial.

La **estadística descriptiva** se encarga de la recolección, procesamiento, análisis y presentación de un conjunto de datos.

La **estadística inferencial** se refiere al método para lograr generalizaciones acerca de las propiedades del todo.

Usualmente el término estadística se utiliza como sinónimo de dato. Sin embargo, una información numérica cualquiera puede no constituir una estadística pues para merecer esta denominación, los datos deben constituir un conjunto coherente, organizado de forma sistemática y que presente un criterio de ordenación.

En el estudio de la estadística es importante tener claro el significado de algunos conceptos que se usan en los contextos que involucran el análisis de información.

1.1 Población y muestra

Población: es cualquier conjunto de unidades o elementos claramente definido, en el espacio y el tiempo. Los elementos pueden ser personas, hogares, manzanas, juguetes, comidas, escuelas, hospitales y empresas, entre otros.

Muestra: es un subconjunto representativo de la población a partir del cual se pretende realizar inferencias para dicha población.

Si en una investigación estadística, se necesita hacer el reconteo de la totalidad de los elementos que componen la población por investigar, entonces, se dice que el estudio es un **censo**.

Por ejemplo, para incrementar la producción de huevos en una finca se decidió estudiar los aspectos que influían en el comportamiento de las gallinas ponedoras. Para ello, se escogieron 10 gallinas en cada uno de los siete galpones. Luego, se agruparon en un nuevo galpón.

En este caso, la población está formada por todas las gallinas que están en los siete galpones y la muestra está formada por las gallinas que se ubicaron en el nuevo galpón.

Recuerda que…

Los elementos seleccionados para una muestra reúnen ciertas características que los hacen representativos, significativos y confiables para que, con base en ellos, se puedan hacer inferencias respecto a la población.

Las estadísticas se ocupan de investigar aspectos que nos interesan acerca de una población. En general, una estadística se hace con un objetivo económico, social o con un interés particular de conocer información específica de un determinado grupo. Teniendo en cuenta los intereses se definen variables de estudio dentro de una población.

1.2 Variables

Actividades

Variable: es una característica de la población o de la muestra cuya medida puede cambiar de valor. Según su naturaleza puede ser cualitativa o cuantitativa.

Una **variable cualitativa** es aquella que representa cualidades, atributos o características no numéricas.

Una **variable cuantitativa** es aquella característica de la población o de la muestra que es posible representar numéricamente.

Por ejemplo, una empresa de productos alimenticios planea fabricar un nuevo sabor de goma de mascar. Antes de iniciar la producción, y para optimizar la inversión, el departamento comercial decidió conocer las preferencias de la población para la cual será promocionado el producto. Para ello, preguntó a un grupo de personas que consumen regularmente este tipo de productos, sobre sus preferencias en sabores ácidos y cuánto estarían dispuestos a pagar por una nueva goma de mascar en presentación de 125 gramos.

En este caso, la empresa va a preguntar por dos aspectos: preferencias de sabores y cantidad de dinero.

Las preferencias están enmarcadas dentro de las variables cualitativas.

La cantidad de dinero es una variable cuantitativa.

Para hacer la recolección de datos se usan principalmente dos métodos: la encuesta y la entrevista.

La **encuesta** es un método de recolección de datos que se lleva a cabo generalmente por medio de algún cuestionario que puede o no ser diligenciado por la persona encuestada.

La **entrevista** consiste en una serie de preguntas realizadas por quien entrevista, personalmente, a cada uno de los entrevistados.

A partir de estos dos métodos, se reúne información de la muestra que constituye lo que en estadística se denomina una base de datos.

El término dato también es conocido como información y es el valor de la variable asociada a un elemento de una población o una muestra.

Es posible representar la información de una base de datos en diferentes formas; las más usadas son los diagramas.

Los diagramas se usan dependiendo del contexto y de la información que se desea mostrar. Ofrecen una presentación sencilla y objetiva de la información.

Los diagramas más usados en estadística son de diferentes tipos:

- De barras o histogramas
- De líneas
- Pictogramas
- Circulares

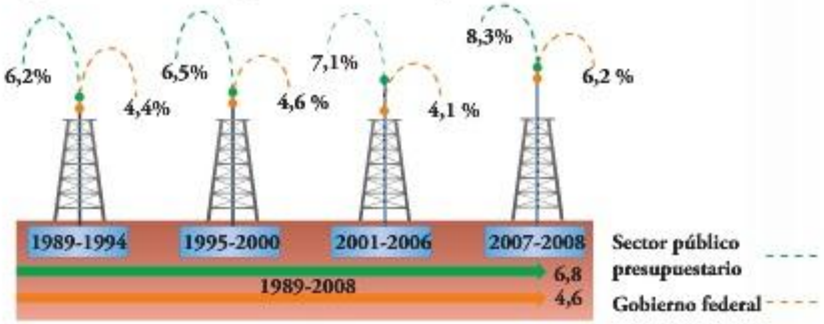
EJEMPLOS

Observar los siguientes diagramas y determinar qué tipo de variable describen.

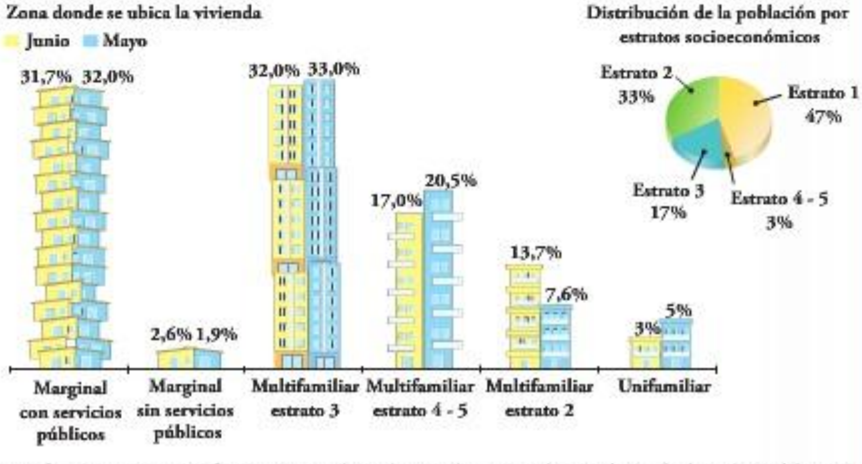
a.

La gráfica de barras representa el comportamiento de dos productos diferentes, mes a mes; se diferencia por el color en cada pareja de barras. El diagrama circular representa el comportamiento de esos productos en cinco países diferentes.

b.



La gráfica representa el comportamiento de una variable relacionada con el petróleo. En este caso, aunque la representación no es estrictamente de barras, sino pozos de petróleo, estos dan una clara idea del tema al que se refiere la información representada.

c. 

Zona donde se ubica la vivienda

Distribución de la población por estratos socioeconómicos

La gráfica representa información sobre el tipo de vivienda en el que habita la población de un país. Cada barra se representa con un estilo específico de vivienda: marginal con servicios, marginal sin servicios, multifamiliar, etc

1.3 Tipos de muestreo

La muestra que se selecciona de una población además de ser representativa debe ser aleatoria.

Una **muestra aleatoria** es aquella que es escogida al azar, de tal manera que quien realiza el estudio no puede influir en la elección de los individuos y cada elemento de la población puede tener la misma posibilidad de ser seleccionado.

Muestreo aleatorio simple

Es un método donde la selección se hace de tal manera que cada muestra posible, del mismo tamaño, tiene igual probabilidad de ser escogida de la población. Se utiliza cuando los datos son casi homogéneos.

Muestreo sistemático

Es una variante del muestreo aleatorio simple de selección de cada elemento de la muestra. Se aplica cuando la población está listada en algún orden, es decir, está organizada por código, fecha, hora, orden de llegada u otro aspecto. Puede dar la misma precisión de estimación acerca de la población que una muestra aleatoria simple cuando los elementos en la población están ordenados al azar.

Muestreo estratificado aleatorio

Se realiza teniendo en cuenta los diferentes subgrupos que se pueden formar en una población, estos subgrupos también se conocen con el nombre de estratos. Para aplicarlo se divide la población en estratos que se suponen homogéneos respecto a la variable que se va a estudiar; luego, se selecciona una muestra aleatoria simple de cada estrato y con estos individuos se forma la muestra final.

Muestreo por conglomerados

Es un método de muestreo en el cual la población está dividida en grupos o conglomerados debido a su organización administrativa de otro tipo. En el interior de los conglomerados no se puede garantizar homogeneidad. Cada conglomerado es una unidad donde la muestra se selecciona como en el muestreo aleatorio simple y se aplica la encuesta a todos los elementos del conglomerado.

EJEMPLO

Determinar, en la siguiente situación, el muestreo más apropiado:

Con el ánimo de contribuir al mejoramiento de la malla vial, la alcaldesa de una ciudad desea saber si los habitantes están de acuerdo con que se aplique un aumento al impuesto de vivienda.

Teniendo en cuenta el contexto se deben analizar situaciones específicas de la población para determinar de qué forma se hace el muestreo.

Este caso se refiere a una ciudad, por tanto, se debe tener en cuenta que las ciudades están organizadas por estratos según las capacidades económicas de sus habitantes.

Así, preguntar por el aumento o la creación de un determinado impuesto tendrá diferentes respuestas según el estrato al que pertenezca un ciudadano.

Por tal razón es necesario tomar una muestra en cada estrato, es decir, el muestreo debe ser estratificado.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto · Propongo · R Razono · S Soluciono problemas

I **Determina, en cada caso, la población, sus características, y la muestra. Explica si esta es o no significativa y el tipo de muestreo.**

1. La asociación de padres de familia de un colegio ha planeado entregar un obsequio a cada estudiante en el día de Halloween.

   Con el fin de que todos los estudiantes queden muy satisfechos, ha decidido realizar una encuesta de gustos y preferencias. Ha seleccionado 20 estudiantes de preescolar, 20 estudiantes de primaria y 20 estudiantes de bachillerato y les ha aplicado una encuesta en la cual responderán sobre sus preferencias en dulces y en juguetes.

2. Un fabricante planea lanzar al mercado un nuevo estilo de camiseta deportiva usando telas inteligentes. Para asegurar que su producto tenga gran acogida, preguntó a 10 personas que practican deporte en la ciclo vía su opinión sobre dicha prenda.
3. Una empresa desea ingresar al mundo de las bebidas gaseosas. La gerente de mercadeo sabe que este campo es muy competido, por lo cual propone que los productos sean novedosos en sabor y presentación. Teniendo en cuenta estos aspectos, los ingenieros de alimentos planean dar degustaciones del producto en 30 almacenes de cadena de la ciudad.
4. Un grupo de nutricionistas del Bienestar Familiar está realizando una investigación sobre la satisfacción que manifiestan las madres comunitarias en relación con los mercados que les son asignados mes a mes a los hogares y jardines infantiles que son patrocinados por esta entidad en Colombia.

   Para ello, el grupo ha enviado una encuesta a cinco jardines, en cada una de las ciudades donde funciona este servicio.

R **Lee y responde.**

La liga contra el cáncer de una ciudad ha decidido emprender una campaña para disminuir el consumo de cigarrillo entre los estudiantes universitarios. Para ello, ha aplicado una encuesta en varias universidades de la ciudad.

A continuación se presentan los resultados:

	Estudiantes de sociología	
	Género	
Fuma	Hombre	Mujer
Sí	56	49
No	32	46

	Estudiantes de ingeniería	
	Género	
Fuma	Hombre	Mujer
Sí	68	59
No	30	21

	Estudiantes de medicina	
	Género	
Fuma	Hombre	Mujer
Sí	12	10
No	56	55

	Estudiantes de economía	
	Género	
Fuma	Hombre	Mujer
Sí	44	54
No	12	23

R **Responde**

5. ¿Qué variable(s) se plantean en el estudio?
6. ¿De qué tipo es (son)?
7. ¿Cuál fue la población?
8. ¿Cuál fue la muestra? ¿Es representativa? Justifica tu respuesta.
9. ¿Cuántas personas formaron la muestra?
10. ¿Qué tipo de muestreo se utilizó en el estudio?
11. ¿Cuántos hombres fueron encuestados?

S **Lee y responde.**

La siguiente tabla corresponde a los resultados obtenidos por 20 de las 1.000 personas que presentaron el examen de certificación de Microsoft. La muestra es aleatoria y ha sido seleccionada de manera sistemática. Los porcentajes se redondearon al entero más cercano.

12%	30%	87%	21%	60%
20%	46%	58%	72%	35%
52%	81%	68%	18%	9%
59%	63%	34%	92%	55%

12. ¿A qué tipo de variable corresponde el estudio?

13. ¿Cuál es la población? ¿Cuál es la muestra?

14. ¿Esta muestra es representativa? Justifica tu respuesta.

15. De acuerdo con los resultados, ¿es posible deducir cuál fue el rendimiento de la población? Explica tu respuesta.

16. Si tú fueras el encargado de realizar el estudio, ¿qué variaciones harías para que los resultados pudieran reflejar el comportamiento de la población?

S **Lee y resuelve.**

Para determinar aspectos relacionados con la nutrición y el crecimiento de los niños, un grupo de investigadores decidió medir la estatura de 20 niños en edad preescolar. Los resultados, medidos en centímetros, fueron los siguientes:

98	97	95	97	99
93	90	88	75	99
91	87	84	79	89
86	88	89	78	99

17. ¿Cuál es la población asociada al estudio?

18. ¿Cuál es la muestra?

19. ¿Qué tipo de muestreo se realizó?

20. ¿Cuál es la variable asociada a la muestra?

21. ¿Qué tipo de variable es?

22. Organiza los datos de mayor a menor estatura.

23. Realiza una representación gráfica, sobre una recta numérica, del conjunto de datos.

24. Escribe algunas conclusiones de la muestra planteada.

R **Define el tipo de variable y algunas opciones de respuestas en cada caso:**

25. Una empresa fabricante de partes eléctricas decide hacer un estudio del nivel de satisfacción de sus clientes en relación con el tiempo de duración de dichas partes.

