Los Caminos del Saber

Matemáticas 9

SANTILLANA

Matemáticas 9 para educación básica secundaria, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el Departamento Editorial de Santillana S. A., bajo la dirección de **Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento**.

EQUIPO EDITORIAL

Diana Constanza Salgado Ramírez. *Editora ejecutiva*
Carlos David Sánchez. *Editor júnior*
Edgar Alexander Olarte Chaparro. *Editor júnior*
Daniel Rojas Ruiz. *Editor TIC*
Juan Gabriel Aldana Álvarez. *Asistente editorial*
Óscar Fernando Cruz, Isabel Hernández Ayala. *Revisores de contenidos*

AUTORES

Ricardo Joaquín de Armas Costa
Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad EAFIT. Estudios de doctorado en Matemáticas Aplicadas. Universidad de La Habana, Cuba.

Marysol Ramírez Rincón
Especialista en Matemática Aplicada. Universidad Sergio Arboleda.

Martha Lucía Acosta
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Magíster en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional.

Juan de Jesús Romero Roa
Especialista en Estadística. Magíster en Economía. Universidad Nacional de Colombia.

Jeinsson Giovanni Gamboa Sulvara
Licenciado en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Valeria Celi Rojas
Magíster en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.

Angélica Chappe Chappe
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Dorys Jeannette Morales Jaime
Doctora en Ingeniería Informática. Universidad Pontificia de Salamanca. Especialista en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Cundinamarca..

Francia Leonora Salazar Suárez
Especialista en Edumática. Universidad Autónoma de Colombia. Magíster en Educación con énfasis en investigación. Universidad de La Sabana.

El especialista encargado de avalar este texto desde el punto de vista de la disciplina específica y desde su pedagogía fue José Edilberto Robles Castro. *Magíster en Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.*

El especialista encargado de avalar este texto desde la equidad de género y de su adecuación a la diversidad cultural fue Luis Evelio Castillo Pulido. *Especialista en Ética y Pedagogía de los Valores. Pontificia Universidad Javeriana.*

Se ha hecho el máximo esfuerzo por ubicar a los propietarios de los derechos de autor. Sin embargo, si es preciso efectuar alguna rectificación, la Editorial determinará los arreglos pertinentes.

EQUIPO GRÁFICO Y TÉCNICO

Iván Merchán Rodríguez. *Coordinador de arte creativo y diseñador del modelo gráfico*
Pep Carrió. *Creador gráfico de las carátulas*
Mauricio García Duque. *Coordinador de contenidos digitales*
Martha Jeanet Pulido Delgado, Beatriz Román Campos. *Correctoras de estilo*
Alveiro Javier Bueno Aguirre. *Analista de soporte técnico*
Luis Nelson Colmenares Barragán. *Documentalista y operador de escáner*
Lady Midlennis Sánchez Yopazá, Anacelia Blanco Suárez. *Asistentes de documentación*
Sandra Patricia Acosta Tovar, Diana Pauline López Sandoval, Juan Carlos López Gómez, Omar Esteban Neira Valero. *Diseñadores*
Diomedes Guilombo Ramírez, Edwin Hernando Cruz Delgado, Danilo Ramírez Parra, Juan Wiesner, Gisela Bohórquez. *Ilustradores*
Jairo Sanabria, Tulio Pizano, Ana María Restrepo, Pedro Felipe. *Fotógrafos*
Repositorio Santillana, Archivo Santillana, Getty images, Corel professional Photos, Images provided by Photodisc, Inc., Corbis Images, Archivo Santillana. *Fotografía*
Francisco Rey González. *Jefe de producción*

Debido a la naturaleza dinámica de la Internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web, a los que se hace referencia en este libro, pueden sufrir modificaciones o desaparecer. El uso de Internet debe ser supervisado por los padres de familia, tutores y docentes.

Carrera 11A No. 98-50
Bogotá, Colombia
ISBN 978-958-24-2267-7 Obra completa
ISBN 978-958-24-2268-4 Edición para el alumno
ISBN 978-958-24-2269-1 Edición para el docente

SANTILLANA

Este libro está elaborado de acuerdo con las normas ICONTEC NTC-4724 y NTC-4725 para textos escolares.
Depósito legal en trámite.
Impreso en Colombia por

Presentación del modelo

Proyecto **Los Caminos del Saber**

Es un **programa de educación** que te ofrece múltiples recursos, impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro.

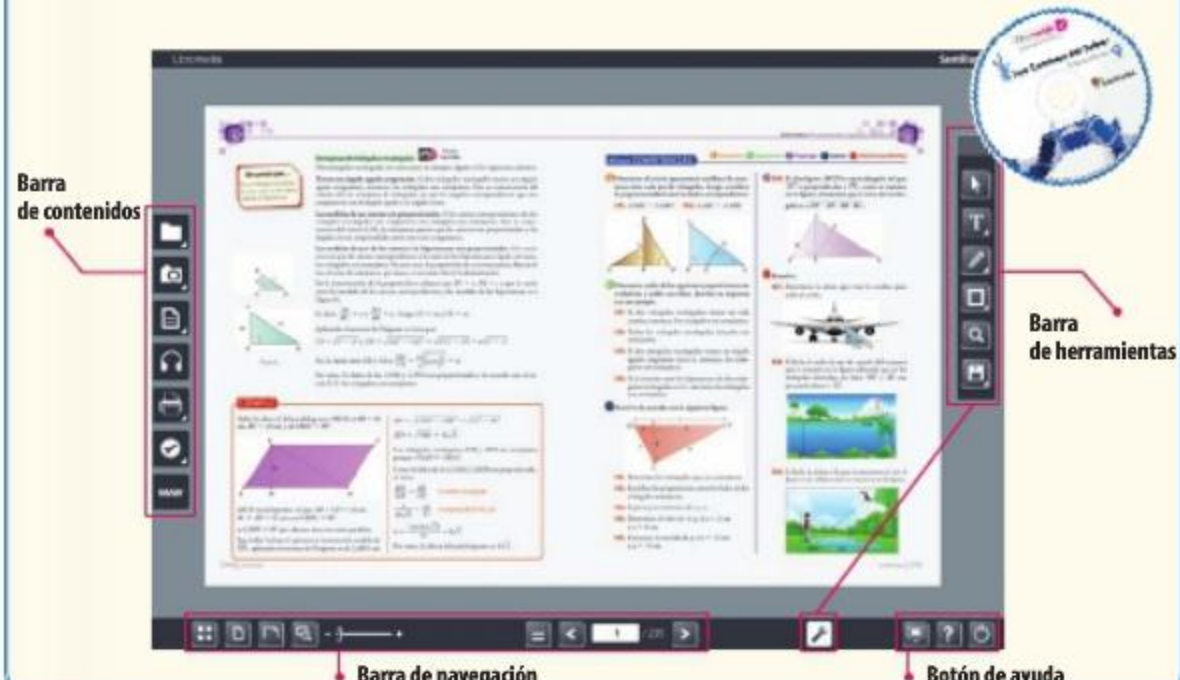
¿Qué te ofrece el programa para el área de Matemáticas?

Un libro del estudiante
que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de tus competencias.

Un sitio Web
www.santillanaplus.com.co con más recursos ***interactivos*** y ***multimedia*** que agregan valor a tu desarrollo escolar.

Un Libromedia en DVD, que:

- Contiene una amplia variedad de recursos digitales.
- Es fácil de manejar y no requiere conectividad.
- Se vincula a tu salón de clases y a tu hogar como una oportunidad para aumentar tu eficacia en el aprendizaje.



¿Cómo está organizado tu libro?

Para que juntos alcancemos las metas educativas que nos hemos propuesto, el programa de educación te ofrece un libro organizado en diez unidades y cada unidad se presenta así:

Página inicial

Al comienzo de cada unidad, encontrarás una doble página de apertura donde se presentan los temas que abordarás y los logros que vas a alcanzar. También se enumeran los contenidos y las actividades que desarrollarás en tu Libromedia, así como las evaluaciones que te ayudarán a afianzar tus conocimientos y competencias.

Tu plan de trabajo…
Presenta los temas y logros que vas a desarrollar en la unidad.

Encuentra en libromedia
Relaciona los objetos digitales y las evaluaciones que complementan tu libro.

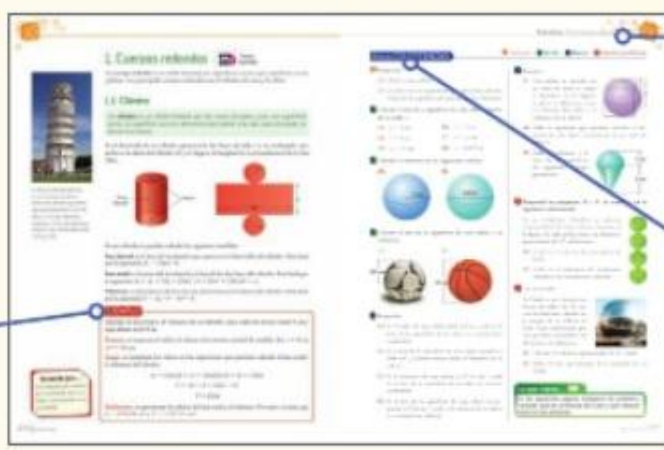
Cronología
Es una línea de tiempo que te muestra cómo ha sido estudiado un tema de la unidad, en diferentes épocas y lugares del mundo.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?
Es una lectura de motivación que te informa sobre una aplicación práctica del tema de la unidad.

Lo que sabes
Es una autoevaluación de conceptos que debes saber para que aprendas con mayor facilidad lo que se va a trabajar.

Desarrollo de temáticas

El desarrollo de los contenidos está acompañado de ejercicios y de situaciones en contexto, cuya solución se explica paso a paso. Además, encuentras actividades para desarrollar tus competencias.



Te indica el tipo de estándar o estándares que se trabajan en cada página.

Afianzo competencias
Son actividades para interpretar, argumentar y proponer. También para ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas.

Ejemplos
Son ejercicios de aplicación de la teoría que se está trabajando.

En el desarrollo de las temáticas también encuentras:

En estos recuadros encontrarás datos acerca de los acontecimientos históricos relacionados con la temática que se está trabajando.

Este cuadro te recuerda información clave para que puedas comprender mejor la teoría.

En esta sección encontrarás preguntas acerca de la teoría que se está trabajando.

En estos cuadros encuentras una pregunta acerca del tema siguiente para que te prepares para la próxima clase.

Al final de la unidad encuentras:

Ejercicios para repasar

Es una selección de actividades de cada tema, para que repases y respondas allí mismo.

Problemas para repasar

Te presenta un problema resuelto acerca de una de las temáticas de la unidad y algunos problemas para que apliques lo aprendido.

Secciones especiales

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
En ella podrás leer y analizar situaciones que tienen aplicación con la temática estudiada.

Trabaja con
En ella encuentras actividades para que trabajes los temas de la unidad en diferentes programas informáticos.