26. La empresa de energía de la ciudad propuso la realización de un estudio para medir el promedio de kW-hora de sus usuarios de estrato tres.

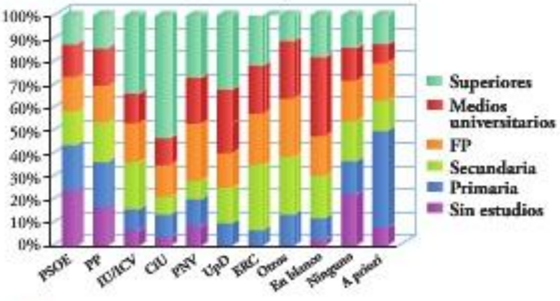
27. Una fábrica de gaseosas quiere saber cuál es la presentación de sus productos que sus clientes prefieren.

A continuación, se presentan diferentes representaciones gráficas que describen variables. Determina qué variable está en estudio y escribe dos conclusiones respecto a ellas:

28.

Inscripciones para cursos libres

29. Distribución (%) del voto por nivel de estudios



30. Evolución comparada de los índices de precios de los alquileres del INE y de Fotocasa

Enlace web

Recurso imprimible

2. Caracterización de variables cualitativas

Cuando en una población se hace un estudio para medir gustos o preferencias, se dice que se está analizando una variable cualitativa en dicha población.

Por ejemplo, el color de ojos, las preferencias deportivas, los sitios de interés para ir de vacaciones, entre otras, se pueden considerar variables cualitativas.

Caracterizar una variable consiste en describir su comportamiento en una población según unos parámetros definidos.

Para caracterizar una variable cualitativa se utilizan: la distribución de frecuencias, los diagramas y la moda.

2.1 Distribución de frecuencias

Actividad

Una distribución de frecuencias es un resumen del conjunto de datos que muestra el número (frecuencia) de artículos de cada una de las clases de la variable estudiada.

En una distribución de frecuencias se identifican las siguientes columnas:

Clases: corresponden a opiniones, gustos, preferencias u otras características de la variable estudiada.

Frecuencia: es el número de datos de cada clase. Se representa con la letra f.

Frecuencia relativa: es el cociente entre la frecuencia y el número total de datos, se simboliza fr. La frecuencia relativa se puede expresar como un porcentaje que se halla multiplicando por 100 el anterior cociente.

EJEMPLO

Una agencia de viajes especialista en excursiones escolares desea proponer un nuevo plan turístico de viajes por Colombia. Para ello, preguntó a 50 estudiantes entre grados sexto y octavo cuáles serían los destinos que les interesaría conocer de nuestro país. Los resultados se muestran a cotinuación, donde T: Tolú, P: Pijiba, K: Kajuyaly, A: Amacayacu.

T	P	P	A	T	A	A
P	T	A	A	T	A	K
A	K	A	A	P	A	K
T	K	K	A	T	P	A
K	T	K	K	K	A	P
A	T	A	A	A	A	A
T	A	A	A	T	T	T
A	K	K	A	A	A	A

Construir la distribución de frecuencias.

Al realizar el conteo, la distribución de frecuencias es la siguiente:

Destino	f	fr	%
Pijiba	6	6/56	10,7
Amacayacu	27	27/56	48,2
Kajuyaly	11	11/56	19,6
Tolú	12	12/56	21,4

A partir de la distribución se puede concluir que: el 10,7% de las personas prefiere a Pijiba como destino para excursión y este a su vez es el lugar de menor preferencia; el 48,2% prefiere Amacayacu como destino para excursión y este a su vez es el lugar de mayor preferencia.

2.2 Gráficas

Ampliación multimedia

Un **gráfico estadístico** es un resumen visual de la distribución de frecuencias. Para las variables cualitativas se plantean tres tipos de gráficas: los diagramas de barras, los diagramas circulares y los pictogramas.

Diagrama de barras

Ampliación multimedia

Recurso imprimible

Un **diagrama o gráfico** de barras es una representación de los datos estadísticos asociados a una variable.

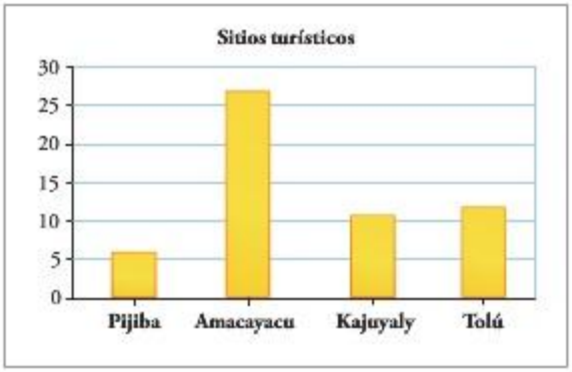
Para construir un diagrama de barras:

Primero, se dibujan dos ejes coordenados.

Luego, en el eje horizontal se escriben las clases de la variable.

Por último, en el eje vertical se utiliza una escala conveniente, la cual se usará para ubicar las frecuencias de cada clase.

Sobre cada clase se dibuja una barra que tendrá la altura de la respectiva frecuencia. A continuación, se presenta el diagrama correspondiente al ejemplo anterior:



Es importante anotar que la gráfica da una idea clara de las preferencias de la muestra o la población estudiada; en este caso resulta muy sencillo observar que la preferencia de la población es por Amacayacu.

Otras conclusiones que se pueden extraer de la gráfica son: sitios como Kajuyali y Tolú tienen frecuencias similares. Por tanto, se puede afirmar que la población los prefiere aproximadamente en el mismo porcentaje.

Diagrama circular

Actividad

Un **diagrama circular** es la representación de datos en un círculo. Se usa para representar los porcentajes correspondientes a cada clase.

En el diagrama circular, la información correspondiente a cada clase de la variable queda representada por un sector circular.

El sector circular es proporcional a un ángulo dentro del círculo.

Para construir un diagrama circular se usan las fracciones como operador.

Para hallar los ángulos correspondientes se parte de la relación en la cual el total de la población representa 360° del círculo.

Matemática*mente*

Elabora el gráfico de barras horizontales para la distribución del ejemplo. Recuerda que para ello las clases irán ubicadas en el eje vertical y las frecuencias, en el eje horizontal.

Recuerda que...

El **diagrama circular** también recibe el nombre de diagrama de pastel o torta.

Para construir el diagrama circular relacionado con el ejemplo de las preferencias para excursión, se realizan los siguientes pasos.

Historia de las matemáticas

Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1786-1874)

Matemático y astrónomo belga. Fue el primero en aplicar la estadística al comportamiento de los seres humanos.

Primero, se calcula el ángulo correspondiente a cada clase, es decir, a cada porcentaje.

Para Pijiba:

$$\frac{6}{56} \times 360^\circ$$

Así $\dfrac{6 \times 360^\circ}{56} = 38,6^\circ$

Es decir, la clase correspondiente a Pijiba ocupará en el diagrama circular un sector de 38,5°.

Para Amacayacu:

$$\frac{27}{56} \times 360^\circ$$

Así $\dfrac{27 \times 360}{56} = 173,6^\circ$

Es decir, la clase correspondiente a Amacayacu ocupará en el diagrama circular un sector de 173,5°.

Para Kajuyaly:

$$\frac{11}{56} \times 360^\circ$$

Así $\dfrac{11 \times 360}{56} = 70,7^\circ$

Es decir, la clase correspondiente a Kajuyaly ocupará en el diagrama circular un sector de 70,7°.

Para Tolú:

$$\frac{12}{56} \times 360^\circ$$

Así $\dfrac{12 \times 360}{56} = 77,1^\circ$

Es decir, la clase correspondiente a Tolú ocupará en el diagrama circular un sector de 77,1°.

En este caso, se usaron las frecuencias para encontrar los valores de los ángulos en el círculo, pero este procedimiento también se puede hacer con los porcentajes de cada clase, en cuyo caso se calculan los respectivos porcentajes de 360°.

Para el caso de Pijiba:

$$\frac{10,7}{100} \times 360^\circ \longrightarrow \frac{10,7 \times 360}{100} = 38,6^\circ$$

Después, se dibuja una circunferencia y se ubica su centro. A partir de allí, se traza un radio. Luego con este radio como lado inicial, se construye el primer ángulo. Este ángulo, dentro del círculo, será el sector circular correspondiente a la primera clase del estudio.

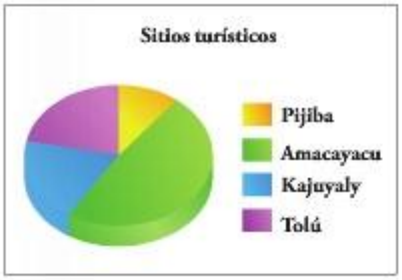
Luego, tomando como lado inicial el final del sector anterior, se construye el ángulo siguiente que corresponderá a la segunda clase; este procedimiento se repite con todas las clases de la variable.

Por último, se colorea el diagrama y se proponen convenciones que permitan diferenciar las clases.

A continuación, se presenta el diagrama circular correspondiente:

Al igual que en el diagrama de barras, la información y las preferencias de la muestra se presentan en forma muy clara dentro del diagrama circular.

Es posible hacer otras versiones del diagrama circular y presentarlo con volumen. Esta versión es la más usada en periódicos y revistas por claridad y estética para presentar informes. Para nuestro caso, dicha versión sería la siguiente:

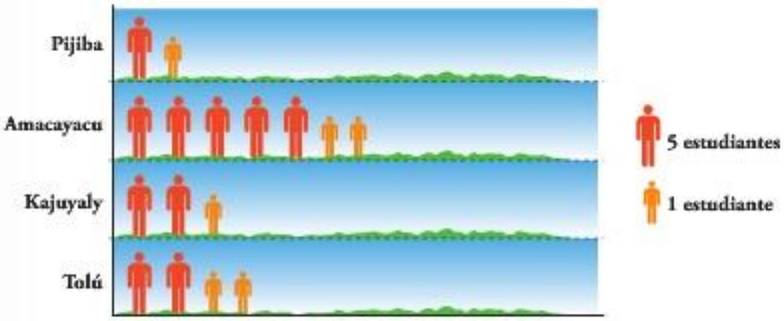


Pictograma

El **pictograma** es un gráfico vistoso, similar a un gráfico de barras; emplea un dibujo alusivo al tema que representa, en una determinada escala, para expresar la unidad de medida de los datos correspondientes a cada clase.

Para la construcción de pictogramas se tiene en cuenta que su formato es libre, se emplea una secuencia de símbolos para representar frecuencias y se utilizan para el tratamiento de datos tanto cualitativos como cuantitativos.

Regularmente se utilizan dibujos para representar dicha información, y el tamaño o el número de estos dibujos dentro de una gráfica queda determinado por la frecuencia correspondiente. A continuación, se presenta un pictograma para el ejemplo de los destinos turísticos preferidos por los estudiantes.



Recuerda que...

Actualmente, y con mayor frecuencia en los medios masivos de comunicación, se utilizan los pictogramas para ilustrar los datos o los resultados de una investigación.

EJEMPLO

Una empresa ensambladora de vehículos presentó información sobre la demanda anual de un tipo particular de vehículos en algunos países de Suramérica. A continuación se muestra dicha demanda.

País	Demanda
Colombia	20.000
Venezuela	40.000
Argentina	120.000
Chile	150.000
Brasil	160.000

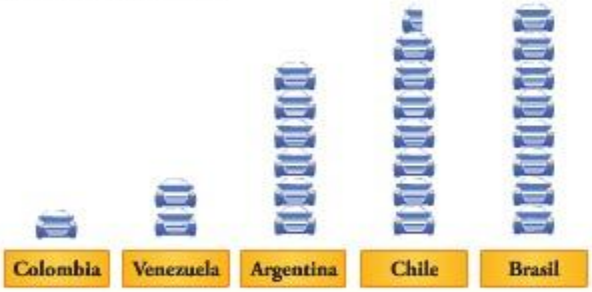
El símbolo que se emplea tendrá forma de vehículo, teniendo como referencia el tema del informe.

En este caso, cada símbolo tendrá una equivalencia de 20.000 unidades demandadas.

En un eje cartesiano, se escriben los países en el eje horizontal y las demandas en el vertical.

En el caso de Chile, la demanda equivale a 7 y $\frac{1}{2}$ vehículos (140.000 + 10.000 unidades).

El pictograma correspondiente es:



A partir del pictograma se puede identificar que Brasil es el país donde hay mayor demanda del vehículo mencionado y que Colombia es el país donde menos demanda tiene dicho vehículo.

2.3 Moda

La **moda** es una medida de tendencia central que describe el valor de la variable que tiene mayor frecuencia, es decir, la que más se repite.

Matemática*mente*

Consulta qué son las medidas de tendencia central.

Es la única medida de tendencia central que tiene sentido estudiar en una variable cualitativa, pues no precisa la realización de ningún cálculo. Por su propia definición, la moda no es única, pues puede haber dos o más valores de la variable que tengan la misma frecuencia siendo esta máxima. Entonces, se tendrá una distribución bimodal o polimodal según el caso.

Para el caso de los sitios de excursión, la clase con mayor frecuencia está ubicada en el Amacayacu. Por tanto, se puede afirmar que la moda es esta elección.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • R Razono • S Soluciono problemas

El restaurante Steakhouse, ubicado en una importante zona de negocios de una ciudad, aplica un cuestionario para conocer la opinión de sus clientes sobre el servicio, la calidad de los alimentos, las bebidas, los precios y el ambiente del restaurante.

Cada característica se valora en una escala, como se muestra a continuación:

Notable	O	Mediano	A
Muy bueno	V	Malo	P
Bueno	G		

A continuación, se presentan los datos correspondientes a la evaluación de la calidad de los alimentos en Steakhouse:

G	O	V	G	A	O	O
V	O	P	V	O	G	G
V	A	G	O	V	P	G
O	G	A	O	V	O	A
V	O	V	G	O	V	A
A	O	O	O	G	O	V
V	O	O	G	O	O	V
O	G	V	A	G	V	A

31. Elabora la distribución de frecuencias correspondiente.

32. Representa la información en un diagrama de barras.

33. Elabora un diagrama circular para el caso.

34. Responde. ¿Cuál de las dos representaciones resulta más adecuada en este caso?

35. Escribe cuatro conclusiones a partir de la distribución de frecuencias y los diagramas.

36. Si fueras el administrador de Steakhouse, ¿qué conclusiones sacarías con relación a la opinión de los clientes sobre los alimentos?

R **A continuación, se presentan los datos de una muestra de 56 miembros de la Liga nacional de béisbol para cada posición en el diamante. Cada dato indica la posición principal del jugador, así:**

Lanzador	P	Jardinero derecho	R
Primera base	1	Receptor	H
Tercera base	3	Segunda base	2
Jardinero izquierdo	L	Parador corto	S
Jardinero central	C		

L	P	C	H	2	P	R
P	P	P	R	C	S	L
2	3	P	H	L	P	1
R	1	2	H	S	3	H
1	S	S	1	P	1	P
R	P	C	C	S	R	P
C	P	P	P	P	R	R
2	L	P	L	P	L	L

37. Construye una tabla de distribución de frecuencias.

38. ¿Cuál es la posición que tiene más miembros en la liga?

39. ¿Cuál es la posición que tiene menos miembros?

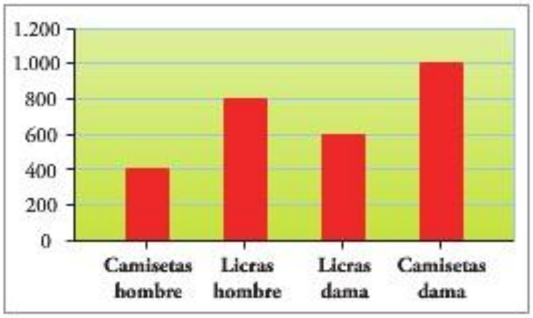
Durante el mes de diciembre, una fábrica de productos lácteos modifica los horarios de ingreso de los trabajadores del turno de la mañana teniendo en cuenta las solicitudes de sus proveedores.

El siguiente diagrama representa la hora de entrada de dichos empleados durante el mes de diciembre.

40. A partir del diagrama, elabora la distribución de frecuencias correspondiente al estudio.

41. Explica por qué este estudio describe una variable cualitativa.

S El siguiente diagrama de barras muestra la producción mensual de prendas de vestir de una empresa de confecciones. El gráfico corresponde al mes de mayo.



42. ¿Cuántas prendas se confeccionaron en mayo?

43. Reconstruye la distribución de frecuencias correspondiente al estudio.

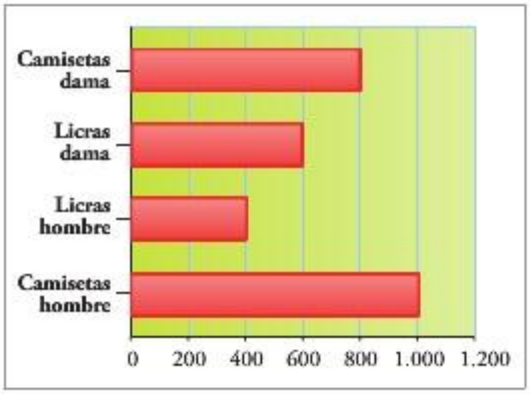
44. ¿Qué porcentaje del total de prendas representan las licras para hombre?

45. ¿Qué se produjo en mayor cantidad: licras o camisetas?

46. ¿Es correcto afirmar que está de moda producir licras? Justifica tu respuesta.

47. Si el precio de venta de cada licra es $35.000 y el de cada camiseta es $30.000, ¿cuánto dinero tiene la fábrica en la producción del mes mayo?

S A continuación se presenta el diagrama relacionado con la producción de la misma fábrica en el mes de junio:



48. ¿Qué porcentaje del total representa cada una de las prendas producidas?

49. ¿Qué cambios hubo en la producción en relación con el mes de mayo?

50. En relación con el monto de dinero, ¿se generó mayor producción en mayo o en junio?

51. Si la producción de los dos meses será enviada a un país del exterior, ¿qué se puede afirmar con relación a la moda de estas dos distribuciones?

52. Elabora el diagrama circular que resume la producción de los dos meses.

53. Escribe dos conclusiones en relación con este último diagrama.

54. La directora de producción de la fábrica debe presentar un informe donde reporta la producción de mayo y junio. Elabora el pictograma correspondiente y escribe, a partir de dicho pictograma, el informe que se debe presentar.

S Para la evaluación de un curso de cocina internacional, se pidió a los participantes que valoraran diferentes aspectos que se ingresaron en una base de datos. El conteo de dichos aspectos se hizo teniendo en cuenta la siguiente escala numérica:

1 = Malo
2 = Regular
3 = Bueno
4 = Muy bueno
5 = Excelente

Los datos obtenidos se presentan a continuación:

3	4	4	5	1	5	3	4
4	5	5	4	1	4	5	4
5	5	3	4	5	4	2	4
4	3	5	4	5	4	3	5
4	4	4	5	3	5	2	1
4	4	4	2	4	2	5	1
5	5	5	4	3	3	4	4
3	3	4	3	5	3	4	5

55. Explica por qué este conjunto de datos representa una variable cualitativa.

56. Elabora la distribución de frecuencias correspondiente a la opinión sobre el curso de cocina.

57. Elabora el diagrama de barras correspondiente a la distribución.

58. Elabora el diagrama circular que representa el conjunto de datos.

59. Escribe algunas conclusiones teniendo como información la distribución de frecuencias y los dos diagramas elaborados.

3. Caracterización de dos variables cualitativas

Actividad

Ampliación multimedia

Para caracterizar dos variables cualitativas de manera simultánea se utilizan las tablas de contingencia, las tablas marginales y los diagramas de barras.

Es importante tener en cuenta que para analizar dos variables, estas deben tener una relación en un contexto determinado pues, de no existir dicha relación, no tendría sentido presentarlas simultáneamente.

3.1 Tablas de contingencia

Actividad

Una **tabla de contingencia** es un resumen de los datos en el cual, las filas corresponden a una variable cualitativa y las columnas corresponden a otra, además, estas dos variables están relacionadas en la muestra.

La tabla de contingencia también recibe el nombre de tabla cruzada y puede considerarse como una tabla de frecuencias; la información en cada casilla corresponde a la cantidad de individuos de la muestra que posee las dos características.

EJEMPLO

Después de analizar los resultados en el último bimestre, la coordinación académica de un colegio está interesada en conocer si sus alumnos estudian para las evaluaciones bimestrales.

Para ello, entrevistó a un grupo de 60 estudiantes de secundaria y les preguntó si estudian para sus evaluaciones. Las respuestas de los estudiantes fueron planteadas teniendo en cuenta las siguientes clases:

S: siempre estudia   AV: algunas veces estudia   N: nunca estudia

Además, dichas respuestas se clasificaron teniendo en cuenta el género de los estudiantes:

H: hombre   M: mujer

Los resultados se presentan a continuación, donde G: Género y E: Estudia.

G	E
H	S
M	AV
M	S
H	S
H	AV
H	N
M	AV
M	AV
H	S
M	S

G	E
M	AV
M	S
H	N
M	AV
M	AV
M	AV
M	S
M	S
H	S
M	AV

G	E
H	AV
H	AV
H	AV
M	AV
M	AV
M	S
M	AV
M	S
H	AV
M	AV

G	E
H	N
H	S
M	AV
M	S
M	S
H	AV
M	S
H	AV
M	AV
M	S

G	E
H	AV
H	N
H	N
H	AV
H	S
M	AV
M	AV
M	AV
M	AV
M	S

G	E
M	N
H	AV
M	N
M	S
M	S
H	N
M	AV
H	AV
M	AV
H	N

Matemática*mente*

Construye una tabla de contingencia del ejemplo planteado tomando en las filas la variable *Frecuencia de estudio para las evaluaciones* y en las columnas la variable *Género*.

Los resultados anteriores se pueden organizar en una tabla de contingencia en la cual una de las variables es *género*. Esta puede estar ubicada en las filas y las diferentes respuestas a la pregunta *¿ con qué frecuencia estudia para las evaluaciones?* se pueden ubicar en las columnas. Por tanto, es posible ubicar las variables en orden diferente y el resultado en la tabla será el mismo.

Luego, la tabla de contingencia será la siguiente:

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones			
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**	**Total**
Hombre	6	11	7	24
Mujer	14	20	2	36
Total	20	31	9	60

Como última columna se incluye el total y, de la misma manera, como última fila se incluye el total.

El número total de alumnos que participaron en el estudio debe ser igual tanto en la suma correspondiente a la variable género, como en la suma correspondiente a la variable *frecuencia de estudio para las evaluaciones.*

Por tanto, la casilla en la cual se cruzan los dos totales debe contener el número de alumnos de la muestra, que para este caso es 60.

Cada casilla de la tabla cruzada incluye la interpretación de las dos variables, así:

- 6 hombres siempre estudian para las evaluaciones.
- 14 mujeres siempre estudian para las evaluaciones.
- 11 hombres a veces estudian para las evaluaciones.
- 20 mujeres a veces estudian para las evaluaciones.
- 7 hombres nunca estudian para las evaluaciones.
- 2 mujeres nunca estudian para las evaluaciones.

El total ubicado en la parte final de las columnas de la tabla corresponde, en cada caso, a la cantidad de estudiantes que siempre estudia para las evaluaciones, a la cantidad de estudiantes que algunas veces estudia para las evaluaciones y a la cantidad de estudiantes que nunca estudia para las evaluaciones; es decir, los totales de las clases de la variable *frecuencia de estudio para las evaluaciones.*

Así, se puede afirmar que:

- 20 de los alumnos siempre estudian para las evaluaciones.
- 31 de los alumnos algunas veces estudian para las evaluaciones.
- 9 de los alumnos nunca estudian para las evaluaciones.

El total ubicado en la parte final de las filas corresponde, en cada caso, a la cantidad de hombres que respondieron a la pregunta y a la cantidad de mujeres que respondieron a la pregunta; es decir, los totales de la variable *género*.

Así, se puede afirmar que:

- La pregunta la respondieron 24 hombres.
- La pregunta la respondieron 36 mujeres.

Es posible observar que los totales tanto de filas como de columnas son los mismos, por tanto, cabe afirmar que, al hacer el conteo en cualquier base de datos, es muy importante tener cuidado y verificar que las cantidades correspondan efectivamente a las variables.

3.2 Tabla de contingencia de frecuencias relativas

A partir de la información de una tabla de contingencia se puede construir una tabla de contingencia de frecuencias relativas. Para tal caso, en cada casilla de la tabla cruzada se escribirán los cocientes correspondientes a la frecuencia de cada clase y el total de la muestra.

Para el ejemplo que se está analizando, dicha tabla sería:

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones			
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**	**Total**
Hombre	$\frac{6}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{24}{60}$
Mujer	$\frac{14}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{36}{60}$
Total	$\frac{20}{60}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{9}{60}$	1

En este caso, como las frecuencias son relativas, el total será 1.

En forma similar, las frecuencias relativas se pueden escribir como números decimales y, en consecuencia, como porcentajes. Para ello, se multiplica por 100 cada frecuencia relativa.

La tabla que se construye con estos valores es una tabla de contingencia de porcentajes. A continuación se presenta dicha tabla para el ejemplo que se está analizando:

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones			
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**	**Total**
Hombre	10,00	18,33	11,67	40
Mujer	23,33	33,33	3,33	60
Total	33,33	51,67	15,00	100

Matemática*mente*

Busca en Internet los resultados de una encuesta.

Lee las conclusiones e identifica cómo se usan los porcentajes en la presentación de estas conclusiones.

Una buena caracterización de las variables incluiría, entre otras cosas, el análisis de los porcentajes más altos y más bajos del estudio. Por ejemplo:

- El 33,33% de los encuestados estudia algunas veces para las evaluaciones y son mujeres.
- El 3,33% de los encuestados nunca estudia para las evaluaciones y son mujeres.
- El 51,67% de todos los encuestados a veces estudia para las evaluaciones.

Es importante enfatizar que, cuando se habla de un estudio estadístico, los resultados dados en porcentajes son muy útiles; un lenguaje numérico presentado con porcentajes le permite al investigador o a quien analiza el estudio plantear conclusiones claras y en términos que la mayor parte de las personas entiende.

Así, también se puede decir que:

- Los hombres que a veces estudian para las evaluaciones constituyen el 18,33%.
- El 23,33% son mujeres que siempre estudian para las evaluaciones.
- El 10% son hombres que siempre estudian para las evaluaciones.
- El 11,67% son hombres que nunca estudian para las evaluaciones.

3.3 Tablas marginales

Una **tabla marginal** es una tabla cruzada, en la cual se muestran las frecuencias relativas con relación a cada fila o a cada columna.

Es importante anotar que para cada tabla cruzada se generan dos tablas marginales. Por ejemplo, para el caso que se viene analizando se pueden presentar las siguientes tablas marginales. La tabla marginal teniendo en cuenta el total en la variable *frecuencia de estudio para las evaluaciones* ubicada en las columnas es:

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones		
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
Hombre	$\frac{6}{20}$	$\frac{11}{31}$	$\frac{7}{9}$
Mujer	$\frac{14}{20}$	$\frac{20}{31}$	$\frac{2}{9}$

Tabla marginal teniendo en cuenta el total en la variable *Género*, ubicada en las filas.