Hiperpágina
Doble página en la que se abordan los temas de una manera más visual con el propósito de facilitar su comprensión

CONTENIDOS

Pensamientos numérico y variacional

1 Números reales y expresiones algebraicas

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Conocer las **propiedades de las operaciones** entre los elementos de los diferentes **conjuntos numéricos**.
- Efectuar operaciones entre **expresiones algebraicas**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ Diagnóstica ✓ De desempeño

3 Multimedia	**1** Audios
1 Galerías	**4** Imprimibles
5 Actividades	**3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Halla la expresión decimal de los siguientes números. Luego, determina si la expresión es exacta, infinita periódica e infinita no periódica.

a. $\frac{13}{11}$ **b.** $\frac{7}{9}$ **c.** $\frac{2}{25}$ **d.** $\frac{103}{8}$

2. Realiza las siguientes operaciones.

a. $7^2 \times 8 + 9$ **c.** $(5 + 3)^2$

b. $\sqrt{6^2 - 11 \times 1} \div 5$ **d.** $\frac{\sqrt{4 \times 2^2}}{8}$

3. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $\frac{9}{11} - \frac{15}{11} - \frac{1}{11}$ **c.** $\frac{\frac{9}{5} - \frac{3}{4}}{6}$

b. $-\frac{5}{7} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3}$ **d.** $\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2} \times \frac{7}{4}\right)$

4. Simplifica las expresiones algebraicas.

a. $8n - \left(5 + \frac{2}{5}n - \frac{1}{3}\right)$ **b.** $5x - (3y - 9x) + 2x$

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber cuántas personas ven los programas de la televisión.

Cuando se quiere conocer el número de personas que observan un programa determinado de televisión se toma una medida denominada índice de audiencia o ***rating***. El índice de audiencia es la medida electrónica que indica la audiencia o sintonía de un canal de televisión regional, nacional e internacional; para medir el índice de audiencia se utiliza un aparato denominado **audímetro** o ***people meter***, que se conecta en los televisores y permite conocer la información, en tiempo real, del número de personas que están viendo televisión, cuánto tiempo permanecen viendo cada canal y cuánto tiempo está encendido el televisor.

Lee más acerca de este tema en la página 30.

Cronología de los números reales

8000 a. C. — **Mesopotamia**. Aparecen tablas de barro donde se evidencian símbolos primitivos para contar los bienes.

1850 a. C. — **Egipto**. Se encuentran en el papiro de Ahmes fracciones de tipo unitario $1/n$ utilizadas en esta época.

1700 a. C. — **Babilonia**. Aparecen las tablillas de la dinastía Hammurabi en las que se trabaja el sistema posicional extendido a las fracciones.

700 a. C. — **Grecia**. Los griegos descubren los números que no pueden ser expresados por medio de una fracción, es decir, los irracionales.

600 d. C. — **India**. Los indios crean la numeración actual y empiezan a utilizar los números negativos.

1600 — **Francia**. Descartes implementa la utilización de los números reales en cálculos de problemas lógicos como las sucesiones de Cauchy.

1900 — **Alemania**. George Cantor define los conceptos relacionados con sucesiones y, partiendo de ellos, define el concepto de número real.

1930 — **Austria**. Kurt Godel propone el teorema de incompletitud, en el cual afirma que si los axiomas de una teoría matemática formal capaz de describir los naturales y la aritmética no se contradicen entre sí, entonces, existen sentencias que no pueden probarse ni refutarse.

1. Conjuntos numéricos

Enlace web Recurso imprimible

Los **conjuntos numéricos** se crearon a partir de necesidades específicas. Así, los números naturales surgieron de la necesidad de contar, los enteros se utilizan desde la Antigüedad para indicar deudas y ganancias, los racionales permiten representar partes de un todo y los irracionales sirven para expresar la medida de ciertos elementos como la diagonal de un cuadrado.

1.1 Números naturales

El conjunto de los **números naturales** se simboliza con $\mathbb{N}$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Los números naturales se representan en la recta numérica de la siguiente manera:

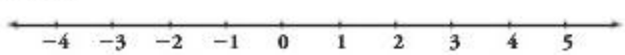
El conjunto de los números naturales es cerrado para la adición y para la multiplicación, es decir, si se elige cualquier par de números naturales y se suman o se multiplican, el resultado siempre será un número natural. En cambio, la sustracción no es una operación cerrada en $\mathbb{N}$, porque la diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural. Por ejemplo, $15 - 20$ da como resultado -5 que es un número que no pertenece a los naturales.

1.2 Números enteros

El conjunto de los **números enteros** se simboliza con $\mathbb{Z}$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Los números enteros son una extensión de los números naturales y se representan en la recta numérica así:



El conjunto de los números enteros está conformado por:

- Los enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.
- Los enteros negativos: $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$.
- El número cero: $\{0\}$.

Por tanto, se tiene que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

El conjunto de los números enteros es cerrado para la adición, la resta y la multiplicación. La división no es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$, ya que el cociente de dos números enteros no siempre es un número entero. Por ejemplo, el cociente de $1 \div 2$ es 0,5 que es un número que no pertenece a los enteros.

Historia de las matemáticas

El cero y los números naturales

Históricamente la formalización de los números naturales se presenta a partir de dos propuestas: los axiomas de Peano y la teoría de conjuntos.

Según Guissepe Peano (1858-1932), el cero no debe incluirse en los números naturales. Sin embargo, en teoría de conjuntos sí se incluye.

Actualmente es recomendable incluir el cero en el conjunto de los números naturales cuando se estudia el sistema numérico decimal.

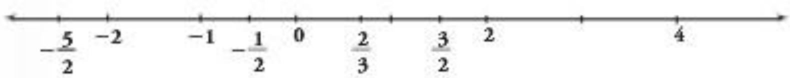
1.3 Números racionales

Actividad

El conjunto de los **números racionales** se simboliza con $\mathbb{Q}$ y se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Los números racionales se pueden expresar como números decimales exactos o como números decimales periódicos. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se puede expresar como 0,75 y $\frac{1}{3}$ como $0,\overline{3}$. Los números racionales se representan en la recta numérica así:



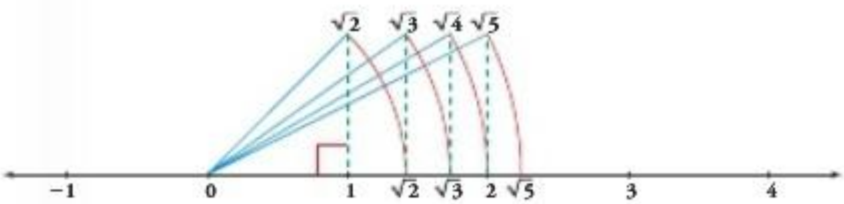
1.4 Números irracionales

Actividad

El conjunto de los **números irracionales** se simboliza con $\mathbb{I}$ y está formado por todos los números decimales infinitos no periódicos.

La representación decimal de un número irracional tiene infinitas cifras no periódicas. Por ejemplo, el número π es igual a 3,141592653589793…

Al ubicar los números racionales en la recta numérica, quedan puntos en la recta sin ocupar; estos puntos corresponden a los números irracionales. Los números irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ se representan en la recta numérica a partir de triángulos rectángulos, aplicando el teorema de Pitágoras así:



Matemáticamente

¿Un número real puede ser al mismo tiempo racional e irracional? ¿Por qué?

1.5 Números reales

Ampliación multimedia

Recurso imprimible

El conjunto de los **números reales** se simboliza con $\mathbb{R}$ y es la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$). Es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

El conjunto de los números reales es denso, esto significa que entre dos números reales siempre existe otro número real.

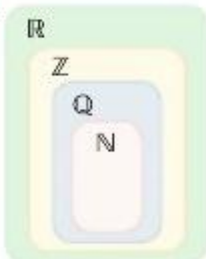
Al ubicar los números en la recta numérica, se establece una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta numérica, de tal forma que a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde solamente un punto de la recta numérica. Por esta razón, a la recta numérica se le denomina **recta real**.

Afianzo COMPETENCIAS

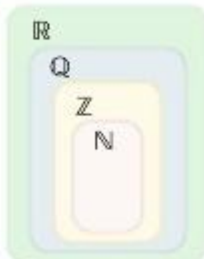
Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Determina si cada uno de los siguientes diagramas representa de manera correcta la relación entre los conjuntos numéricos.

1.



2.



Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

3. Todo número entero es un número natural.
4. Todo número natural es un número entero.
5. Algunos números racionales son números enteros.
6. Algunos números racionales son números irracionales.

Escribe, si es posible, un número que cumpla cada condición.

7. Entero no natural.
8. Natural no entero.
9. Racional no natural.
10. Racional no entero.
11. Real no racional.
12. Irracional no real.

Representa en una recta numérica cada conjunto de números.

13. $B = \left\{-3, \frac{3}{4}, -0{,}8, 6, -\frac{5}{2}, 4, -1{,}5, 2\right\}$
14. $C = \left\{\frac{5}{6}, -0{,}7, 5, -10, 8, \frac{1}{3}, 0{,}4, -0{,}25\right\}$
15. $D = \left\{\sqrt{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -1{,}6, \frac{4}{5}, -0{,}8\right\}$

Ordena los siguientes números de menor a mayor.

16. $13, -2, -9, 0, 9, 12, 4, 11, -1, 7, -7, 8$
17. $-2, -0{,}5, -3, -10, 8, 0, -8, 3{,}1, 3{,}15, -5{,}10$
18. $\frac{2}{3}, -9, 5{,}2, -1{,}3, -3{,}7, -\frac{7}{9}, 1{,}8, 0{,}6$
19. $\sqrt{2}, 1{,}4, -1{,}8, -\sqrt{3}, \frac{3}{5}$
20. $\sqrt{5}, 2{,}5, 2, 1{,}8, -1, -1{,}2, -\frac{4}{3}$

Efectúa las siguientes operaciones. Luego, clasifica el resultado en entero positivo, entero negativo o cero.

21. $6 - 10 - 3 - 46 + 30$
22. $(-42) + 35 + (-50) + 12 + 76$
23. $5(-4 - 2) + 6(17 - 12)$

Determina si la raíz cuadrada de cada número es racional o irracional.

24. $\sqrt{36}$
25. $-\sqrt{122}$
26. $\sqrt{\frac{9}{16}}$
27. $-\sqrt{169}$
28. $\sqrt{50}$
29. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

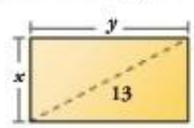
Clasifica el resultado de cada operación en decimal exacto o decimal periódico.

30. $\frac{5}{3} - \frac{8}{6}$
31. $6 \div \left(-\frac{4}{3}\right)$
32. $-\frac{4}{3} \div \left(-1 + \frac{7}{9}\right)$
33. $-\frac{13}{3} \times \left(-\frac{7}{3} + \frac{10}{3}\right)$

En un trayecto, la velocidad x de un automóvil varió de 0 a 80 kilómetros por hora. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

34. La velocidad del automóvil es un número x tal que $0 \leq x \leq 80$ y $x \notin \mathbb{I}$.
35. La velocidad del automóvil pudo ser $50\sqrt{3}$ kilómetros por hora.
36. Si en una parte del trayecto la velocidad del automóvil fue $y\sqrt{2}$, entonces, se cumple la desigualdad $0 \leq y \leq 40\sqrt{2}$.