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones		
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
Hombre	$\frac{6}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{7}{24}$
Mujer	$\frac{14}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{2}{36}$

Estas tablas se pueden escribir en forma de porcentajes, así:

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones		
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
Hombre	30%	35%	78%
Mujer	70%	65%	22%

	Frecuencia de estudio para las evaluaciones		
Género	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**
Hombre	25%	45,8%	29,2%
Mujer	38,9%	55,6%	5,6%

A partir de las tablas marginales se puede concluir, entre otras cosas, que:

- El 30% de las personas que siempre estudian para los exámenes son hombres y el 70% son mujeres.
- El 35% de las personas que a veces estudian para los exámenes son hombres y el 65% de las personas que a veces estudian para los exámenes son mujeres.
- El 78% de las personas que nunca estudian para los exámenes son hombres y el 22% de las personas que nunca estudian para los exámenes son mujeres.

Matemática*mente*

- ¿Tiene sentido escribir la columna *Total* en una tabla marginal? Explica tu respuesta.
- Escribe algunas otras conclusiones que se puedan extraer de las tablas marginales planteadas para el ejemplo.

3.4 Diagramas de barras para dos variables cualitativas

La representación gráfica de una tabla de contingencia corresponde a un diagrama de barras en el cual se presentan en el eje horizontal las dos variables con sus respectivas clases y en el eje vertical las frecuencias.

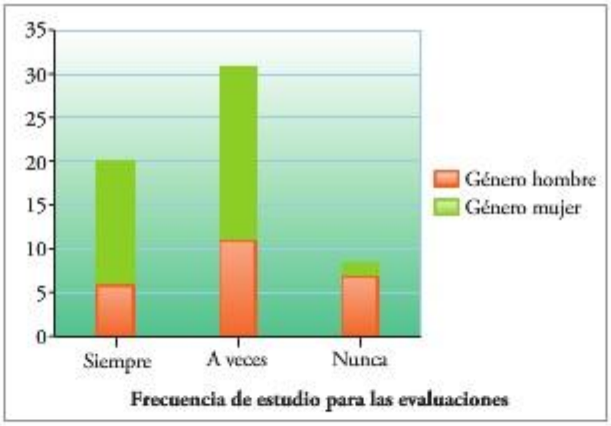
Recuerda que…

Es posible hacer diagramas de barras para tablas marginales. Solo es importante tener en cuenta que estos representarán el total en cada una de las variables.

A continuación se presentan las gráficas de barras para las variables *Frecuencia de estudio para las evaluaciones* y *género*:

Cabe anotar que las clases: Siempre, A veces y Nunca, se ubican en el eje horizontal y los colores de las barras determinan en cada caso la variable género.

Es posible plantear una sola columna para la variable género, diferenciando por color las respectivas frecuencias, así:



Esta gráfica tiene la ventaja de que la barra completa indica el total de individuos que están clasificados en cada una de las clases de la variables *Frecuencia de estudio para las evaluaciones*.

Se puede ver fácilmente en la gráfica que 20 estudiantes siempre estudian para las evaluaciones; 31 estudiantes estudian algunas veces para las evaluaciones y 9 estudiantes nunca estudian para las evaluaciones.

Los diagramas de barras se convierten en una excelente estrategia para la interpretación de datos; de hecho, en la mayoría de periódicos y revistas los resultados de muchas encuestas son presentados en forma de diagrama y no en forma de distribución de frecuencias.

Matemática*mente*

¿Cómo podrías comparar la cantidad de tiempo de estudio de mujeres con relación a la de los hombres?

Afianzo COMPETENCIAS

R Razono · **S** Soluciono problemas

R **El departamento de bienestar estudiantil de una universidad realizó un estudio sobre el tipo de comida que consumen los estudiantes de varias de las carreras a la hora del almuerzo**

Además, como era de su interés hacer propuestas para la alimentación en el restaurante, clasificó la información teniendo en cuenta el género de las personas que participaron del estudio.

A continuación se presentan los resultados:

R: comida rápida	A: almuerzo corriente
L: almuerzo balanceado	V: almuerzo vegetariano
O: otros tipos de almuerzo	
M: Hombre	F: Mujer

Tipo	Género
R	M
V	M
L	M
L	F
R	F
R	F
V	M
V	F
O	M
O	F
R	F
R	F
L	F
L	M
L	F
L	M
R	F
L	M
V	M
A	F
A	F
A	F
L	F
L	F
R	F

Tipo	Género
A	M
R	F
L	M
R	M
A	F
R	M
O	M
O	M
V	F
V	F
V	F
L	M
L	F
R	M
R	F
R	M
R	F
V	M
V	F
L	M
L	F
O	M
L	F
L	F
R	F

60. Construye la tabla de frecuencias para la variable género.

61. Construye la tabla de frecuencias para la variable tipo de comida.

62. En el departamento de bienestar universitario proponen que si más del 40% de los estudiantes gustan de un menú vegetariano, se abrirá un restaurante especializado en este tipo de comida. ¿Se emprenderá este nuevo proyecto? Justifica tu respuesta.

63. Elabora la tabla de contingencia que relaciona las dos variables.

64. Escribe tres conclusiones a partir de la tabla de contingencia del punto anterior.

65. Construye la tabla marginal asociada a la variable tipo de comida.

66. Escribe cuatro conclusiones a partir de la tabla anterior.

67. Elabora la tabla marginal asociada a la variable género.

68. Escribe tres conclusiones a partir de dicha tabla.

69. En esta situación y para la variable tipo de comida, ¿cuál sería la moda? Justifica tu respuesta.

70. En esta situación específica, ¿es útil analizar la moda en la variable género? Explica tu respuesta.

71. Elabora la gráfica de barras correspondiente a la tabla de contingencia del numeral 63.

72. ¿Se presenta mayor claridad al interpretar la tabla o la gráfica? Escribe tu opinión al respecto.

73. Elabora la gráfica correspondiente a cada tabla marginal y escribe algunas conclusiones a partir de ellas.

74. ¿Es posible representar esta información en un diagrama circular? Explica tu respuesta.

Una caja de compensación familiar va a inaugurar un nuevo centro de recreación para sus usuarios. Antes de la inauguración decidió enviar, por Internet, una encuesta a una muestra de sus afiliados.

La encuesta preguntaba a cada persona si utilizaría o no un pase de cortesía y qué servicios del nuevo club usaría. Los resultados se muestran a continuación:

Servicio	Uso
Natación	Sí
Gym	Sí
Gym	Sí
Gym	Sí
Natación	Sí
Tenis	No
Tenis	No
Natación	No
Natación	No

Servicio	Uso
Bolos	No
Tenis	Sí
Tenis	No
Gym	Sí
Natación	No
Tenis	Sí
Natación	No
Gym	No
Natación	Sí

Servicio	Uso
Tenis	Sí
Gym	Sí
Tenis	No
Gym	No
Natación	No
Natación	Sí
Natación	Sí
Gym	Sí
Natación	No

75. Elabora la tabla de contingencia relacionada con la situación de la caja de compensación familiar.

76. Escribe tres conclusiones relacionadas con la tabla del numeral anterior.

77. Elabora la tabla de contingencia de porcentajes.

78. ¿Cuál es el servicio que definitivamente los afiliados usarían? ¿En qué porcentaje lo usarían?

79. ¿Cuál es el servicio que definitivamente los afiliados no usarían? ¿En qué porcentaje no lo usarían?

80. Elabora la tabla marginal asociada a la variable servicio y escribe una afirmación que explique qué representa cada casilla.

81. Elabora la tabla marginal relacionada con la variable *Uso* y escribe una afirmación que explique qué representa cada casilla.

La empresa de energía eléctrica realizó una encuesta telefónica a 36 nuevos usuarios con respecto a su preferencia en la forma de pago del servicio. Cada respuesta se reportó de la siguiente forma:

C: pago en la central de servicio
B: pago en sucursal bancaria
I: pago por Internet

Adicionalmente, cada usuario informó sobre su pago en dos momentos del mes:

P: en los primeros quince días
S: en los otros quince días

Los resultados se presentan a continuación:

Forma	Momento
B	P
I	S
I	S
I	P
B	P
B	P
C	S
C	S
C	S
I	S
B	S
B	S
C	S
B	P
C	P
B	P
I	S
C	S

Forma	Momento
C	S
C	S
C	S
B	P
C	P
B	P
I	S
I	P
C	S
I	S
C	S
B	S
I	P
C	S
B	P
I	S
B	P
B	S

82. Construye la tabla cruzada de frecuencias porcentuales.

83. La empresa de energía hará un descuento del 6% a todos los usuarios que paguen su factura en los 15 primeros días del mes. ¿A cuántos usuarios les hará el descuento?

84. Construye la tabla marginal asociada a la variable *Forma de pago*.

85. Escribe tres conclusiones a partir de la tabla del numeral anterior.

4. Experimentos aleatorios

Recuerda que…

La regularidad en un experimento aleatorio hace posible la construcción de un modelo matemático preciso a partir del cual se puede estudiar dicho experimento.

En estadística, podemos definir un experimento como un proceso que genera resultados bien definidos y que, en general, en cualquier repetición del experimento ocurrirá uno y sólo uno de los posibles resultados.

Por ejemplo:

- Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior.
- Lanzar una moneda cuatro veces y contar el número de caras obtenidas.
- Fabricar artículos electrónicos de una línea de producción y escoger cuáles de ellos son defectuosos.
- Se analiza el lanzamiento de un proyectil y, en los tiempos t_1, t_2, t_3, … t_n, se registra la altura del proyectil en relación con el suelo.
- De una urna que contiene cinco balotas negras y una blanca, se escoge una de ellas y se anota su color.
- Escoger una carta entre 52 cartas de una baraja.

La situaciones anteriores tienen en común características bien específicas por las cuales, además de ser experimentos, son aleatorias.

Actividad

Un **experimento aleatorio** es una acción en la cual se conoce el procedimiento que se va a seguir para desarrollarla, se conocen los posibles resultados, pero no se sabe con certeza cuál será el resultado final.

Los experimentos aleatorios tienen las siguientes características:

- Es posible repetir cada experimento en forma indefinida sin cambiar, esencialmente, las condiciones.
- Aunque, en general, no se puede indicar cuál será el resultado particular, se puede describir el conjunto de todos los posibles resultados.
- A medida que el experimento se repite un gran número de veces, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caótica, sin embargo, aparece un patrón definido o regularidad.

Un experimento en el que se conoce el resultado no es aleatorio.

Por ejemplo, solucionar una ecuación o sumar dos números no son experimentos aleatorios.

En la vida cotidiana es bastante común relacionarse con experimentos aleatorios, observa las siguientes situaciones:

Escoger una carta de una baraja de 52 cartas es un experimento aleatorio.

- Luis acostumbra comprar todos los sábados un billete de lotería; espera ganar pero no tiene certeza de hacerlo pues son muchos los billetes impresos y la elección del número ganador es aleatoria.
- Juliana se va a enfrentar a un examen que contiene preguntas de selección múltiple. Ella no estudió para este examen, así que hará la selección de las respuestas al azar.
- Lina va a comprar mil piezas electrónicas que necesita para incorporar a varios de los juegos electrónicos que está diseñando. Ella sabe que puede encontrar piezas defectuosas, pero no tiene la certeza de saber cuántas de ellas lo serán.
- Felipe va de compras, sabe que quiere un jean y una camiseta pero no tiene la seguridad de qué será lo que va a escoger.

4.1 Espacio muestral y eventos

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los posibles resultados que se pueden dar en el experimento aleatorio. Se simboliza con la letra S y es el conjunto universal del experimento.

El espacio muestral debe ser construido de tal forma que indique claramente todas las posibilidades de ocurrencia de un experimento aleatorio.

En ocasiones, a partir de una misma situación se pueden generar distintos experimentos aleatorios con sus espacios muestrales correspondientes. Por ejemplo, dos posibles experimentos aleatorios a partir de girar una ruleta, pueden ser:

- Hacer girar una ruleta y ver en qué número cae, en el cual el espacio muestral sería $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 36\}$.
- O también, hacer girar una ruleta y ver en qué color cae, en el cual el espacio muestral sería $S = \{\text{blanco, amarillo, negro}\}$.

EJEMPLOS

1. **Una persona desea hacer una rifa en la cual cada opción será de dos números. Determinar la cantidad de números que tiene la rifa.**

En este caso se presenta lo siguiente:

- En cada opción hay un número de dos dígitos.
- Estos dígitos pueden ser diferentes o iguales.

Así, para cada dígito hay 10 opciones de números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, como se muestra en el siguiente esquema:

Primer dígito: 0 1 2 3 ... 9
Segundo dígito: 0 1 2 3 ... 9

Luego, se puede saber que un posible resultado es 78 o 99.

Por tanto, hay 100 números que pueden ser el resultado del ganador de la rifa.

2. **Luisa tiene para escoger tres camisetas y dos pantalones para su traje del día de hoy. Determinar de cuántas maneras las puede escoger.**

Para saber de cuántas maneras diferentes puede Luisa combinar estas prendas para escoger lo que se pondrá, se escribe el siguiente conjunto:

$S = \{$(camiseta morada, pantalón azul), (camiseta morada, pantalón anaranjado),
(camiseta roja, pantalón azul), (camiseta roja, pantalón anaranjado),
(camiseta verde, pantalón azul), (camiseta verde, pantalón anaranjado)$\}$

Así, el espacio muestral del experimento aleatorio, que consiste en escoger una camiseta y un pantalón, tiene seis elementos y son los que se mencionaron antes.

Evento

Un **evento** es un conjunto que se define dentro de un espacio muestral, por lo tanto, está formado por los elementos del espacio, que tiene una característica definida. Los eventos se nombran con letras mayúsculas.

Para el ejemplo de Luisa y sus opciones para vestirse hoy, se puede definir el siguiente evento.

E_1: escoger un pantalón azul

En el espacio muestral, cada expresión dentro del paréntesis es un evento, formado por una camiseta y un pantalón; en particular el evento que consiste en escoger un pantalón azul es:

E_1 = {(camiseta morada, pantalón azul), (camiseta roja, pantalón azul), (camiseta verde, pantalón azul)}

En este caso el evento tiene tres elementos.

Dentro de este mismo espacio muestral se pueden definir otros eventos, por ejemplo:

- E_2: escoger una camiseta morada

  E_2 = {(camiseta morada, pantalón azul), (camiseta morada, pantalón anaranjado)}
- E_3: escoger un pantalón anaranjado

  E_3 = {(camiseta morada, pantalón anaranjado), (camiseta roja, pantalón anaranjado), (camiseta verde, pantalón anaranjado)}
- E_4: escoger una camiseta verde

  E_4 = {(camiseta verde, pantalón azul), (camiseta verde, pantalón anaranjado)}

Clases de eventos

Dado que los eventos son conjuntos, es posible clasificarlos así:

- **Evento vacío:** también es llamado evento imposible. Este evento se tiene cuando se espera un resultado que no puede suceder. Por ejemplo, no es posible que Luisa escoja una camiseta negra, pues el evento que consiste en tener una camiseta negra no existe en el espacio muestral.
- **Evento unitario:** también llamado evento simple; este evento se tiene cuando el conjunto en consideración tiene un solo elemento. Por ejemplo, el evento que consiste en usar una camiseta verde y un pantalón azul.
- **Evento universal:** también es llamado evento seguro; este evento ocurre cuando al conformar el conjunto, este resulta ser igual al espacio muestral.

Es importante tener en cuenta que las operaciones de unión, intersección y diferencia que se verifican entre los conjuntos también se verifican entre los eventos.

Además, al igual que en los conjuntos, los eventos pueden ser representados en un diagrama de Venn.

Matemática*mente*

Consulta en qué consisten las operaciones de unión intersección y diferencia.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • P Propongo • E Ejercito • R Razono

I Determina cuáles de los siguientes experimentos pueden considerarse aleatorios. Explica tu respuesta.

86. Lanzar dos dados.

87. Lanzar una moneda y un dado.

88. Encontrar el valor de una incógnita en una ecuación.

89. Cobrar un tiro penal en una final de fútbol.

90. Apostar a la lotería comprando varios billetes.

91. Obtener la corona en el Reinado Nacional de Belleza.

92. Encontrar el número siguiente en una serie de números pares.

93. Hallar el volumen de un poliedro.

94. Escoger un frasco de salsa inglesa entre los frascos puestos en una vitrina.

95. Escoger cinco estudiantes que representen al colegio en las olimpiadas de matemáticas, entre los 20 que están en 6A.

96. Tomar la ruta escolar para ir al colegio.

97. Escoger una bombilla en buen estado entre un grupo de 10 posibles.

E Escribe el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

98. David y Juliana juegan con un dado.

99. La familia Mendoza planea ir a almorzar a un restaurante. La carta se muestra a continuación:

Entradas
Palmitos
Yucas
Empanaditas

Platos fuertes
Carne a la plancha
Pollo bechamel
Cerdo dulce

El experimento consiste en escoger una entrada y un plato fuerte.

100. Sofía y Manuel lanzan en un juego dos monedas diferentes: una de \$200 y una de \$500.

101. David, Julián, Óscar y Beto van a participar en una carrera. El experimento consiste en saber quién llegará al final de la carrera de primero y quién llegará de segundo.

102. Se quiere formar un número de dos dígitos diferentes con los dígitos 3, 4 y 5.

103. Se quiere formar un número de dos dígitos con las cifras 5, 6 y 7.

104. En una bolsa oscura se tienen cuatro balotas; dos verdes, una roja y una blanca. El experimento consiste en sacar una balota de la bolsa.

105. Para la misma bolsa del numeral anterior el experimento consiste en sacar dos balotas de la bolsa, teniendo en cuenta que al sacar la primera balota esta no se devuelve a la bolsa.

106. Claudia juega a encestar un balón de baloncesto. El experimento consiste en realizar 10 lanzamientos y observar cuántos acierta.

107. Juan compra una boleta para la rifa de un iPod. Cada boleta tiene un número de dos dígitos. El experimento consiste en escoger una boleta.

108. Adriana tiene las siguientes cuatro cartas de un juego de póquer.

El experimento consiste en seleccionar dos de las cuatro cartas.

109. Manuel y sus amigos van a una heladería y deciden comer helado con dos sabores. Tienen a su disposición los sabores de:

Fresa	Mandarina	Feijoa
Chicle	Pistacho	*Brownie*

El experimento consiste en escoger los dos sabores de helado.

E **Observa con atención los elementos de cada espacio muestral y, luego, escribe los elementos de los eventos pedidos.**

Se lanzan dos monedas al aire. El espacio muestral es:

S = {(cara, cara), (cara, sello), (sello, cara), (sello, sello)}

110. E_1: obtener al menos una vez cara.

111. E_2: obtener al menos una vez sello.

112. E_3: obtener únicamente cara.

113. E_4: obtener únicamente sello.

114. E_5: obtener dos caras y un sello.

R **Para escoger presidente, vicepresidente y secretario del consejo estudiantil se han postulado Pedro, Juan y María. Estos se pueden ubicar en las posiciones que muestra el siguiente espacio muestral:**

S = {(Pedro, Juan, María), (Pedro, María, Juan)
(Juan, Pedro, María), (Juan, María, Pedro)
(María, Pedro, Juan), (María, Juan, Pedro)}

115. E_1: Pedro queda de presidente.

116. E_2: María queda de presidenta.

117. E_3: Juan queda de presidente.

118. E_4: María queda de presidente y Pedro de vicepresidente.

119. E_5: Juan queda de vicepresidente y María queda de secretaria.

R **Entre el siguiente grupo se seleccionan dos tarjetas para formar sílabas, con o sin sentido:**

120. Determina el espacio muestral. Luego, halla cada uno de los siguientes eventos.

121. E_1: la sílaba inicie en P.

122. E_2: la sílaba inicie en M.

123. E_3: la sílaba tenga una E.

124. E_4: la sílaba no tenga A.

125. E_5: la sílaba tenga I.

R **Saca una carta de una baraja de póquer que contiene 52 cartas. Luego, escribe los elementos de cada evento.**

126. El evento que consiste en obtener un as.

127. El evento que consiste en obtener una carta de corazones con un número par.

128. El evento que consiste en obtener una carta que sea Q roja.

129. El evento que consiste en obtener una carta roja.

Escribe el espacio muestral de cada experimento aleatorio. Luego, define dos eventos diferentes y escribe sus elementos.

130. Lina quiere comer una hamburguesa de un tipo de carne y un tipo de queso. Las opciones son:

Tipos de carne

Res Cerdo Pollo

Tipos de queso

Mozarela Doble crema

El experimento consiste en escoger un tipo de una carne y uno de queso.

131. Daniel debe formar un número de dos dígitos diferentes usando únicamente los siguientes:

9 7 0
3 1 4

132. Para la final de una válida automovilística se inscriben ocho deportistas:

Gabriel Alejandro Pablo Manuel
Esteban Miguel Iván Jorge

Solamente reciben premio los dos primeros.

El experimento consiste en ver cómo pueden recibir premio dos de los ocho competidores.

5. Nociones de probabilidad

Ampliación multimedia
Recurso imprimible
Enlace web

En el lenguaje común se acostumbra usar expresiones como:

Es muy probable que suceda.

¡Jamás pasará!

Siempre está listo.

Es casi seguro que mi equipo ganará.

Es imposible que pierda.

Estas expresiones, que hacen parte del lenguaje cotidiano, también contienen dentro de sí el lenguaje de la matemática, en el cual cada una de ellas tiene un significado numérico específico.

Así, cuando se utiliza este estilo de expresiones se está haciendo referencia a la probabilidad de que algo ocurra. Esta probabilidad es una medida de incertidumbre que aporta elementos en la toma de decisiones.

Por ejemplo, si en una semana ha llovido de lunes a sábado se cree que es muy probable que el domingo llueva; así que, si una persona va a decidir cuál tipo de ropa usará el domingo, este antecedente de lluvia puede influir en su decisión.

5.1 Escala de probabilidades

Actividad

A la probabilidad se le asignan valores numéricos que están entre 0 y 1.

Así, 0 será el valor que se le asigna al evento imposible, es decir, aquello que jamás pasará, y 1 será el valor asignado al evento seguro, es decir, aquello que siempre pasará.

Teniendo en cuenta estos valores, es posible establecer la siguiente escala de probabilidades:

Con estos criterios se puede hablar de un método subjetivo de asignación de probabilidades, en el cual cada sujeto, a partir de su relación con el evento estudiado, asigna un valor a la probabilidad de ocurrencia del evento.

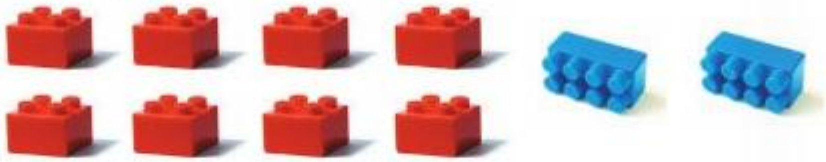
Así, si en un determinado lugar de la ciudad ha llovido toda la semana, pero en otro lugar ha habido días sin lluvia, dos personas ubicadas en un punto intermedio de la ciudad el día domingo pueden emitir criterios diferentes sobre la probabilidad de que llueva en dicho punto.

Para una de ellas puede ser muy probable que llueva, mientras que para la otra puede ser muy probable que no llueva.

En este caso, se está emitiendo un criterio subjetivo frente a la probabilidad de ocurrencia de un evento específico.

EJEMPLOS

1. **Sobre una mesa hay fichas de ensamblar de dos colores como se muestra a continuación. Si se ponen en una bolsa oscura 10 fichas, ¿cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja? y ¿cuál es la probabilidad de sacar una ficha azul?**



Si se selecciona al azar una ficha, se tiene que: es muy probable que la elección sea una ficha roja y es poco probable que la elección sea una ficha azul.

En este caso, la asignación de la probabilidad está directamente ligada a la cantidad de fichas que hay para la elección, pero al tener en cuenta el caso de los días de lluvia, allí la probabilidad estará relacionada con la frecuencia con la que ocurre el suceso que se va a estudiar.

2. **Para la elección del comité estudiantil se han postulado los siguientes candidatos:**

Pablo	Juliana	Andrés	Camila
Andrea	Diana	César	Marina
Roberto	Valentina	Óscar	Javier

Para el comité solamente serán seleccionados dos de todos los candidatos postulados.

En este caso, como hay igual número de hombres que de mujeres, es igualmente probable que para el comité sea seleccionada una determinada mujer o que sea seleccionado un determinado hombre.

Los eventos que tienen la misma probabilidad de ocurrencia reciben el nombre de **eventos equiprobables**.

Por ejemplo, un grupo de niños juega con una ruleta similar a la que se muestra a continuación:

En este caso se puede afirmar que:

Es muy probable que la bola caiga en una porción verde de la ruleta; es poco probable que la bola caiga en una porción azul; es casi imposible que la bola caiga en una porción amarilla y es imposible que la bola caiga en una porción negra.

5.2 Probabilidad simple

Actividades · Ampliación multimedia · Enlace web

La probabilidad es una medida que se calcula para la ocurrencia de los eventos. Luego, en cada caso se debe plantear un experimento aleatorio, un espacio muestral y unos eventos específicos de los cuales se quiere saber su probabilidad de ocurrencia.

La **probabilidad de ocurrencia** de un evento es el cociente entre el número de elementos del evento $\#(A)$ y el número de elementos del espacio muestral $\#(S)$.

Si A es un evento de un experimento aleatorio, entonces la probabilidad de A, nombrada $P(A)$ es:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$$

EJEMPLO

La señora Sofía quiere pintar las paredes de su sala. Como aún no ha escogido el color, decidió ir a ver la carta de colores en una importante distribuidora de pinturas para espacios interiores.

A continuación se presenta la carta de colores:

Si la señora Sofía quiere pintar sus paredes de dos colores distintos, ¿cuál es la probabilidad de que uno de los colores que escoja sea rojo pasión?

Para poder determinar la probabilidad, primero debemos escribir los elementos del espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en escoger dos colores de un grupo de seis.

Verde aceituna: VA   Amarillo sol: AS

Rojo pasión: RP   Lila extremo: LE

Azul cielo: AC   Naranja estrella: NE

$S =$ {(VA, RP), (VA, AC), (VA, AS), (VA, LE), (VA, NE), (RP, AC), (RP, AS), (RP, LE), (RP, NE), (AC, AS), (AC, LE), (AC, NE), (AS, LE), (AS, NE), (LE, NE)}

Por tanto, el espacio muestral tiene 15 elementos, $\#(S) = 15$.

El evento cuya probabilidad se quiere determinar es aquél en el cual la elección de los colores incluye el rojo pasión, así:

A: Elegir rojo pasión

$A =$ {(VA, RP), (RP, AC), (RP, AS), (RP, LE), (RP, NE)}

Este evento tiene cinco elementos. Así, $\#(A) = 5$.

Por tanto, $P(A)$ es:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Es importante destacar que no siempre para hallar la probabilidad de un evento es necesario saber los elementos específicos de dicho evento, incluso hay ocasiones en las cuales ni siquiera es necesario conocer los elementos del espacio muestral sino solamente su cantidad.

Matemática*mente*

¿Qué evento recibe el valor 0 como asignación de su probabilidad?

¿Qué evento recibe el valor 1 como asignación de su probabilidad?

5.3 Propiedades de la probabilidad

La probabilidad de ocurrencia de un evento tiene algunas propiedades que se deben tener en cuenta a la hora de calcularla. A continuación se describe una de ellas:

1. Sea A cualquier evento de un experimento aleatorio, entonces:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Es decir, la probabilidad de un evento simple siempre es un número entre cero y uno.

Es importante anotar que el número de elementos del evento siempre es menor o igual que el número de elementos del espacio muestral.