Observa el siguiente rectángulo. Luego, resuelve.



37. Determina el valor de x y de y, si $x, y \in \mathbb{Z}$.
38. Determina posibles valores de x y de y, teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{I}$.

Lo que viene...

A continuación, vas a trabajar las expresiones algebraicas, averigua cómo se clasifican los polinomios y escribe un ejemplo de cada uno.

2. Expresiones algebraicas

Ampliación multimedia · Actividad

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y variables mediante operaciones aritméticas. En una expresión algebraica las **variables** son letras que representan cualquier número de un determinado conjunto numérico. Por ejemplo, las letras x, y y z pueden ser variables que representan cualquier número real y la expresión $3x - 2y + z$ es una expresión algebraica que relaciona estas variables.

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. En general, la suma o resta de dos o más monomios se denomina polinomio. Formalmente un polinomio se define de la siguiente manera:

Un **polinomio** de variable x es una expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots + a_1x + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ son números reales y n es un número entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces, el polinomio es de **grado** n.

A los monomios de la forma a_kx^k que conforman un polinomio se les denomina términos. Si un polinomio tiene dos términos se le denomina **binomio** y si tiene tres términos se le denomina **trinomio**. Por ejemplo, $4x^3 + 2x^2 - 6$ es un trinomio de grado tres.

Los **términos semejantes** de un polinomio son aquellos que tienen las mismas variables elevadas a las mismas potencias. Por ejemplo, en el polinomio $-7x^2y + 3xy^2 + 5x^2y$, únicamente son semejantes los términos $-7x^2y$ y $5x^2y$.

2.1 Adición de polinomios

Actividad

Para sumar dos o más polinomios se reducen términos semejantes. Por ejemplo, para sumar $-10mn^2 + 7m^2n + 6$ y $21m^2n - 8mn^2 - 15$, se realizan los siguientes pasos:

$(-10mn^2 + 7m^2n + 6) + (21m^2n - 8mn^2 - 15)$ Se indica la adición.

$= (-10mn^2 - 8mn^2) + (7m^2n + 21m^2n) + (6 - 15)$ Se agrupan términos semejantes.

$= -18mn^2 + 28m^2n - 9$ Se reducen términos semejantes.

2.2 Sustracción de polinomios

Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Por ejemplo, para restarle el polinomio $-y^2x + \frac{3}{4}x - 6x^2y$ al polinomio $\frac{1}{3}x^3y^2 + 5x^2y + \frac{1}{2}x$, se realizan los siguientes pasos:

$\left(\frac{1}{3}x^3y^2 + 5x^2y + \frac{1}{2}x\right) - \left(-y^2x + \frac{3}{4}x - 6x^2y\right)$ Se indica la sustracción.

$= \left(\frac{1}{3}x^3y^2 + 5x^2y + \frac{1}{2}x\right) + \left(y^2x - \frac{3}{4}x + 6x^2y\right)$ Se suma el opuesto del sustraendo.

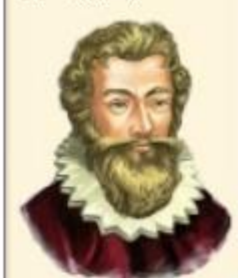
$= \frac{1}{3}x^3y^2 + y^2x + (6x^2y + 5x^2y) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x\right)$ Se agrupan términos semejantes.

$= \frac{1}{3}x^3y^2 + y^2x + 11x^2y - \frac{1}{4}x$ Se reducen términos semejantes.

Historia de las matemáticas

Expresiones algebraicas en la Antigüedad

Hacia 1700 a. C. los babilonios planteaban expresiones algebraicas en forma verbal. Luego, a partir de Diofanto (250 d. C.) hasta comienzos del siglo XVI, se utilizaron abreviaturas. Por ejemplo, el matemático francés François Viète (1540-1603) escribía polinomios tales como $6x^2 - 7x + 4$ de la forma $6Q - 7N + 4$.



2.3 Multiplicación de polinomios

> **Recuerda que…**
> Cuando se multiplican o dividen monomios de igual signo el resultado es positivo y cuando se multiplican o dividen monomios de diferente signo el resultado es negativo.

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y las partes literales, teniendo en cuenta que, al multiplicar potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. Por ejemplo, al multiplicar $3x^2y^7z$ por $-2xy^3z$ el producto es $-6x^3y^{10}z^2$.

Cuando se multiplican dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio.

2.4 División de polinomios

Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes y las partes literales teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación. Por ejemplo, al dividir $-16p^6q^5$ entre $-2p^4q^2$ el cociente es $8p^2q^3$.

La división de un polinomio entre otro polinomio, se realiza de forma similar a la división entre números enteros.

EJEMPLOS

1. Multiplicar el monomio $5x$ con el polinomio $-x^3 + 3x^2 - 4x + 10$.

Primero, se aplica la propiedad distributiva.

$5x \cdot (-x^3 + 3x^2 - 4x + 10)$

$= 5x \cdot (-x^3) + 5x \cdot (3x^2) + 5x \cdot (-4x) + 5x \cdot (10)$

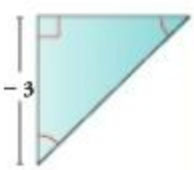
Luego, se efectúan las multiplicaciones aplicando las propiedades de la potenciación.

$-5x^{1+3} + 15x^{1+2} - 20x^{1+1} + 50x$

Finalmente, se suman los exponentes.

$-5x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 50x$

2. Hallar una expresión algebraica que represente el área del siguiente triángulo rectángulo isósceles.



$2x^2 - 3$

El área del triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura. Para hallar la expresión algebraica que representa el área del triángulo se realizan los siguientes pasos:

$A = \dfrac{(2x^2 - 3)(2x^2 - 3)}{2}$ Se plantea la expresión algebraica.

$= \dfrac{2x^2(2x^2 - 3) - 3(2x^2 - 3)}{2}$

$= \dfrac{4x^4 - 6x^2 - 6x^2 + 9}{2}$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= 2x^4 - 6x^2 + \dfrac{9}{2}$ Se simplifica.

Por tanto, la expresión que representa el área del triángulo es $2x^4 - 6x^2 + \frac{9}{2}$.

3. Dividir $4b^2 + 7ab + 6a^2 - 8$ entre $2a + b$.

Primero, se ubican el dividendo y el divisor ordenándolos en forma descendente con respecto a una de las variables.

Segundo, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para hallar el primer término del cociente.

$$\begin{array}{r|l} 6a^2 + 7ab + 4b^2 - 8 & 2a + b \\ \cline{2-2} & 3a \end{array}$$

Tercero, se multiplica el primer término del cociente por cada término de divisor y el resultado se le resta al dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 6a^2 + 7ab + 4b^2 - 8 & 2a + b \\ \cline{2-2} -6a^2 - 3ab \qquad\qquad & 3a \\ \hline 4ab \qquad\qquad & \end{array}$$

Luego, se realiza el mismo procedimiento hasta que el residuo tenga un grado menor que el divisor.

$$\begin{array}{r|l} 6a^2 + 7ab + 4b^2 - 8 & 2a + b \\ \cline{2-2} -6a^2 - 3ab \qquad\qquad & 3a + 2b \\ \hline 4ab + 4b^2 - 8 & \\ -4ab - 2b^2 \qquad & \\ \hline 2b^2 - 8 & \end{array}$$

Finalmente, se concluye que el cociente de la división es $3a + 2b$ y el residuo es $2b^2 - 8$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

39. ¿Qué es el grado de un polinomio?

40. ¿Cuándo dos o más términos son semejantes?

41. ¿Cómo se llaman los polinomios que tienen dos términos?

42. ¿Cuál es el signo del producto de dos monomios que tienen diferente signo?

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Explica tu respuesta.

43. El polinomio $7x^2 - 3x + 2$ es de grado 7.

44. Todo binomio es polinomio.

45. Algunos trinomios son monomios.

46. La expresión $-5x^{\frac{1}{2}}$ no es un monomio.

Indica el término que no es semejante en cada caso.

47. $-t^2ks;\ kt^2s;\ -skt^2;\ -tk^2s$

48. $2m^3n^2p;\ -mn^2p^3;\ -pm^3n^2;\ 5n^2pm^3$

49. $-abc^3;\ c^3ba;\ -ac^3b;\ b^3ca$

50. $\sqrt{5}\,xz^2y;\ \sqrt{3}\,y^2xz;\ -4zy^2x;\ -\sqrt{2}\,xy^2z$

51. $\frac{1}{3}st^4v^3;\ -3t^3s^4v;\ -5v^3st^4;\ \frac{1}{5}sv^3t^4$

Realiza las operaciones indicadas.

52. $(k - m) + (2k - n) + (n + 2m) + (m - k)$

53. $(xy + xz - 2yz) + (-2xy + 3xz - yz)$

54. $(1{,}8x^2 - 3{,}7x + 2{,}9) + (-2{,}4 - 1{,}8x + 0{,}9)$

55. $\left(3x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + (-x^2 + 9)$

56. $(2a + 3b) - (2a - b)$

57. $(5p^2 + 2pq) - (p^2 - pq)$

58. $(18 - x^2) - (6x^3 + 2x^2 + 2 + 1)$

59. $\left(-x + \frac{1}{5} - x^3\right) - \left(\frac{1}{2}x - x^3 - \frac{4}{5}\right)$

60. $(7x^2y)(6y^2c)(4ac^2)$

61. $(x^2 - 5x + 1)(3x^2 + 2)$

62. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\right)$

63. $(k^3 + 3k^2 - k)(k^3 + 3k^2 + k)$

64. $(-12a^3b^2c) \div (3abc)$

65. $(6x^4y - 9x^2y^2 + 12x^2y^2 - 6xy^4) \div (3xy)$

66. $\left(\frac{1}{3}x^2 + 7x - 7\right) \div (-x + 1)$

67. $(a^4 + 11a^2 - 12a - 5a^3) \div (-3a + 3 + a^2)$

Resuelve.

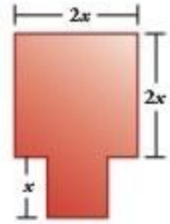
68. La suma de dos polinomios es $-2x^2 + 4xy$. Si uno de los polinomios es $3x - 4x^2 + y^2$, ¿cuál es el otro polinomio?

69. El producto de dos binomios es $3x^2 + 10x - 8$. Si uno de los binomios es $x + 4$, ¿cuál es el otro binomio?

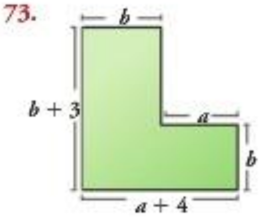
70. El cociente de dos polinomios es $x^2 + 3x + 3$. Si el divisor es $x + 1$ y el residuo es -2, ¿cuál es el dividendo?

Halla una expresión algebraica que represente el perímetro y otra que represente el área de cada figura.

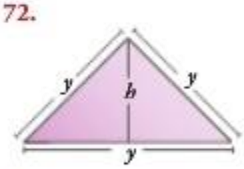
71.



73.



72.



74.

Lee y resuelve.