2. Sea B un evento simple, es decir, un conjunto unitario, entonces:

$$P(B) = \frac{1}{\#(S)}$$

Se debe tener en cuenta que si se considera la probabilidad de todos los eventos simples en un espacio muestral finito, la suma de estas probabilidades es 1.

3. Sean A y B dos eventos disjuntos, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. Sean A y B dos eventos intersecantes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Recuerda que...

Dos conjuntos son disjuntos si su intersección es vacía, es decir, si no tienen elementos en común.

Como las probabilidades de los eventos son números, las expresiones con probabilidades pueden trasladarse de un lado a otro de las igualdades; así, dados tres valores conocidos en la igualdad anterior, se puede calcular el cuarto valor.

Así, de la propiedad 4 se puede despejar el valor de la expresión $P(A \cap B)$, así:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

EJEMPLOS

1. En una urna cerrada se colocan diez balotas: una negra, dos blancas, tres rojas y cuatro amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la balota negra?

Primero, se asigna el nombre al evento.

A: extraer una balota negra.

Luego, como A es un evento simple y solo hay una balota negra, entre diez posibilidades, se tiene que: $P(A) = \frac{1}{10}$

Finalmente, la probabilidad de extraer una balota negra es $\frac{1}{10}$.

2. El departamento de salud de un colegio está interesado en saber cuántos de sus estudiantes de primaria tienen algún tipo de seguro médico diferente al obligatorio. Para ello, aplicó una encuesta a 70 estudiantes, que arrojó los siguientes resultados:

50 estudiantes tienen medicina prepagada.

35 estudiantes tomaron el seguro estudiantil contra accidentes.

23 estudiantes tienen medicina prepagada y seguro estudiantil contra accidentes.

Si se escoge un estudiante en forma aleatoria, hallar la probabilidad de que este tenga alguno de los seguros médicos mencionados.

Para solucionar esta situación debemos tener en cuenta que cada uno de los datos presentados es un evento y el espacio muestral estará formado por todos los eventos mencionados.

Primero, asignaremos el nombre de un evento a cada uno de los datos dados. Sean A y B los siguientes eventos:

A: estudiantes que tienen medicina prepagada.

B: estudiantes que tomaron el seguro estudiantil contra accidentes.

De acuerdo con esto, se tiene que $A \cap B$ representa a los estudiantes que tienen los dos seguros médicos anteriores. Ahora:

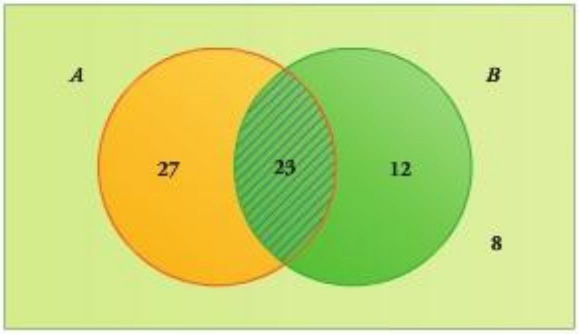
- El número de elementos del espacio muestral es 70, pues este es el total de estudiantes encuestados.
- El número de elementos de A es 50.
- El número de elementos de B es 35.
- El número de elementos de $A \cap B$ es 23.

Aplicando las propiedades de la probabilidad se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{50}{70} + \frac{35}{70} - \frac{23}{70}$$
$$= \frac{62}{70}$$

Así la probabilidad de que al escoger un estudiante en forma aleatoria este tenga alguno de los dos seguros médicos es de 0,89 (89%).

Esta situación se puede representar en un diagrama de Venn como se muestra a continuación, donde se observa que 8 no tienen seguro alguno.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · **R** Razono · Propongo · **S** Soluciono problemas

En una mesa se tienen los siguientes postres:

133. Si una persona llega a comprar un postre y su elección es aleatoria, halla la probabilidad de que su elección sea un ponquecito.

134. Halla la probabilidad de que su elección sea un helado.

135. Halla la probabilidad de que su elección sea un pie de fresa.

136. Teniendo en cuenta estas probabilidades, asigna las expresiones de la escala de probabilidades a cada uno de los eventos anteriores.

R **Un psicólogo que aplica pruebas de aptitud en estudiantes de edad preescolar tiene sobre una mesa diferentes láminas para colorear. Observa y resuelve.**

137. Escribe cuatro expresiones que definan, en términos de la escala de probabilidad, la posibilidad de que un estudiante que llegue al consultorio del psicólogo escoja alguno de los cuatro tipos de láminas.

138. Calcula la probabilidad de que un estudiante escoja la lámina de osito.

139. ¿Cuál de las láminas tiene menor probabilidad de ser escogida? ¿Por qué?

140. ¿Cuál de las láminas tiene mayor probabilidad de ser escogida? ¿Por qué?

Inventa una situación en la cual la probabilidad de cada uno de los eventos sea la siguiente:

141. $P(A) = \frac{3}{10}$

142. $P(B) = \frac{1}{10}$

143. $P(C) = \frac{4}{10}$

144. $P(D) = \frac{2}{10}$

S **Observa el calendario con el pronóstico del tiempo para el mes de octubre. Luego, responde.**

Octubre

L	M	M	J	V	S	D
1 ☀	2 ☁	3 ☀	4 ☀	5 ☀	6 ☀	7 ?
8 🌧	9 🌧	10 🌧	11 🌧	12 🌧	13 🌧	14 ?
15 ☀	16 ☁	17 🌧	18 ☀	19 🌧	20 ☁	21 ?
22 ☀	23 ☀	24 ☀	25 🌧	26 🌧	27 🌧	28 ?

☀ Día soleado
🌧 Día lluvioso
☁ Día nublado

145. Probablemente, ¿qué día hará el domingo 7 de octubre? ¿Qué día hará el 14 de octubre?

146. El 21 de octubre es más probable que haya un día soleado, un día lluvioso o un día nublado?

147. ¿Qué pronóstico de tiempo hay para el 28 de octubre? Justifica tu respuesta.

S **Lee y resuelve.**

Laura, Martín y Juliana se disputan la oportunidad de ser monitor de la clase de matemáticas.

148. Escribe el espacio muestral del experimento que consiste en elegir un monitor.

149. ¿Cuál es la probabilidad de que Laura sea elegido monitor?

S **Luisa quiere comprar un par de zapatos y un jean pero aún no ha decidido de qué colores. Ella tiene las siguientes opciones:**

Zapatos	Jean
Rojos	Azul
Negros	Blanco
Miel	Gris

150. Halla el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en escoger un par de zapatos y un jean.

151. Anota los elementos del evento que consiste en escoger unos zapatos rojos.

152. Escribe los elementos del evento que consiste en escoger un jean blanco.

153. Copia los elementos del evento que consiste en escoger un jean azul y unos zapatos negros.

154. Encuentra la probabilidad de que en la elección halla unos zapatos rojos.

155. Halla la probabilidad de que en la elección se encuentre un jean gris.

156. Halla la probabilidad de que en la elección aparezcan unos zapatos color miel y un jean blanco.

S **Para la final de los cien metros planos se han clasificado cinco atletas: Carlos, Lina, Laura, Mario y Carolina.**

157. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer gane la competencia?

158. ¿Cuál es la probabilidad de que Mario gane la carrera?

159. Si Laura tuvo una lesión y no se presentó a la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que gane una mujer?

S **Para representar a su colegio en un concurso de baile se han postulado siete estudiantes:**

Luisa, Juana, Javier, Pablo, Esteban, Natalia y Valeria.

Al concurso irán dos estudiantes y no importa si son dos hombres, dos mujeres o un hombre y una mujer.

160. Escribe los elementos del experimento aleatorio que consiste en escoger dos estudiantes de un grupo de siete.

161. Halla la probabilidad de que se elija un hombre y una mujer.

S **El preparador físico del equipo de fútbol está interesado en conocer qué tipo de deportes han practicado sus deportistas antes de pertenecer al equipo. Para ello preguntó a los 30 deportistas del equipo sobre este aspecto y los resultados fueron los siguientes:**

12 deportistas dijeron haber practicado natación.

10 deportistas dijeron haber practicado patinaje.

6 deportistas dijeron haber practicado natación y patinaje.

El resto no practicaba ningún deporte antes.

162. Halla la probabilidad de que si se escoge un deportista en forma aleatoria este haya practicado alguno de los dos deportes.

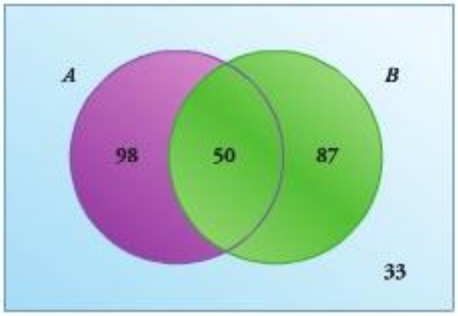
163. Representa la situación en un diagrama de Venn.

164. A partir del diagrama de Venn, halla la probabilidad de que, si se escoge aleatoriamente un deportista, este no haya practicado ningún deporte antes de pertenecer al equipo.

165. Halla la probabilidad de que al escoger un deportista al azar, este haya practicado únicamente natación.

166. Halla la probabilidad de que al escoger un deportista al azar, este haya practicado únicamente patinaje.

En el siguiente diagrama el evento A representa a las personas que son vegetarianas y el evento B representa a las personas que practican alguna disciplina oriental.



Si se selecciona una persona al azar:

167. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea vegetariana ni practique ninguna disciplina oriental?

168. ¿Cuál es la probabilidad de que únicamente sea vegetariana?

169. ¿Cuál es la probabilidad de que sea vegetariana y practique una disciplina oriental?

Conceptos generales

En cada situación determinar la población y la muestra. Luego, determinar, en cada uno de los casos, el muestreo adecuado.

170. El comité científico de una multinacional de medicamentos desea promover un producto que ha sido efectivo en el tratamiento de la malaria en varios países.

Para esto, dicho comité decide realizar una campaña en 6 hospitales que están ubicados en tres zonas colombianas donde se ha detectado la enfermedad.

Población: ______________________

Muestra: ______________________

Tipo de muestreo: ______________________

171. Con el ánimo de contribuir al mejoramiento de la malla vial, el alcalde de la ciudad desea saber si los habitantes están de acuerdo con que se aumente el impuesto de vivienda.

Para conocer la opinión de la ciudadanía, decide realizar una encuesta a 3.000 ciudadanos.

Población: ______________________

Muestra: ______________________

Tipo de muestreo: ______________________

Caracterización de variables cualitativas

A continuación se presenta la información recogida entre un grupo de niños Boys Scouts según el grupo al cual pertenecen:

Lobatos: 50
Scouts: 46
Caminantes: 31
Rovers: 7
Travers: 3

172. Elabora el pictograma que representa la información sobre los Boys Scouts. Ten en cuenta la siguiente información:

Representa 2 niños

173. Completa en tu cuaderno, la tabla de frecuencias correspondiente al pictograma.

Boys Scouts	*f*	*fr*	%

Lee la siguiente información. Luego, resuelve.

Una agencia de publicidad quiere saber cuál es el medio de comunicación que más consultan los clientes de un producto de belleza específico. El objetivo de la agencia es establecer estrategias de mercadeo que incrementen la venta del producto.

A continuación se presentan los resultados de la encuesta que aplicaron entre una muestra representativa de sus clientes, donde T: televisión, R: revistas, V: vallas, P: periódicos y Ra: radio.

T	R	T	R	T	V	R	T
R	R	T	R	T	P	T	T
V	T	T	R	Ra	P	T	T
P	T	P	R	T	P	R	Ra
V	T	P	T	V	T	V	V
Ra	T	P	R	Ra	P	T	V
Ra	Ra	T	R	Ra	T	R	V
V	T	R	R	Ra	T	R	V

174. Elabora la tabla de distribución de frecuencias. Luego, realiza el diagrama de barras correspondiente.

175. Escribe tres conclusiones en relación con el estudio planteado.

Conclusión 1: ______________________

Conclusión 2: ______________________

Conclusión 3: ______________________

176. ¿Cuál será el medio de comunicación en el que la agencia debe promover el producto?

____

177. ¿Cuál será el medio en el que definitivamente no vale la pena aumentar la publicidad del producto?

____

178. Si fueras la persona encargada de tomar la decisión de no poner más publicidad en dos medios de comunicación, ¿cuáles escogerías? Explica tu respuesta.

Caracterización de dos variables cualitativas

La siguiente base de datos, muestra los resultados de una encuesta sobre los gustos y las preferencias en bebidas hidratantes de hombres y mujeres que asisten a la ciclovía un domingo del mes de octubre.

Género	Bebida	Género	Bebida
H	Jugo	M	Energética
M	Agua	M	Energética
H	Energética	H	Energética
M	Jugo	H	Energética
H	Jugo	M	Energética
H	Jugo	M	Energética
H	Agua	H	Energética
H	Agua	M	Energética
H	Agua	H	Energética
M	Energética	M	Agua
M	Energética	H	Agua
H	Energética	M	Agua
M	Energética	M	Agua
H	Jugo	M	Agua
M	Agua	H	Energética

179. Completa la tabla de contingencia para la situación anterior.

	Tipo de bebida			Total
Género				
Total				

180. Escribe tres conclusiones a partir de la tabla.

Conclusión 1 ____________________________

Conclusión 2 ____________________________

Conclusión 3 ____________________________

181. Elabora la tabla marginal relacionada con la variable *Tipo de bebida* y elabora tres conclusiones a partir de ella.

Experimentos aleatorios

Lucía y Jaime van a un sitio de comidas rápidas a comer pizza. Pueden escoger el tipo de carne y el tipo de queso que llevará la pizza. Las opciones son:

Carne	Queso
Pollo	Mozarela
Jamón	Parmesano
Salami	Campesino

182. Encuentra el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en escoger un tipo de carne y uno de queso para la pizza que se va a pedir. Luego, escribe los elementos de cada evento.

$S=\{$ ____________________________________

____________________________________ $\}$

183. E_1: La pizza tiene queso mozarela.

$E_1=\{$ ____________________________________ $\}$

184. E_2: La pizza tiene pollo.

$E_2=\{$ ____________________________________ $\}$

185. E_3: La pizza tiene queso parmesano y salami.

$E_3=\{$ ____________________________________ $\}$

Nociones de probabilidad

Para una convocatoria de talentos artísticos se ha preguntado a los 116 participantes cuál es su habilidad. Las respuestas fueron las siguientes:

Canto: 49 **Danza: 67** **Canto y danza: 35**

186. Elabora el diagrama de Venn de la situación.

187. Si se escoge un participante al azar, halla la probabilidad de que su talento sea únicamente canto.

____

____

188. Si se escoge un participante al azar, halla la probabilidad de que este posea los dos talentos.

____

____

189. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante tenga uno de los dos talentos pero no ambos?

____

____

PROBLEMAS PARA REPASAR

El profesor de inglés aplicó a sus estudiantes una prueba sobre las competencias básicas para la certificación en el uso y manejo de la lengua extranjera. Observó que el resultado no fue el esperado, así que decidió analizar en qué competencia de la prueba consideraban sus estudiantes que necesitaban un refuerzo. A continuación, se muestran los resultados.

Reading *Listening* *Writing*
Speaking *Listening* *Listening*
Writing *Speaking* *Speaking*
Reading *Reading* *Reading*
Writing *Writing* *Writing*
Listening *Listening* *Listening*
Listening *Listening* *Writing*

¿Cuál es la competencia en la que los estudiantes deberían recibir un refuerzo?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

En este caso solo hay una pregunta y es: ¿Cuál es la competencia en la que los estudiantes deberían recibir un refuerzo?

¿Cuáles son los datos del problema?

Luego, se muestran los resultados de la prueba, respecto a la competencia en que los estudiantes tuvieron peor desempeño y que demanda un refuerzo:

Reading *Listening* *Writing* *Speaking* *Listening* *Listening* *Writing*
Speaking *Speaking* *Reading* *Reading* *Reading* *Writing* *Writing*
Writing *Listening* *Listening* *Listening* *Listening* *Listening* *Writing*

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determina qué tipo de variable es la que se va a estudiar: para este caso es una variable cualitativa: competencia en la lengua extranjera.

Luego, se deben identificar las diferentes opciones de respuesta de la variable para elaborar la tabla de frecuencias: Esas competencias son: *Reading, Listening, Writing* y *Speaking*.

Con las opciones de respuesta identificadas se procede a elaborar la tabla y a analizarla:

Competencia	*f*	*fr*	%
Reading	4	0,19	19%
Listening	8	0,38	38%
Writing	6	0,28	29%
Speaking	3	0,14	14%

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Con base en la tabla de frecuencias, se puede concluir que la competencia en la cual el profesor debe hacer el refuerzo es *Listening*.

Resuelve las preguntas y actividades de la 190 a 195.

El alcalde de la ciudad quiere implementar un proyecto de comedores comunitarios en los cuales los ciudadanos de bajos recursos puedan consumir una comida diaria por cuenta de la alcaldía.

Para ello, se realizó una encuesta, en uno de los barrios, a un grupo de 49 familias. A estas se les preguntó por su estrato económico y se obtuvieron los siguientes resultados.

2	1	1	3	1	2	1
1	2	1	2	3	2	1
3	2	2	1	1	1	2
1	2	3	1	2	2	1
2	1	1	2	1	2	2
1	3	3	3	3	2	2
1	1	1	2	2	2	2

190. ¿Cuál es la variable que se quiere estudiar?

191. ¿Es una variable cualitativa? ¿Por qué?

192. Construye la tabla de frecuencias correspondiente.

Estrato	*f*	*fr*	%

Elabora el diagrama circular que represente la situación.

193. El alcalde ha decidido abrir un comedor comunitario en cada barrio en donde, como mínimo, el 65% de la población sea de estratos 1 y 2. Determina si en el barrio donde se realizó la encuesta se abrirá el comedor comunitario.

194. Especifica cuál estrato es el que tiene mayor representatividad en dicho barrio. Escribe el porcentaje correspondiente en relación con el total de encuestados.

195. Si tú fueras el asesor del alcalde y tuvieras que presentarle un informe en el cual le describas la población del barrio en cuestión, ¿qué datos incluirías? Escribe brevemente a continuación lo que diría tu informe.

Resuelve las preguntas 196 a 202 con base en la siguiente información

Un grupo de médicos especialistas en alergología decide investigar sobre las alergias en una población de un barrio de estrato 3 de la ciudad. Para ello, realizaron una encuesta en un centro médico, donde preguntaron a 500 pacientes, que acuden regularmente a control, sobre sus alergias a la comida y si habían sido vacunados.

A continuación se presentan los resultados.

- 221 personas son alérgicas a alguna comida.
- 224 personas son niños.
- 246 personas han sido vacunadas.
- 56 personas son niños alérgicos a alguna comida y que han sido vacunados.
- 90 personas son niños que han sido vacunados.
- 100 personas son niños con alergia a alguna comida.
- 107 personas han sido vacunadas y presentan alergia a alguna comida.

196. ¿Cuántos eventos diferentes se presentan en la situación anterior?

197. ¿Cuáles son esos eventos?

E_1:

E_2:

E_3:

198. Representa la situación en un diagrama de Venn.

Si se escoge un paciente al azar:

199. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño?

200. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vacunado?

201. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga alguna alergia a la comida?

202. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño con alergia a algún tipo de comida?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

... Para analizar problemas ambientales y ecológicos.

Reciclar. Una misión de todos

¿Te has puesto a pensar cuántos kilos de basura produces en una semana?

Los seres humanos, por naturaleza, producimos desperdicios de comida, papel, plásticos entre otros materiales. Se diría que cada persona participa en la contaminación del mundo. Aunque esto suene un poco irónico, es así; a diario solamente con el hecho de consumir las onces, estás dejando a un lado empaques de paquetes, jugos o botellas.

En el mundo, se emprenden a diario campañas de reciclaje de basuras. Algunos aspectos relacionados con este proceso son:

¿Qué es reciclar?

Es un proceso fisicoquímico o mecánico que consiste en someter una materia o un producto ya utilizado a un ciclo de tratamiento total o parcial para obtener una materia prima o un nuevo producto. Este proceso introduce los productos, de nuevo, en el ciclo de utilización con lo cual dejan de ser "basura", para convertirse en nuevos elementos reutilizables.

Durante años, los grandes basureros han tenido que almacenar los residuos hasta que se pudren, sus olores se evaporan o son sepultados debajo de nuevas montañas de desechos. Sin embargo, la gran mayoría pudo haberse reciclado para que no contaminara más el planeta.

Reciclar en casa... Una buena idea

En un hogar, diariamente se genera una gran cantidad de desperdicios. Inclusive los consumidores responsables que utilizan materiales ecológicos y solamente tiran a la basura lo justo y necesario, producen basura. Por eso, una de las mejores acciones que se pueden emprender en casa para el cuidado del medio ambiente es separar, es decir, clasificar la basura.

En primer lugar, lo ideal es disponer recipientes de colores diferentes, o marcados de alguna forma. En ellos se colocarán los residuos domésticos, realizando una tarea que muy pocas veces es tenida en cuenta, y que es la base del reciclaje: la separación o clasificación.

Lo ideal es utilizar un recipiente o contenedor para los desechos de vidrio, plástico, empaques Tetra pack, lata y metales, papel y cartón, y un contenedor para residuos biodegradables, como restos de comida y vegetación.

Incluso, hay recomendaciones específicas para cada material, como por ejemplo: colocar el vidrio en bolsas resistentes, doblar el cartón, compactar los envases plásticos, pisar o aplanar las latas para que no ocupen tanto espacio y dejar el Tetra pack en hojas planas.

Contenedor amarillo (envases): en este se debe depositar todo tipo de envases ligeros como los de plástico (botellas, bolsas, bandejas, etc.), latas (bebidas, conservas, etcétera).

Contenedor azul (papel y cartón): en este contenedor se deben colocar los envases de cartón así como papel, periódicos, revistas, papeles de envolver, etc.

Contenedor verde (vidrio): en este contenedor, como lo indica su nombre, se guardan envases y otros elementos de vidrio.

Contenedor gris (orgánico): en él se depositan el resto de residuos que no tienen cabida en los grupos anteriores, fundamentalmente, materia biodegradable.

Contenedor rojo (desechos peligrosos): como celulares, insecticidas, pilas o baterías, aceite comestible o de carros, jeringas, latas de aerosol, etc.

Reciclaje de basura orgánica

Cuando se tienen residuos que formaron parte de seres vivos, es decir, productos de origen animal y vegetal se puede hacer la "composta", que es un magnífico abono para la tierra.

Restos de comida, frutas y verduras, cáscaras de huevo, restos de café, aserrín, paja, trozos de madera, césped, ramas, hojas, raíces, pétalos, etc, sirven para este propósito.

Actualmente, hay muchos ejemplos de comunidades que emprenden acciones de reciclaje en beneficio de los seres humanos y del medio ambiente. A continuación, presentamos el caso de una de ellas.

La junta administradora de un conjunto residencial elaboró una encuesta por medio de la cual se preguntó a cada uno de los residentes si

- conocen los procesos de reciclaje y
- con qué periodicidad reciclan.

Los datos resultantes se registran a continuación:

Conoce el proceso	Periodicidad
Sí	Algunas veces
No	Nunca
Sí	Siempre
Sí	Algunas veces
Sí	Siempre
Sí	Nunca
No	Algunas veces
No	Algunas veces
Sí	Nunca
Sí	Nunca
No	Nunca
Sí	Algunas veces
No	Nunca
Sí	Nunca
Sí	Algunas veces
Sí	Nunca
Sí	Siempre
No	Nunca
No	Nunca
Sí	Nunca
Sí	Nunca
No	Siempre
Sí	Siempre
No	Siempre
Sí	Siempre
Sí	Nunca
Sí	Nunca
Sí	Nunca
No	Nunca
No	Algunas veces
Sí	Siempre
Sí	Siempre
No	Siempre

1. **¿Cuál es el objetivo del estudio planteado? Explica en un párrafo tu respuesta.**
2. **Determina cuál es la población y cuál es la muestra en este caso. También explica cuál podría ser el muestreo utilizado en este caso.**
3. **¿Qué variables se estudiaron en la muestra? ¿De qué tipo son?**
4. **Elabora una tabla de frecuencias para cada una de las variables estudiadas. Hazlo por separado.**
5. **Elabora una tabla de contingencia que relacione las dos variables estudiadas.**
6. **Elabora el diagrama de barras correspondiente a la tabla de contingencia que hiciste.**
7. **Escribe cuatro conclusiones a partir del diagrama.**
8. **Si se selecciona un habitante al azar, ¿qué probabilidad hay de que este conozca los procesos de reciclaje? ¿Qué probabilidad hay de que no los conozca?**

Trabaja con Stadis

Objetivo: organizar, procesar y analizar cualquier tipo de datos, realizando cálculos, manejo de fórmulas y creación de gráficos.

Concepto: representar datos en una tabla de frecuencias. Luego, elaborar el diagrama de barras, circular e histogramas en el programa Stadis.

Para acceder a Stadis, ingresa y descarga el programa en: stadis.softonic.com/

❶ Haz clic en StadiS.

❷ Observa la ventana que se despliega.

Luego, en la parte inferior, haz clic en **Nueva,** como se muestra en la figura.

❸ Visualiza la ventana que se despliega.

Luego, selecciona **Unidimensional.**

Después haz clic en **Categórica.**

Y finalmente en **Aceptar,** como se muestra a continuación.

❹ Introduce, en la **Tabla de distribución,** los siguientes datos relacionados con los sitios web más visitados por un grupo de 300 personas, de la siguiente manera: Google 100, Twitter 30, Youtube 120, Facebook 50.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN

Xi	ni
Google	100
Twitter	30
Youtube	120
Facebook	50

❺ Para calcular la frecuencia relativa, selecciona **Columnas: X.**

Luego, haz clic en **f_i,** como se muestra a continuación.

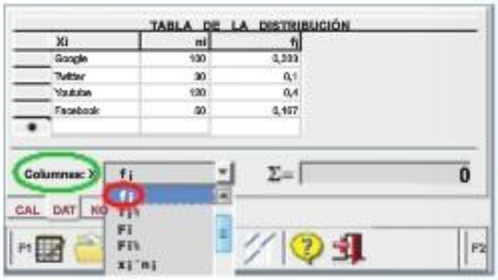


TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN

Xi	ni	fi
Google	100	0,333
Twitter	30	0,1
Youtube	120	0,4
Facebook	50	0,167

❻ Para calcular la frecuencia porcentual, selecciona **Columnas: X.**

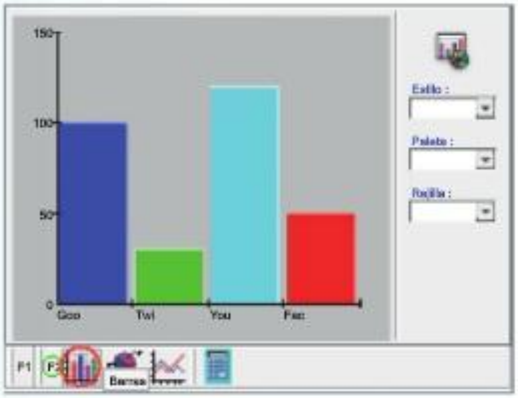
Luego, haz clic en **f_i%,** como se muestra en la figura.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN

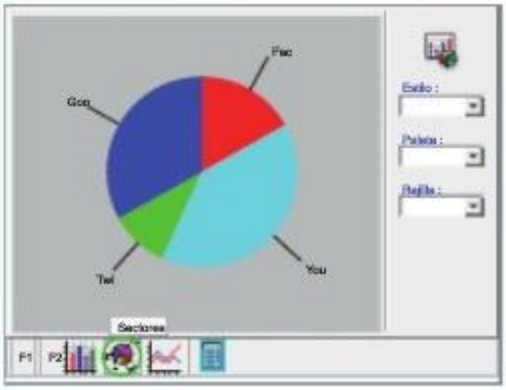
Xi	ni	fi	fi%
Google	100	0,333	33,333
Twitter	30	0,1	10,0
Youtube	120	0,4	40,0
Facebook	50	0,167	16,667

❼ Responde, ¿qué porcentaje de personas visita Twitter?