Un avión está dividido en tres clases: primera clase, clase ejecutiva y clase turista. La cantidad de pasajeros de primera clase es la mitad de los de la clase ejecutiva y un sexto de los de clase turista.

75. Si n es el número de pasajeros de primera clase, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la cantidad total de pasajeros?

76. Si en el avión hay 36 pasajeros en clase ejecutiva, ¿cuántos pasajeros hay en primera clase y cuántos en clase turista?

2.5 Productos y cocientes notables

Actividad

Los productos y cocientes notables son generalmente de multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

Los **productos notables** resultan de generalizar ciertos casos de multiplicación entre polinomios.

Los **cocientes notables** son divisiones exactas entre polinomios que no se necesitan efectuar para hallar sus cocientes.

Los productos y cocientes notables que más se utilizan se presentan en el siguiente cuadro:

Productos notables	Cocientes notables
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$\dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	$\dfrac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\dfrac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	$\dfrac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - ax + a^2$
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	

En general, para $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que:

- $x^n - a^n$ siempre es divisible entre $x - a$.
- $x^n - a^n$ es divisible entre $x + a$ cuando n es par.
- $x^n + a^n$ es divisible entre $x + a$ cuando n es impar.
- $x^n + a^n$ nunca es divisible entre $x - a$.

EJEMPLOS

1. Calcula los siguientes productos notables.

a. $\left(3x - \dfrac{y}{5}\right)^2$

Primero, se aplica el producto notable de un binomio cuadrado.

$$\left(3x - \frac{y}{5}\right)^2 = (3x)^2 - 2(3x)\left(\frac{y}{5}\right) + \left(\frac{y}{5}\right)^2$$

Luego, se simplifica cada término del polinomio resultante.

$$\left(3x - \frac{y}{5}\right)^2 = 9x^2 - \frac{6}{5}xy + \frac{y^2}{25}$$

Por tanto, se tiene que el producto de $\left(3x - \dfrac{y}{5}\right)$ por $\left(3x - \dfrac{y}{5}\right)$ es igual a $9x^2 - \dfrac{6}{5}xy + \dfrac{y^2}{25}$.

b. $\left(\dfrac{1}{2}s - 3t\right)\left(\dfrac{1}{2}s + 3t\right)$

Primero, se establece a qué tipo de producto notable corresponde la multiplicación. Como la multiplicación es de la forma $(a + b)(a - b)$, el producto es de la forma $a^2 - b^2$.

Luego, se tiene que:

$$\left(\frac{1}{2}s - 3t\right)\left(\frac{1}{2}s + 3t\right) = \left(\frac{1}{2}s\right)^2 - (3t)^2$$

Finalmente, se simplifican los términos del producto, con lo cual se obtiene que:

$$\left(\frac{1}{2}s - 3t\right)\left(\frac{1}{2}s + 3t\right) = \frac{1}{4}s^2 - 9t^2$$

De donde se deduce que el producto es una diferencia de cuadrados.

2. Calcula los siguientes cocientes notables.

a. $\dfrac{27m^3 - n^3}{3m - n}$

Primero, se establece qué tipo de división es. Como es una división de la forma $\dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ el cociente es de la forma $(x^2 + ax + a^2)$.

Luego, se tiene que:

$$\frac{27m^3 - n^3}{3m - n} = (3m)^2 + (3m)(n) + (n)^2$$

Finalmente, se simplifica:

$$\frac{27m^3 - n^3}{3m - n} = 9m^2 + 3mn + n^2$$

b. $\dfrac{625x^4y^6 - 169}{25x^2y^3 - 13}$

Primero, se establece qué tipo de división es. Como es una división de la forma $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ el cociente es de la forma $x + a$.

Luego, se tiene que:

$$\frac{625x^4y^6 - 169}{25x^2y^3 - 13} = 25x^2y^3 + 13$$

Finalmente, se puede comprobar que el producto de $25x^2y^2 + 13$ por $25x^2y^2 - 13$ es igual a $625x^4y^6 - 169$.

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Lee y resuelve.

77. Explica a qué tipo de división corresponde un cociente notable, si es exacta o inexacta. Justifica tu respuesta.

78. Escribe en palabras una regla para calcular el cuadrado de un binomio.

Calcula el cuadrado en cada caso.

79. $(m - n)^2$

80. $(2k - 3z)^2$

81. $\left(\frac{1}{3}n + 4\right)^2$

82. $(ab - 3a^2b^2)^2$

83. $(p - \sqrt{2})^2$

84. $\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{3}\right)^2$

85. $(5t + 2n)^2$

86. $(2 + 7uy^2)^2$

87. $\left(7 + \frac{1}{10}y\right)^2$

88. $(14y - 3t)^2$

89. $(5m + 3\sqrt{2})^2$

90. $\left(\frac{2}{5}y + \frac{w}{4}\right)^2$

Determina el resultado de los siguientes binomios al cubo.

91. $(1 + z)^3$

92. $(x^2 - y^2)^3$

93. $\left(2 - \frac{1}{p}\right)^3$

94. $\left(\frac{1}{3}xy + 2\right)^3$

95. $(mn - 5n)^3$

96. $(a^2b + k)^3$

97. $\left(3k - \frac{1}{5}z\right)^3$

98. $\left(6h^2 + \frac{1}{4}k\right)^3$

Realiza cada división aplicando los cocientes notables.

99. $\dfrac{m^2 - n^2}{m + n}$

100. $\dfrac{y^2 - 169}{y + 13}$

101. $\dfrac{16a^2 - 49b^2}{4a - 7b}$

102. $\dfrac{27 - r^3}{3 - r}$

103. $\dfrac{p^3 + q^3}{p + q}$

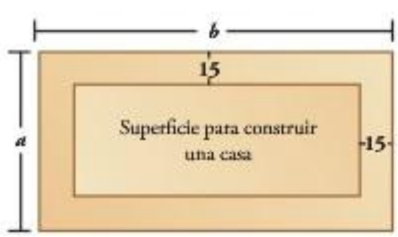
104. $\dfrac{512m^3n^6 + 8n^3m^9}{8mn^2 + 2nm^3}$

105. Responde.

La expresión que representa la medida del lado de un cuadrado es $3x + 2y$. ¿Cuál es la expresión que representa el área del cuadrado?

106. Resuelve.

Para construir una maqueta se utilizó la siguiente pieza rectangular de cartón paja.



¿Cuál es la expresión que permite calcular el área de la superficie en la que se va a construir la casa?

3. Factorización

Enlace web · Recurso imprimible

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de factores primos que son polinomios diferentes a él.

Por ejemplo, $x^2 - 5x - 24$ se puede expresar como el producto de $x - 8$ y $x + 3$. Así, $x^2 - 5x - 24 = (x - 8)(x + 3)$.

Recuerda que...

En la factorización de un polinomio, se aplica uno o varios casos.

La expresión $a^2 + b^2$ no es factorizable en $\mathbb{R}$.

Fórmulas de factorización de polinomios	
Factor común	$ax + bx = x(a + b)$
Factor común por agrupación de términos	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomio cuadrado perfecto	$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$	$x^{2n} + bx^n + c = (x^n + M)(x^n + m)$ donde $b = M + m$; $c = M \times m$.
Trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$	$ax^{2n} + bx^n + c = (px^n + r)(qx^n + s)$ donde $a = p \times q$, $b = ps + rq$ y $c = r \times s$.
Cubo perfecto	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$

Para factorizar un polinomio de la manera adecuada, es necesario analizar sus características. A continuación se muestran algunos puntos importantes que se deben tener en cuenta:

- Si el polinomio tiene factor común, se factoriza por este caso de factorización.
- Si es un binomio, se verifica si es diferencia de cuadrados, o suma o diferencia de cubos y se realiza la respectiva factorización según el caso.
- Si es un trinomio, se determina si es trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ o de la forma $ax^2 + bx + c$ y se realiza la factorización respectiva.
- Si el polinomio tiene cuatro términos, se verifica si se puede factorizar por agrupación de términos o si es un cubo perfecto.
- Si el polinomio tiene más de cuatro términos, se verifica si se puede realizar factorización por agrupación de términos.

EJEMPLOS

Factorizar.

a. $2x^3 + x^2y - 6x - 3y$

Se factoriza por agrupación de términos.

$(2x^3 + x^2y) + (-6x - 3y)$ Se agrupan los términos.

$x^2(2x + y) - 3(2x + y)$ Se aplica factor común.

$(2x + y)(x^2 - 3)$ Se factoriza.

Así, $2x^3 + x^2y - 6x - 3y = (2x + y)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

b. $81a^4 - 16b^4$

Se factoriza por diferencia de cuadrados.

$(9a^2 + 4b^2)(9a^2 - 4b^2)$ Se aplica diferencia de cuadrados.

$(9a^2 + 4b^2)(3a + 2b)(3a - 2b)$ Se aplica diferencia de cuadrados.

Luego, $81a^4 - 16b^4 = (9a^2 + 4b^2)(3a + 2b)(3a - 2b)$.

c. $3m^2 + 42m + 147$

Se factoriza por factor común y por trinomio cuadrado perfecto.

$= 3(m^2 + 14m + 49)$ Se aplica factor común.

$= 3(m + 7)^2$ Se aplica trinomio cuadrado perfecto.

Por tanto, $3m^2 + 42m + 147 = 3(m + 7)^2$.

d. $105a^2b^2 - 111a^2b - 18a^2$

Se factoriza por factor común y por trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

$= 3a^2(35b^2 - 37b - 6)$ Se aplica factor común.

$= 3a^2(7b + 1)(5b - 6)$ Se aplica factorización trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

Así, $105a^2b^2 - 111a^2b - 18a^2 = 3a^2(7b + 1)(5b - 6)$.

e. $\dfrac{x^5y}{3} - 72x^2y^4$

Se factoriza por factor común y por diferencia de cubos.

$= \dfrac{x^2y}{3}(x^3 - 216y^3)$ Se aplica factor común.

$= \dfrac{x^2y}{3}(x - 6y)(x^2 + 6xy + 36y^2)$ Se aplica diferencia de cubos.

Así, $\dfrac{x^5y}{3} - 72x^2y^4 = \dfrac{x^2y}{3}(x - 6y)(x^2 + 6xy + 36y^2)$.

f. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 20x - 4x^2 - 24$

Se factoriza primero por agrupación de términos. Luego, se aplica trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ y diferencia de cuadrados.

$= (x^4 - 5x^3 + 6x^2) - (4x^2 - 20x + 24)$ Se agrupan los términos.

$= (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4)$ Se aplica factor por agrupación de términos.

$= (x - 3)(x - 2)(x^2 - 4)$ Se aplica factorización trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

$= (x - 3)(x - 2)(x + 2)(x - 2)$ Se aplica diferencia de cuadrados.

Por tanto, $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 20x - 4x^2 - 24 = (x - 3)(x - 2)(x + 2)(x - 2)$.

g. $16a^4 - 40a^2b^3 + 25b^6 - 121c^8$

Se factoriza por trinomio cuadrado perfecto y por diferencia de cuadrados.

$= (16a^4 - 40a^2b^3 + 25b^6) - 121c^8$ Se agrupan los términos.

$= (4a^2 - 5b^3)^2 - 121c^8$ Se aplica trinomio cuadrado perfecto.

$= [(4a^2 - 5b^3) + 11c^4][(4a^2 - 5b^3) - 11c^4]$ Se aplica diferencia de cuadrados.

$= (4a^2 - 5b^3 + 11c^4)(4a^2 - 5b^3 - 11c^4)$ Se elimina el signo de agrupación.

Así, $16a^4 - 40a^2b^3 + 25b^6 - 121c^8 = (4a^2 - 5b^3 + 11c^4)(4a^2 - 5b^3 - 11c^4)$.

h. $12x^{4a} - 7x^{2a} - 45$

Se factoriza por trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ y por diferencia de cuadrados.

$= (4x^{2a} - 9)(3x^{2a} + 5)$ Se aplica factorización trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

$= (2x^a + 3)(2x^a - 3)(3x^{2a} + 5)$ Se aplica diferencia de cuadrados.

Luego, $12x^{4a} - 7x^{2a} - 45 = (2x^a + 3)(2x^a - 3)(3x^{2a} + 5)$.

Matemáticamente

¿Es posible descomponer en factores la suma de cuadrados, como por ejemplo, $x^4 + 4$? ¿Por qué?

4. Fracciones algebraicas

Recuerda que...

Una fracción algebraica se llama irreducible cuando no hay factores comunes entre el numerador y el denominador.

En caso contrario, la fracción se denomina reducible.

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos polinomios, donde el divisor es diferente de cero.

Por ejemplo, $\frac{15x^2y^3}{3x^3y^2}$, $\frac{3x^2+x+1}{2x^4+7}$ y $\frac{2-q+5q^3}{q+10}$ son fracciones algebraicas.

4.1 Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar una fracción significa transformarla de fracción reducible a fracción irreducible. Mediante la factorización de polinomios se simplifican los factores comunes.

EJEMPLOS

Simplificar cada fracción algebraica.

a. $\frac{15x^2y^3}{21x^3y^2}$

$\frac{15x^2y^3}{21x^3y^2} = \frac{5x^2y^3}{7x^3y^2}$ Se simplifica por 3.

$= \frac{5}{7}x^{2-3}y^{3-2}$ Se aplica cociente de potencias de igual base.

$= \frac{5}{7}x^{-1}y^{1}$ Se realizan las restas.

$= \frac{5y}{7x}$ Se expresa el resultado con exponentes positivos.

Así, $\frac{15x^2y^3}{21x^3y^2} = \frac{5y}{7x}$

b. $\frac{x^3+x^2-6x}{x^3+3x^2}$

$\frac{x^3+x^2-6x}{x^3+3x^2} = \frac{x(x^2+x-6)}{x^2(x+3)}$ Se extrae factor común.

$= \frac{x(x+3)(x-2)}{x^2(x+3)}$ Se factoriza por trinomio x^2+bx+c.

$= \frac{x-2}{x}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{x^3+x^2-6x}{x^3+3x^2} = \frac{x-2}{x}$.

c. $\frac{2a^3-16}{a^2-4}$

$\frac{2a^3-16}{a^2-4} = \frac{2(a^3-8)}{(a+2)(a-2)}$ Se aplica factor común y diferencia de cuadrados.

$= \frac{2(a-2)(a^2+2a+4)}{(a+2)(a-2)}$ Se aplica diferencia de cubos.

$= \frac{2(a^2+2a+4)}{a+2}$ Se simplifica.

Así, $\frac{2a^3-16}{a^2-4} = \frac{2(a^2+2a+4)}{a+2}$.

d. $\frac{x^2-9x+8}{2x^2-x-1}$

$\frac{x^2-9x+8}{2x^2-x-1} = \frac{(x-8)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$ Se factorizan el numerador y el denominador.

$= \frac{x-8}{2x+1}$ Se simplifica.

Así, $\frac{x^2-9x+8}{2x^2-x-1} = \frac{x-8}{2x+1}$.

e. $\frac{10a^2+15ab}{90a^2b^2-40a^4}$

$\frac{10a^2+15ab}{90a^2b^2-40a^4} = \frac{5a(2a+3b)}{10a^2(9b^2-4a^2)}$ Se aplica factor común.

$= \frac{5a(2a+3b)}{10a^2(3b+2a)(3b-2a)}$ Se aplica diferencia de cuadrados.

$= \frac{1}{2a(3b-2a)}$ Se simplifica.

Así, $\frac{10a^2+15ab}{90a^2b^2-40a^4} = \frac{1}{2a(3b-2a)}$.

f. $\frac{x^2a^2-x^2b^2+3xb^2-3xa^2+4b^2-4a^2}{ax^2+bx^2+3ax+3bx-28a-28b}$

$\frac{x^2a^2-x^2b^2+3xb^2-3xa^2+4b^2-4a^2}{ax^2+bx^2+3ax+3bx-28a-28b}$

$= \frac{(x^2-3x-4)(a^2-b^2)}{(x^2+3x-28)(a+b)}$ Se factoriza por agrupación de términos.

$= \frac{(x-4)(x+1)(a+b)(a-b)}{(x+7)(x-4)(a+b)}$ Se factorizan el numerador y el denominador.

$= \frac{(x+1)(a-b)}{x+7}$ Se simplifica.

Así, $\frac{x^2a^2-x^2b^2+3xb^2-3xa^2+4b^2-4a^2}{ax^2+bx^2+3ax+3bx-28a-28b}$

$= \frac{(x+1)(a-b)}{x+7}$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Escribe dos ejemplos de cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

107. Polinomio factorizado.

108. Polinomio sin factorizar.

109. Fracción reducible.

110. Fracción irreducible.

Indica cuál caso de factorización se debe aplicar en cada caso. Luego, factoriza el polinomio.

111. $20m^3n^2 + 40m^2n^3$

112. $r^2 - 36$

113. $x^3 + 8y^3$

114. $9p^2 - 12p + 4$

115. $ab + mn + mb + an$

116. $7x^2y^3 - 14x^3$

117. $p^2 - \frac{1}{144}$

118. $8z^3 + 64u^3$

119. $4m^2 - 5m + 1$

120. $16q^2 + 40q + 25$

121. $x^2yz + x^2y^2 + x^3y$

122. $27 + z^3$

123. $-9 - 3q + 2q^2$

124. $169m^2 - 196$

125. $u^3 - 343$

126. $5y^2 - 3y - 14$

127. $x^3 + \frac{1}{64}$

128. $a^2bc + ab^2c + abc^2$

129. $6x^2 - 17x - 3$

130. $abx^2 - xba - 2ab$

Simplifica las siguientes fracciones.

131. $\frac{3w^2}{9w^3z}$

132. $\frac{6m^3n^4}{12m^4n^5}$

133. $\frac{2xy}{4x^2y + 4x^4}$

134. $\frac{x^3y^2 - y^3x}{x^2y^2 + x^3y}$

135. $\frac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^3 - x}$

136. $\frac{3p^3 - 6p - 3p^2}{2p^3 + p + 6p^2}$

137. $\frac{4mn}{m^2n - mn^2}$

138. $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

139. $\frac{s^2 - 11s + 30}{s^2 - 25}$

140. $\frac{h^2 - 6h - 16}{4h^2 - 16}$

141. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$

142. $\frac{y + 4b}{y^2 - 16b^2}$

143. $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25}$

144. $\frac{1 - b^2}{b^3 + 1}$

145. $\frac{m^2 - 3m - 18}{2m^2 + 5m + 3}$

146. $\frac{q^3 + 7q^2 + 12q}{q^4 - 2q^3 - 15q^2}$

Completa cada una de las siguientes fracciones algebraicas.

147. $\frac{12m^{24}n^{24}}{\boxed{}} = 3m^8n^{16}$

148. $\frac{\boxed{}}{5xy^3z^2} = -125x^4yz^2$

149. $\frac{a^2 - 7a + 6}{\boxed{}} = \frac{1}{3a}$

150. $\frac{\boxed{}}{y^2 - 1} = \frac{y^2 + 1}{y + 1}$

151. $\frac{4q^2 - 4q + 1}{\boxed{}} = \frac{2q - 1}{2q + 1}$

Determina los valores de *a*, *b* y *c* que hacen verdadera cada igualdad.

152. $(3m - b)(am - 2) = 6m^2 - cm + 2$

153. $(a + bz^2)^3 = 1 + 9z^2 + 27z^4 + cz^6$

Responde.

154. El área de un rectángulo es $2x^2 + 7x + 3$. ¿Cuáles son las expresiones que representan las medidas del ancho y del largo?

155. El área de un círculo viene dada por
$$4\pi m^2 + 12\pi mn^2 + 9n^4\pi.$$
¿Cuál es el valor de su radio?

156. El volumen de un paralelepípedo está dado por la expresión $128xy^3 + 54x$. ¿Cuáles son las expresiones que representan las dimensiones del paralelepípedo?

Lee y resuelve.

El costo de un artículo está dado por la expresión

$$C(x) = \frac{x^2 + 15.998x - 32.000}{x - 2}.$$

Donde x es la cantidad de artículos.

157. Simplifica la expresión que representa el costo del artículo.

158. Determina el costo de 10 artículos.

4.2 Operaciones con fracciones algebraicas

Ampliación multimedia

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas se deben tener en cuenta dos casos:

Caso 1. Las fracciones tienen el mismo denominador.

Para sumar o restar fracciones algebraicas con igual denominador se suman o se restan los numeradores y se deja el denominador común. Luego, si es posible, se simplifica el resultado.

Caso 2. Las fracciones tienen diferente denominador.

Para sumar o restar fracciones algebraicas con diferente denominador, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se halla el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.
- **Luego,** se complifican las fracciones de tal forma que el denominador de cada fracción sea igual al mcm de los denominadores.
- **Finalmente,** se suman los numeradores y se deja el denominador común.

EJEMPLOS

1. Realizar la siguiente adición:

$$\frac{6m-n}{5n}+\frac{2m-7n}{5n}+\frac{23n-8m}{5n}$$

Primero, se identifica si las fracciones tienen igual o diferente denominador.

Como el denominador de las fracciones es $5n$, se deja el mismo denominador y se plantea la suma de los numeradores.

$$\frac{(6m-n)+(2m-7n)+(23n-8m)}{5n}$$

Luego, se agrupan los términos semejantes en el numerador.

Así, $6m$, $2m$ y $-8m$ son términos semejantes al igual que $23n$, $-7n$ y $-n$ son términos semejantes.

$$\frac{(6m+2m-8m)+(23n-7n-n)}{5n}$$

Finalmente, se reducen términos semejantes en el numerados y se simplifica.

$$\frac{(6m+2m-8m)+(23n-7n-n)}{5n}$$

$$=\frac{15n}{5n}$$

$$=3$$

La suma de las fracciones es igual a 3.