⑧ Para elaborar el diagrama de barras, selecciona la opción **F2.** Luego, haz clic en **Barras,** como se muestra en la figura.



⑨ Para realizar el diagrama circular, haz clic en **Sectores.**



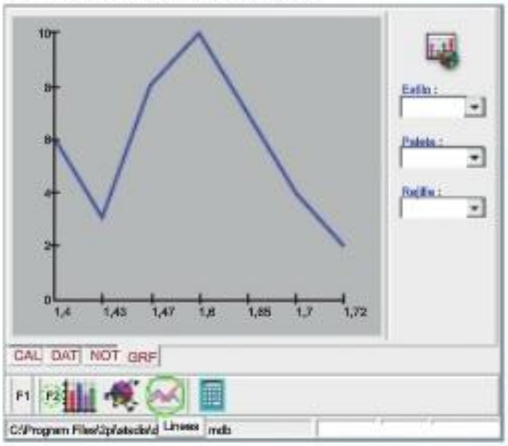
⑩ Para realizar el estudio de variables cuantitativas, se selecciona **Unidimensional,** después haz clic en **Discreta** y luego en **Aceptar,** como se muestra en la figura.

⑪ Introduce los datos en la Tabla de distribución que se muestra en la figura.

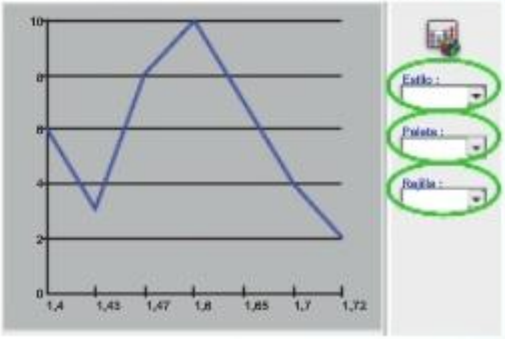
TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN

Xi	ni
1,4	6
1,43	3
1,47	8
1,6	10
1,66	7
1,7	4
1,72	2

⑫ Para construir el polígono de frecuencias, selecciona la opción **F2.** Luego, haz clic en **Líneas,** como se muestra en la figura.



⑬ Cambia el aspecto de los diagramas de barras y circulares, y el polígono de frecuencias con las herramientas que se muestran en la figura.



⑭ Completa la tabla de frecuencia con los datos que introdujiste en el punto 11. Luego, realiza el diagrama de barras y el diagrama circular correspondientes.

GLOSARIO

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje *x*, en el plano cartesiano.

Ángulo: unión de dos semirrectas que parten de un mismo punto.

Ángulos adyacentes: ángulos consecutivos cuyas medidas suman 180°.

Ángulos complementarios: dos ángulos cuyas medidas suman 90°.

Ángulos consecutivos: ángulos que solamente tienen en común un lado y el vértice.

Ángulos suplementarios: dos ángulos cuyas medidas suman 180°.

B

Base numérica: número de elementos que conforman cada orden o nivel en un sistema de numeración posicional.

Bicondicional o equivalencia: proposición compuesta por el conectivo lógico "si y sólo si" (⇔).

Bisectriz de un ángulo: rayo que parte del vértice y divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.

C

Conectivo lógico: expresión que sirve para unir o enlazar dos proposiciones simples.

Conjunción: proposición compuesta por dos proposiciones simples enlazadas por el conectivo lógico "y" (∧).

Conjunto finito: conjunto con un número determinado de elementos, que se puede contar.

Conjunto infinito: conjunto con un número indeterminado de elementos.

Conjunto universal: conjunto que sirve como referencia para otros conjuntos.

Conjunto vacío: conjunto que carece de elementos.

Conjuntos disyuntos: dos conjuntos que no tienen elementos comunes.

Conjuntos intersecantes: dos conjuntos que tienen elementos comunes.

D

Datos: cantidades o medidas obtenidas de la observación, comparación y aplicación de encuestas.

Diferencia simétrica: operación lógica entre dos conjuntos *A* y *B*, que corresponde a los elementos que pertenecen a la unión de *A* y *B*, que no pertenecen a su intersección.

Divisores: un número *a* es divisor de un número *b*, cuando la división de *b* entre *a* es exacta.

Disyunción: proposición compuesta por dos proposiciones simples enlazadas por el conectivo lógico "o" (∨).

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo es cierta para algunos valores de las variables.

Eje de simetría: recta que divide una figura en dos partes que coinciden exactamente.

Ecuaciones equivalentes: ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Espacio muestral: conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Experimento aleatorio: experimento del cual no se puede prever el resultado.

F

Factorización de un número: expresión de un número como el producto de sus factores primos.

Figuras semejantes: aquellas que tienen la misma forma pero distinto tamaño.

Figuras simétricas: dos figuras son simétricas respecto a un eje si todas las parejas de puntos correspondientes en dichas figuras equidistan de él.

Fracción decimal: toda fracción cuyo denominador es una potencia de 10.

Fracción impropia: fracción en la que el numerador es mayor o igual que el denominador.

Fracción propia: fracción en la que el numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes: aquellas fracciones que expresan la misma cantidad.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

Frecuencia acumulada: número de eventos ocurridos o de individuos que presentan una característica de la variable hasta el momento considerado.

Frecuencia relativa: cociente entre la frecuencia absoluta y el número de individuos de la población en un estudio estadístico.

I

Implicación o condicional: proposición compuesta por dos proposiciones simples enlazadas por el conectivo lógico "entonces" (⇒).

Intersección: conjunto formado por los elementos comunes de ambos conjuntos.

L

Línea poligonal: unión de segmentos contiguos. Una línea poligonal puede ser abierta o cerrada.

Longitud: magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos

M

Máximo común divisor: el mcd de dos o más números es igual al producto de sus factores primos comunes, elevados a su menor exponente.

Mediatriz de un segmento: recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

Mínimo común múltiplo: el mcm de dos o más números es el producto de todos los factores primos de los números dados, elevados a su mayor exponente.

Múltiplos de un número a: conjunto formado por todos aquellos números de la forma $a \times n$, donde n es un número natural distinto de 0.

N

Número compuesto: número que se puede expresar como el producto de números primos diferentes al mismo y a la unidad.

Número decimal: expresión numérica formada por una parte entera y una parte decimal separada con una coma o un punto decimal.

Números primos: aquellos números naturales que tienen solo dos divisores positivos: la unidad y el mismo número.

O

Obtuso: ángulo cuya medida es mayor que 90° y menor que 180°.

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje *y*) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes que conforman el plano cartesiano. Se representa con la coordenada (0, 0).

P

Pareja ordenada: dupla formada por dos elementos en la cual el orden es determinante.

Planos coincidentes: dos planos son coincidentes cuando poseen puntos comunes no colineales.

Planos paralelos: dos planos son paralelos si no poseen puntos comunes.

Planos secantes: dos planos que se cortan y determinan una recta en común.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono: figura plana formada por una línea poligonal cerrada y su interior.

Polígono cóncavo: polígono que tiene un ángulo interior mayor que 180°.

Polígono convexo: polígono cuyos ángulos interiores son menores que 180°.

Polígono regular: polígono en el cual las longitudes de sus lados y la abertura de sus ángulos interiores son iguales.

Polinomio aritmético: expresión en la cual se combinan varias operaciones.

Porcentaje: resultado de aplicar el tanto por ciento a una cantidad dada.

Potencia: expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por él mismo un determinado número de veces.

Primos relativos: aquellos números cuyo único divisor común es 1.

Proposición: afirmación o enunciado del cual se puede decir si es verdadero o falso.

Puntos colineales: puntos que pertenecen a una misma recta.

Puntos coplanares: puntos que están en un mismo plano.

R

Raíz *n*-ésima: se llama raíz *n*-ésima de un número *m*, al número *b*, que al elevarlo al exponente *n* es igual a *m*. Se escribe $\sqrt[n]{m} = b$.

Recta numérica: recta donde se representa un determinado conjunto de números, de tal forma que a cada punto de la recta, le corresponde un único número.

Reflexión: transformación rígida en el plano que consiste en dar media vuelta a una figura mediante una recta llamada eje de reflexión.

Rotación: transformación rígida en el plano que consiste en girar una figura alrededor de un punto determinado. Para rotar una figura se debe tener en cuenta el ángulo de rotación y el sentido contrario o no contrario a las manecillas del reloj.

S

Sistema de numeración: conjunto de símbolos con reglas bien definidas de combinación, usados para representar cantidades y realizar operaciones con ellas.

Subconjunto: un conjunto *A* es subconjunto de un conjunto *B* si todos los elementos de *A* están en *B*.

T

Tabular: expresar magnitudes o datos por medio de tablas.

Tanto por ciento: una o varias partes de cada 100 partes iguales.

Transformación rígida: transformación de una figura en el plano, sin cambiar las medidas de sus ángulos, ni de sus lados.

Traslación: transformación rígida en el plano que consiste en desplazar una figura a lo largo de una recta. Para trasladar una figura debe especificarse magnitud, dirección y sentido.

V

Valor absoluto de una cifra: valor del número que esta representa.

Valor relativo de una cifra: valor del número que esta representa pero dependiendo de la posición que ocupa.

Variable estadística: característica que se estudia en cada elemento de la población o muestra.

BIBLIOGRAFÍA

- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. *Informe PISA 2009*. Volumen I. España. Editorial Santillana. 2010.
- Ministerio de educación nacional. *Decreto 1860 de agosto 3 de 1994.*
- Ministerio de educación nacional. *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Ministerio de educación nacional. *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá, 1998.
- Ministerio de educación nacional. *Resolución número 2343 de junio 5 de 1996.*
- AA.VV. *Currículo y aprendizaje*. Bogotá, Santillana, 1996.
- AA.VV. *Trabajemos solución de problemas con Santillana*. Bogotá, Santillana, 1997.
- AA.VV. *Matemáticas 1 ESO*. España, Editorial Santillana, 2007, pp. 15, 37, 55, 93, 169.
- AA.VV. *Matemáticas 4 ESO*, opción A. España, Editorial Santillana, 2007, p. 371.
- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá, Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alvarenga, B. y Máximo, A. *Física general con experimentos sencillos*. México, Harla, S. A., 1983.
- Bagni, Giorgio T. D´Amore, Bruno. *Leonardo y la matemática*. Bogotá, Editorial Magisterio, 2007.
- Baldor. *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México, Publicaciones cultural, 1998.
- Barnett, Rich. *Serie de compendios Schaum. Teoría y problemas de geometría plana con coordenadas*, México, McGraw Hill, 1970.
- Bol, Brian. *Matemáquinas, la matemática que hay en la tecnología*, Labor.
- Bueche, F. *Fundamentos de física I*. Colombia, McGraw Hill latinoamericana S. A., 1988.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis; Castro, Enrique. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 2*. España, Editorial Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. España, Editorial Síntesis, 1997.
- Clemens, S. R., Et Ál. *Serie Awli. Geometría*. México, Addison Wesley. Pearson Educación, 1998.
- Del olmo Romero, María Ángeles; Moreno Carretero, María Francisca; Gil Cuadra, Francisco. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 19*. España, Editorial Síntesis, 1993.
- D´Amore, Bruno. *Matemática en todo: Recorridos matemáticos inusuales y curiosos*. Bogotá, Editorial Magisterio, 2008.
- Díaz Rodino, Juan Batanero; Bernabéu, María del Carmen; Cañizares Castellanos, María Jesús. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 27*. España, Editorial Síntesis, 1996.
- Fiol Mora, María Luisa; Fortuna Aymemi, Joseph María. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 20*. España, Editorial Síntesis, 1990.
- González, José Luis; Iriarte, María; Jimeno, Manuela; Ortiz, Alfonso; Sanz, Esteban; Vargas machuca, inmaculada. *Matemáticas cultura y aprendizaje 6*. España, Editorial Síntesis, 1990.
- Guillén Soler, Gregoria. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 15*. España, Editorial Síntesis, 1997.
- Hewitt, Paul G. *Física conceptual*. Tercera edición, México, Pearson Educación, 1999.
- Lindenmayer, Asistid. *Arreglos Geométricos de la naturaleza*. Árbol pitagórico.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Madrid, MEC/Labor, 1992.
- Microsoft Corporation. Biblioteca de consulta Microsoft Encarta 2005, 1993-2004.
- Moise, E. y Downs, F. *Geometría Moderna*. Estados Unidos, Addison Wesley publishing company, 1966.
- Pappas, Theoni. *El encanto de las matemáticas. Los secretos ocultos del arte*. Zugarto ediciones, 1997.
- Pappas, Theoni. *La magia de las matemáticas. El orden oculto tras la naturaleza y el arte*. Zugarto ediciones, 1996.
- Pastor, Guillermo. *Matemáticas financieras*. Madrid, Limusa, 1998.
- Peña, José Antonio. *Álgebra en todas partes*. México, SEDICE, 1999.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas, 1989.
- Sestier, Andrés. *Historia de las matemáticas*. México, Limusa, 1983.
- Stephen, F. M. *Historia de la ciencia*. Madrid, Alianza Editorial, 1990.
- Vásquez, C. *Geometría plana y del espacio*. Madrid, Biblioteca Santillana de consulta, 1980.