2. Hallar una expresión algebraica que represente la diferencia entre el área del triángulo (A_T) y el área del pentágono (A_P).

$$A_T=\frac{m-1}{m^2+3m+2}$$

$$A_P=\frac{m}{m^2-1}$$

Para hallar la diferencia entre las áreas se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{m-1}{m^2+3m+2}-\frac{m}{m^2-1}$$ Se plantea la resta.

$$=\frac{m-1}{(m+1)(m+2)}-\frac{m}{(m+1)(m-1)}$$ Se factorizan los denominadores.

$$=\frac{(m-1)(m-1)-(m)(m+2)}{(m+1)(m+2)(m-1)}$$ Se complifica cada fracción y se indica la resta.

$$=\frac{(m^2-2m+1)-(m^2+2m)}{(m+1)(m+2)(m-1)}$$ Se efectúan las multiplicaciones.

$$=\frac{1-4m}{(m+1)(m+2)(m-1)}$$ Se simplifica el numerador.

Por tanto, se tiene que la diferencia entre las áreas es:

$$A_T-A_P=\frac{1-4m}{m^3+2m^2-m-2}$$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Para multiplicar fracciones algebraicas se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Luego, se simplifica la fracción resultante si es posible.

Para dividir fracciones algebraicas se multiplica la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda fracción.

EJEMPLOS

1. Multiplicar las siguiente fracciones algebraicas.

a. $\dfrac{y}{y-2}\cdot\dfrac{y^2-5y+6}{y^2-4y+3}\cdot\dfrac{2y-4}{6y}$

$\dfrac{y}{y-2}\cdot\dfrac{y^2-5y+6}{y^2-4y+3}\cdot\dfrac{2y-4}{6y}$

$=\dfrac{y}{y-2}\cdot\dfrac{(y-2)(y-3)}{(y-1)(y-3)}\cdot\dfrac{2y-4}{6y}$ Se factoriza.

$=\dfrac{y(y-2)(y-3)(2y-4)}{(y-2)(y-1)(y-3)6y}$ Se multiplican las fracciones.

$=\dfrac{y-2}{3(y-1)}$ Se simplifica.

b. $\dfrac{m^2-9}{m^2-4}\cdot\dfrac{3m+6}{2m+6}\cdot\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{m^2-9}{m^2-4}\cdot\dfrac{3m+6}{2m+6}\cdot\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{(m+3)(m-3)}{(m+2)(m-2)}\cdot\dfrac{3(m+2)}{2(m+3)}\cdot\dfrac{2}{3}$ Se factoriza.

$=\dfrac{6(m+3)(m-3)(m+2)}{6(m+2)(m-2)(m+3)}$ Se multiplican las fracciones.

$=\dfrac{m-3}{m-2}$ Se simplifica.

2. Realizar la siguiente división:

$\dfrac{b^2-5b+6}{6bk}\div\dfrac{2b-6}{3b^2k}$

$\dfrac{b^2-5b+6}{6bk}\div\dfrac{2b-6}{3b^2k}$

$=\dfrac{b^2-5b+6}{6bk}\cdot\dfrac{3b^2k}{2b-6}$ Se expresa como multiplicación.

$=\dfrac{(b-3)(b-2)}{6bk}\cdot\dfrac{3b^2k}{2(b-3)}$ Se factoriza.

$=\dfrac{3b^2k(b-3)(b-2)}{12bk(b-3)}$ Se multiplican las fracciones.

$=\dfrac{b(b-2)}{4}$ Se simplifica.

Operaciones combinadas entre fracciones algebraicas

Enlace web

Para resolver las operaciones combinadas entre fracciones algebraicas se debe tener en cuenta las siguientes condiciones:

- Si no hay signos de agrupación, primero se resuelven las multiplicaciones y las divisiones entre fracciones algebraicas. Luego, se realizan las sumas y restas, efectuando siempre en orden las operaciones de izquierda a derecha.
- Si hay signos de agrupación, se efectúan primero las operaciones que se encuentran en su interior. Después, se realizan las operaciones combinadas teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.

Recuerda que...

La jerarquía de las operaciones, cuando no hay signos de agrupación, consiste en realizar primero las multiplicaciones y las divisiones y luego las sumas y las restas.

EJEMPLO

Resolver las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas.

$$\frac{x+3}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+9}+\frac{x^2+2x}{x-3}\div\frac{x^2+5x+6}{x-2}$$

Primero, se realiza la multiplicación y se simplifica el producto.

$$\frac{x+3}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+9}=\frac{x+3}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)(x+2)}{(x+3)(x+3)}=\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}$$

Luego, se resuelve la división.

$$\frac{x^2+2x}{x-3}\div\frac{x^2+5x+6}{x-2}=\frac{x(x+2)}{(x-3)}\cdot\frac{(x-2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{x(x-2)}{(x-3)(x+3)}$$

Finalmente, se suma el resultado de la multiplicación con el resultado de la división.

$$\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}+\frac{x^2-2x}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+2+x^2-2x}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2-x+2}{x^2-9}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

159. Determina y explica el error en la siguiente suma. Luego, realiza la operación correctamente.

$$\frac{1}{(x+5)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1+1}{(x+5)(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+2}{(x+5)(x+1)^2}$$

Escribe dos ejemplos de cada una de las siguientes operaciones.

160. Suma de fracciones con igual denominador.

161. Resta de fracciones con diferente denominador.

162. Suma de fracciones con diferente denominador.

Halla el mínimo común múltiplo de cada conjunto de expresiones algebraicas.

163. $16xy^2$, $8xy$, $2x^3y$

164. x^2+3x+2, $x+2$, x^2-4

165. x^2-1, $x-1$, x^2-x-2, x^2+4x+3

166. x^3+1, x^3+x^2+x+1, x^2+x+1

167. x^2-8x+7, x^2-7x, x^3-7x^2+x-7

168. Completa las fracciones para que queden con el mismo denominador. Luego, efectúa las operaciones.

$$\frac{3x}{x^3-4x^2+x+6}+\frac{2x\,\boxed{}}{(x-2)(x-3)\,\boxed{}}$$
$$-\frac{(x-1)\,\boxed{}}{\boxed{}\,(x+1)(x-2)}$$

E **Efectúa las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas.**

169. $\dfrac{5x-3y}{x-2y}+\dfrac{4x+2y}{x-2y}+\dfrac{y-8x}{x-2y}$

170. $\dfrac{7a-3}{a+b}-\dfrac{5-8a}{a+b}$

171. $\dfrac{3p+q}{p-q}+\dfrac{4q-p}{p+q}-\dfrac{q}{p}$

172. $\dfrac{x-2}{60xy}-\dfrac{x+3}{45xy^2}-\dfrac{x+2}{90xy}$

173. $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

174. $\dfrac{2x+4}{x^2+x-12}\cdot\dfrac{x^2-9}{4x^2+16x+16}$

175. $\dfrac{a^2-ac+ab-bc}{a^2c-ac^2}\div\dfrac{a^2c+abc}{a^2-c^2}$

176. $\dfrac{m-3}{m-2}\cdot\dfrac{m^2-m-2}{m^2-9m+18}\cdot\dfrac{m}{m+1}$

177. $\dfrac{n^3-3n^2}{n^2-16}\div\dfrac{n^3-5n^2+6n}{n^2+7n+12}$

178. $\dfrac{y^2-16}{5y^2-15y}\div\dfrac{y+4}{y-3}\cdot\dfrac{10y^3}{y^2-3y-4}$

179. $\dfrac{m^2-4}{m^2+4m+4}\div\dfrac{m-2}{(m+2)^2}\cdot\dfrac{3m^2}{m+2}$

180. $\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+4}\right)\div\left(\dfrac{14}{x+4}-\dfrac{5}{x+1}\right)$

181. $\left(\dfrac{a^2+4a+4}{a^2+6a+9}\div\dfrac{a^2+2a}{a-3}\right)\div\dfrac{a^2+5a+6}{a-2}$

182. $\left(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n}{n-1}\right)\cdot\dfrac{(n^2-1)}{n^2}$

183. $\left[\left(1-\dfrac{1}{y-1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{y-2}\right)\right]\div\left(\dfrac{5}{y-3}\right)$

184. $\left[\left(\dfrac{h}{2+h}-\dfrac{1}{h}\right)\div\left(\dfrac{h-2}{h^2+3h}\right)\right]+\dfrac{1}{h}$

185. $\left[\left(\dfrac{3-w}{w^2-4}-\dfrac{2}{w-2}\right)\div\left(\dfrac{3w+1}{w+2}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{w-2}$

R **Halla el numerador A y el denominador B de cada fracción, para que se cumpla la igualdad.**

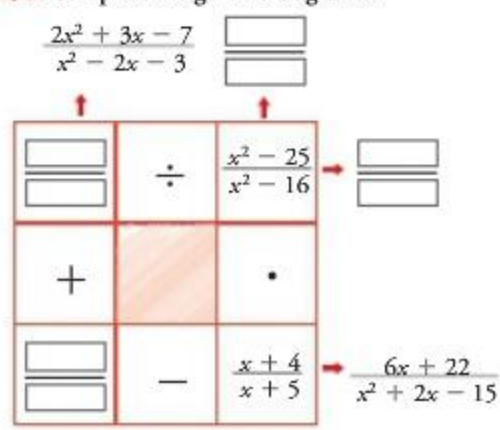
186. $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{A}{B}=\dfrac{2(x-y)}{x+y}$

187. $\dfrac{3w}{z}-\dfrac{A}{B}=\dfrac{3w^2+3w-5wz}{z+wz}$

188. $\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{2pq}{p^2+q^2}=\dfrac{6p^3q^4}{p^4-q^4}$

189. $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{6n-12}{n^2+2n-15}=\dfrac{n-3}{n-2}$

R **190. Completa el siguiente diagrama.**



R **Lee y resuelve.**

Una **fracción compuesta** es una expresión en la que el numerador o el denominador es fracción.

Simplifica las siguientes fracciones compuestas.

191. $\dfrac{\dfrac{3}{a-1}+\dfrac{2}{a+1}}{\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}}$

192. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

S **193. Resuelve.**

En un circuito la resistencia total (R_T), de n resistencias conectadas en paralelo está dada por

$$R_T=\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\ldots+\dfrac{1}{R_n}}$$

Prueba que cuando hay dos resistencias R_1 y R_2, conectadas en paralelo, la resistencia total es $R_T=\dfrac{R_1R_2}{R_2+R_1}$.

Conjuntos numéricos

194. Marca con una ✗ los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-10.520					
$0,\overline{3}$					
$1{,}414213562\ldots$					
$\sqrt[3]{64}$					
$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$					

Ordena cada conjunto de números de mayor a menor. Luego, represéntalos en la recta numérica.

195. $P = \left\{-2, -5, 3, 1, -\frac{11}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

196. $Q = \left\{0, -0{,}5, 1{,}6, -\frac{2}{5}, \sqrt{3}\right\}$

197. $R = \left\{-\sqrt{5}, -2{,}3, 0{,}2, -\frac{4}{3}, \frac{1}{10}\right\}$

Efectúa las siguientes operaciones. Luego, clasifica el resultado en decimal exacto o decimal periódico.

198. $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ decimal________________

199. $-\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$ decimal________________

200. $\frac{8}{9} - \left(-\frac{1}{3} \div \frac{7}{21}\right)$ decimal________________

201. $\left(\frac{125}{144} \cdot -\frac{12}{5}\right) + \frac{7}{4}$ decimal________________

Expresiones algebraicas

202. Escribe un monomio de grado absoluto cinco, con variables n y m y coeficiente racional negativo.

____

____

Realiza las siguientes operaciones entre polinomios.

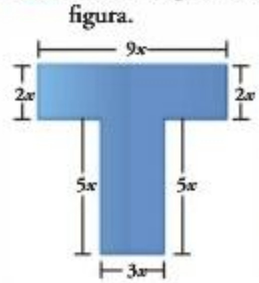
203. $(x^2 - 2xy + y^2) + (-7y^2 + 10xy - 3x^2)$

204. $(w^2 - 2w - 8) - (2w^2 + 10w - 1)$

205. $(a^2 - 3)(a^2 + 4)(a^2 + 1)$

206. $(3z^3 - 4z^2 - 3z + 20) \div (3z + 5)$

207. Calcula el perímetro y el área de la siguiente figura.



Factorización

Factoriza.

208. $m^4 - 2m^2 =$ ______

209. $27b^3 + 8c^3 =$ ______

210. $6x^2 - 19x - 7 =$ ______

211. $\frac{1}{64}m^6y^3 + 1 =$ ______

212. $x^2 + 17x + 60 =$ ______

213. $m^2 + 4m + 4 - 16n^2 =$ ______

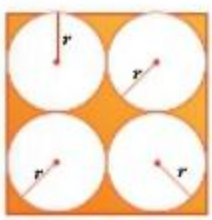
214. $w^6 - z^6 =$ ______

215. $x^2 - 7x + 6 =$ ______

216. $\frac{3}{7}x^2 - \frac{40}{7}x - 4 =$ ______

217. $xyz^2 - 2xyz^3 =$ ______

218. **Escribe una expresión factorizada que corresponda al área de la región sombreada.**



Fracciones algebraicas

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

219. $\dfrac{8x^3 - 1}{8x^3 + 4x^2 + 2x}$

220. $\dfrac{2xy^2 + y^2 - 2x^3 - x^2}{2x^3 - 2xy^2 + x^2 - y^2}$

Realiza las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas.

221. $\dfrac{n}{n+3} + \dfrac{12n}{n-3} - \dfrac{9}{n^2-9}$

222. $\dfrac{4 + 12m + 5m^2}{m^4 - 16} \div \dfrac{25m^2 + 20m + 4}{m^2 - 2m}$

223. $\dfrac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 15a + 56} \cdot \dfrac{a^2 - 5a - 24}{a^2 + 2a - 35}$

224. $\left(\dfrac{z}{z+1} - \dfrac{z^2}{z^2-1}\right) \div \left(\dfrac{z}{z-1} + 1\right)$

225. $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right) \div \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Un carpintero quiere cortar una tabla rectangular para obtener dos triángulos rectángulos, de tal forma que la hipotenusa de ambos mida $x^2 + 9$ cm y el ancho mida $6x$ cm.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de la tabla?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la tabla?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de la tabla?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la tabla?

¿Cuáles son los datos del problema?

La hipotenusa mide $x^2 + 9$ cm y el ancho mide $6x$ cm.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se halla la medida del ancho de la tabla utilizando el teorema de Pitágoras.

$(x^2 + 9)^2 = (6x)^2 + y^2$ (hipotenusa)^2 = (cateto)^2 + (cateto)^2

$x^4 + 18x^2 + 81 - 36x^2 = y^2$ Se desarrolla el binomio cuadrado y se despeja y^2.

$x^4 - 18x^2 + 81 = y^2$ Se suman términos semejantes.

$(x^2 - 9)^2 = y^2$ Se factoriza el trinomio.

$x^2 - 9 = y$ Se halla la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

El ancho de la tabla es $x^2 - 9$.

Segundo, se buscan las expresiones para perímetro y área del rectángulo.

$P = 2(6x) + 2(x^2 - 9) = 12x + 2x^2 - 18 = 2x^2 + 12x - 18$

$A = (x^2 - 9)(6x) = 6x^3 - 54x$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

La expresión algebraica para el perímetro de la tabla es $2x^2 + 12x - 18$ y la expresión algebraica para el área de la tabla es $6x^3 - 54x$.

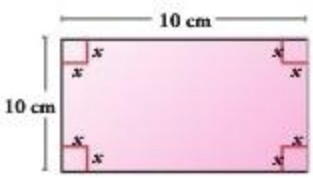
Observa el siguiente cubo. Luego, resuelve.

226. Determina un polinomio que represente el volumen del cubo.

227. Calcula el volumen del cubo en centímetros cúbicos cuando $a = 7$ cm.

Lee la situación. Luego, resuelve.

Se quiere construir un recipiente en forma de paralelepípedo con una lámina rectangular de la cual se cortan cuadrados de x lado de cada esquina.



228. Halla una expresión algebraica que represente el área de la superficie del recipiente.

229. Escribe un polinomio que represente el volumen del recipiente.

230. Calcula el área de la superficie y el volumen del recipiente cuando $x = 2$ cm.

Determina los valores de a, b y c para que se cumpla cada igualdad.

231. $(ax + 3)(x - 1) = 4x^2 + cx - b$

232. $(ax + b)(ax - c) = ax^2 - 9$

233. **Resuelve.** Una parte de un terreno se cercó con alambre de la siguiente forma.

$\frac{a-b}{a}$

$\frac{a}{b}$

$\frac{b-a}{b}$

Si cada lado de la figura que forma la parte cercada está dada en kilómetros, ¿cuántos metros de alambre se necesitaron para cercar el terreno?

Lee y resuelve.

La ganancia G, en pesos colombianos, de una empresa que vende x artículos en la semana, está dada por la expresión

$$G(x) = 5.000\left(3.000 - \frac{1.000}{1 + x^2}\right)$$

234. Comprueba que la ganancia de la empresa es:

$$G(x) = 5.000.000\left(\frac{2 + 3x^2}{1 + x^2}\right)$$

235. Calcula la ganancia de la empresa cuando $x = 2$.

Resuelve los ejercicios 236 y 237 de acuerdo con la siguiente información.

La eficiencia de un gato mecánico E, está dada por la expresión

$$E = \frac{\frac{1}{2}h}{h + \frac{1}{2}}$$

Donde h depende del paso de la rosca.

236. Comprueba que $E = \frac{h}{2h + 1}$.

237. Determina la eficiencia de un gato si $h = \frac{1}{4}$.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para saber cuántas personas ven los programas de la televisión.

Galería de imágenes

Cuando se quiere conocer el número de personas que observan un programa determinado de televisión se toma una medida denominada índice de audiencia o *rating*. El índice de audiencia es la medida electrónica que indica la audiencia o sintonía de un canal de televisión regional, nacional e internacional; para medir el índice de audiencia se utiliza un aparato denominado **audímetro** o *people meter*, que se conecta en los televisores y permite conocer la información, en tiempo real, del número de personas que están viendo televisión, cuánto tiempo permanecen viendo cada canal y cuánto tiempo está encendido el televisor.

En Colombia, la medición de audiencia lo hace IBOPE Colombia, que es una multinacional brasilera dedicada a la tecnología, inteligencia y estudio de mercados televisivos en 16 países, la mayoría latinoamericanos. Esta empresa se encarga de elegir 1.100 hogares colombianos con características específicas para el estudio de la teleaudiencia e instala en cada casa un *people meter* para medir lo que ven en televisión alrededor de 4.600 personas. La empresa se encarga de procesar la información y dar los puntos del índice de audiencia de cada programa en términos generales y minuto a minuto, lo cual es de gran utilidad para los productores de televisión que desean conocer en qué momentos captaron la mayor atención del público.

Cada punto del índice de audiencia significa que, en promedio, los hogares colombianos vieron 1 minuto, en tiempo real, el programa televisivo. Cada medición la realizan con un margen de error del 1 al 5%.

En la siguiente tabla se observa el índice de audiencia del 13 de octubre de 2011 de la franja principal de la televisión colombiana.

Posición	Programa	Índice de audiencia
1	Yo me llamo	15,3%
2	Tres milagros	14,0%
3	El secretario	11,6%
4	Factor XS	11,0%
5	El Joe, la leyenda	10,6%
6	Noticiero de las siete	8,4%
7	Infiltrados	8,4%
8	Noticias ABC	6,9%

El audímetro fue inventado por Robert Elder y Louis Woodruff, en 1936, para conocer el dial que tenían algunos radios de la época.

1. **Averigua a qué horario corresponde la franja principal de la televisión colombiana.**
2. **Explica por qué la suma del índice de audiencia de todos los programas no llega al 100%.**
3. **Responde. Si el 85% de la muestra encendió sus televisores el 13 de octubre, ¿cuántos hogares vieron televisión en la franja principal? ¿Cuántas personas se tuvieron en cuenta para la medición?**
4. **Si $\frac{3}{22}$ de los hogares no vieron televisión, en una muestra tomada, ¿qué porcentaje de los hogares se utilizó en la muestra? ¿A cuántas personas equivale la fracción de los hogares que no vieron televisión?**

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: manejar las operaciones entre expresiones algebraicas y fracciones algebraicas, aplicando la factorización de polinomios y la simplificación de fracciones algebraicas.

Descripción: realizar la adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios y fracciones algebraicas. Además, aplicar la factorización en la simplificación de fracciones algebraicas en el programa a Microsoft Mathematics.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math

1. Haz clic en Microsoft Mathematics.

2. Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona la opción **Números reales,** como se muestra en la ilustración.

3. Para resolver operaciones entre polinomios y fracciones algebraicas, realiza los siguientes pasos:

   Primero, escribe las expresiones algebraicas en la ventana.

   Por ejemplo, $(2x^2 - 3x + 1) - (8x^2 - 15x + 7)$. Luego, haz clic en **Entrar** en la parte inferior y confirma el resultado en la **Hoja de cálculo** del programa. Observa la figura.

4. Realiza las operaciones mediante Microsoft Mathematics.

   a. $(3x + 2y) - (8x + 7y)$

   b. $(-7a - 9c) + (-2a + 9c)$

   c. $(5x^2 - 6x + 7) - (-x^2 + 13x - 5)$

   d. $6x(-4x^2 + 8x - 13) + 3(x^2 - 16)$

5. Para desarrollar productos notables:

   Primero, escribe el producto notable. Luego, haz clic en **Entrar** en la parte inferior y después en **desarrollar esta expresión.**

   Por último, confirma el resultado en la **Hoja de cálculo del programa.** Observa el producto notable $(a - 3b)^2$, como se muestra en la figura.

6. Resuelve cada producto notable con Microsoft Mathematics.

   a. $(2x - 3)^2$ **b.** $(8x + 7y)^2$ **c.** $(5x - 1)^3$

7. Para factorizar polinomios, se realizan los siguientes pasos:

   Primero, ingresa el polinomio. Luego, haz clic en **Entrar** en la parte inferior.

   Después, haz clic en **desarrollar esta expresión.**

   Por último, confirma el resultado en la **Hoja de cálculo del programa.** Observa la siguiente factorización del polinomio $3x^2 - 14x + 8$, como se muestra en la figura.

8. Factoriza los siguientes polinomios con Microsoft Mathematics.

   a. $6x^2 - 30x + 24$ **c.** $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

   b. $x^4 + 4x^3 - 21x^2$ **d.** $x^6 - 27y^9$

2 Potenciación y radicación en $\mathbb{R}$

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Aplicar las **propiedades de la potenciación** en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Utilizar la **notación científica** para expresar cantidades en forma simplificada.
- Comprender y aplicar las **propiedades de la radicación.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

6 Multimedia
1 Audios
1 Galerías
4 Imprimibles
5 Actividades
2 Enlaces web

Lo que sabes...

1. Escribe en forma de potencia cada multiplicación.

a. $an \times an \times an \times an$ **b.** $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

2. Relaciona cada expresión de la columna izquierda con un número de la columna derecha.

a. $(-3)^3$ **f.** 81
b. 9^2 **g.** -27
c. $4^2 \times 4$ **h.** -125
d. $(-5)^3$ **i.** 64
e. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ **j.** 5

3. Halla el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

a. 10, 7, 3 **b.** 7, 4, 3 **c.** 15, 5, 6

4. Escribe V, si la expresión es verdadera o F, si es falsa.

a. $\sqrt{225} = 15$ **c.** $\sqrt[4]{4.096} = 16$ **e.** $\sqrt[3]{-27} = -3$
b. $\sqrt[3]{81} = 9$ **d.** $\sqrt[5]{32} = 2$ **f.** $\sqrt{100} = 10$

Cronología de la potenciación y la radicación

Babilonia. Los babilonios utilizan la potenciación para representar ecuaciones de segundo grado.

Egipto. Hallan la diagonal de un triángulo rectángulo extrayendo la raíz cuadrada.

India. Aryabhata Sutra propone un método para encontrar raíces cuadradas de forma precisa en el tratado Baudhayana Sulba.

India. Se evidencia la utilización de las potencias en leyendas como la del ajedrez.

Alemania. Christoph Rudoff introduce el símbolo $\sqrt{}$ para representar la operación de radicación.

Alemania. Miguel Stifel publica *Arithmetica Integra*. En ella se encuentra por primera vez el cálculo con potencias de exponente racional, en particular, la regla de multiplicación de potencias de igual base con exponentes racionales.

España. Leonardo Torres Quevedo utiliza la potenciación en la notación científica.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber cuánta energía se libera en un temblor.

Un **sismo** es un temblor que se produce en la superficie de la tierra, originado por movimientos de masas que ocurren en su interior. Cuando tiene lugar en tierra firme, se llama terremoto y provoca desplazamientos de tierra, derrumbamiento de edificios y otros destrozos. Estos movimientos sísmicos son de diversa magnitud o intensidad.

La escala de Richter da la idea de la magnitud del terremoto. Esta escala tiene una graduación de 1 a 9 e indica la energía liberada que viene expresada en ergios.

Lee más acerca de este tema en la página 60.

Actividad

Recurso imprimible

1. Potenciación de números reales

La potenciación permite expresar números muy grandes como la distancia del Sol a la Tierra o muy pequeñas como la carga eléctrica de un electrón. Además, con la potenciación se pueden formular expresiones que permiten modelar fenómenos en biología, química, física, entre otras áreas. Por ejemplo, las leyes de Kepler, que describen los movimientos de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, se plantea a partir de expresiones que incluyen potencias al cuadrado y al cubo.

La **potenciación** es la operación que permite expresar, en forma simplificada, la multiplicación de varios factores iguales.

Por ejemplo, la multiplicación $-7 \times -7 = 49$ se puede expresar como $(-7)^2 = 49$. En este caso, -7 es la *base*, 2 es el *exponente* y 49 es la *potencia*.

En la potenciación de números reales el exponente puede ser entero positivo, entero negativo o cero.

- Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces, se cumple que:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}} \text{ y } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ con } a \neq 0$$

- Si $n = 0$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces, $a^0 = 1$.

Historia de las matemáticas

La indeterminación de 0^0

Antes de la creación del análisis matemático era común aceptar que $0^0 = 1$. Sin embargo, en 1821 el matemático francés Augustin Cauchy (1789-1857) estableció una tabla de formas indefinidas entre las que se encuentran $\frac{0}{0}$ y 0^0.

En la actualidad, se considera la potencia 0^0 como indefinida y no se le asigna ningún valor, a menos de que exista un contexto en el que dicho valor tenga sentido.

EJEMPLOS

1. Hallar la potencia en cada caso.

a. $(-12)^3$

$(-12)^3 = (-12) \times (-12) \times (-12)$ Se resuelve la potencia con exponente entero positivo.

$= -1.728$ Se calcula el producto.

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$ Se aplica la potencia con exponente entero negativo.

$= \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$ Se expresa la potencia como producto.

$= 16$ Se simplifica.

2. Expresar la siguiente fracción como una potencia con exponente entero negativo.

$\dfrac{1}{(5)(5)(5)(5)(5)(5)}$

$\dfrac{1}{(5)(5)(5)(5)(5)(5)} = \dfrac{1}{5^6}$ Se expresa como potencia del denominador.

$= 5^{-6}$ Se expresa con exponente entero negativo.

1.1 Propiedades de la potenciación

Actividades · Ampliación multimedia

Las **propiedades de la potenciación** son reglas generales que se utilizan para simplificar expresiones numéricas y algebraicas.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, se cumplen las siguientes propiedades.

Producto de potencias de igual base: para multiplicar dos potencias de igual base y diferente exponente, se deja la misma base y se suman los exponentes. Es decir,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Cociente de potencias de igual base: para dividir dos potencias de igual base y diferente exponente, se deja la misma base y se restan los exponentes. Es decir,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ donde } a \neq 0.$$

Potencia de una potencia: para elevar una potencia a un exponente, se deja la base y se multiplican los exponentes. Es decir,

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Potencia de un producto: todo producto elevado a un exponente es igual al producto de las potencias de cada factor. Es decir,

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$

Potencia de un cociente: todo cociente elevado a un exponente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor. Es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ donde } b \neq 0$$

Potencia con exponente uno: todo número real elevado al exponente uno, da como resultado el mismo número real. Es decir,

$$a^1 = a$$

Potencias con exponente negativo: toda potencia con un exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base, elevada al exponente positivo. Es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ donde } a, b \neq 0$$

Recuerda que...

En la expresión

$$a^n = b$$

Si a es negativo y n es par, b es positivo.

Si a es negativo y n es impar, b es negativo.

Matemáticamente

¿Cómo se prueba que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$?

EJEMPLOS

1. Determinar el valor de cada potencia aplicando las propiedades de la potenciación.

a. $\left(\frac{2^4 \cdot 2^7}{2^6}\right)^{-3}$

$\left(\frac{2^4 \cdot 2^7}{2^6}\right)^{-3} = \left(\frac{2^{11}}{2^6}\right)^{-3}$ Se aplica el producto de potencias de igual base.

$= \left(\frac{2^6}{2^{11}}\right)^3$ Se expresa con exponente positivo.

$= \left(\frac{1}{2^5}\right)^3$ Se aplica el cociente de potencias de igual base.

$= \frac{1}{32.768}$ Se halla la potencia.

b. $\frac{(3^2)(4)(5^3)}{(2^{-2})(-25)}$

$\frac{(3^2)(4)(5^3)}{(2^{-2})(-25)} = \frac{(3^2)(2^2)(5^3)}{(2^{-2})[-(5^2)]}$ Se expresan como potencias el 4 y el 25.

$= \frac{(3^2)(2^2)(5^3)}{-\frac{(5^2)}{(2^2)}}$ Se expresan las potencias con exponente positivo.

$= -\frac{(3^2)(2^2)(2^2)(5^3)}{(5^2)}$ Se plantea una sola fracción.

$= -(3^2)(2^4)(5)$ Se simplifica.

$= -720$ Se resuelve cada potencia y se multiplica.

EJEMPLOS

2. Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

a. $\dfrac{-50x^8y^3z^2}{200x^5y^9z}$

$$\frac{-50x^8y^3z^2}{200x^5y^9z} = -\frac{x^8y^3z^2}{4x^5y^9z}$$ Se simplifican los coeficientes.

$$= -\frac{1}{4}x^{8-5}y^{3-9}z^{2-1}$$ Se aplica el cociente de potencias de igual base.

$$= -\frac{1}{4}x^3y^{-6}z$$ Se restan los exponentes.

$$= -\frac{x^3z}{4y^6}$$ Se expresa el resultado con exponentes positivos.

b. $\left(\dfrac{a^4b^2}{6c^5}\right)\left(\dfrac{3a^3b^2}{c^3}\right)^2$

$$\left(\frac{a^4b^2}{6c^5}\right)\left(\frac{3a^3b^2}{c^3}\right)^2 = \left(\frac{a^4b^2}{6c^5}\right)\left(\frac{9a^6b^4}{c^6}\right)$$ Se aplica potencia de una potencia.

$$= \frac{3a^{10}b^6}{2c^{11}}$$ Se aplica el producto de potencias de igual base.

c. $\dfrac{7mn^{-4}}{m^{-2}n^{-5}}$

$$\frac{7mn^{-4}}{m^{-2}n^{-5}} = \frac{(7m)\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\left(\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{1}{n^5}\right)}$$ Se expresan las potencias con exponente positivo.

$$= \frac{\frac{7m}{n^4}}{\frac{1}{m^2n^5}}$$ Se multiplican las fracciones.

$$= \frac{(7m)(m^2n^5)}{n^4}$$ Se efectúa la división entre fracciones.

$$= 7m^3n$$ Se aplica el producto y el cociente de potencias de igual base.

d. $\left(\dfrac{5pq^2r}{11m}\right)^{-3}\left(\dfrac{5r^3}{7p^2}\right)^2$

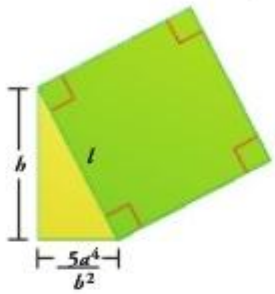
$$= \left(\frac{11m}{5pq^2r}\right)^3\left(\frac{5r^3}{7p^2}\right)^2$$ Se expresan las potencias con exponente positivo.

$$= \frac{(11^3m^3)(5^2r^6)}{(5^3p^3q^6r^3)(7^2p^4)}$$ Se aplica potencia de un producto.

$$= \frac{1.331m^3r^3}{245p^7q^6}$$ Se aplica cociente de potencias de igual base.

3. Halla el área de la siguiente figura teniendo en cuenta que:

- La figura está formada por un cuadrado y por un triángulo rectángulo.
- La altura del triángulo rectángulo es $\frac{12}{5}$ de la base.



Primero, se halla la altura (h) del triángulo rectángulo, teniendo en cuenta que es $\frac{12}{5}$ de la base.

$$h = \frac{12}{5}\left(\frac{5a^4}{b^2}\right) = \frac{12a^4}{b^2}$$

Segundo, se calcula el área del cuadrado (l^2), aplicando el teorema de Pitágoras.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{5a^4}{b^2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{12a^4}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{5a^4}{b^2}\right)^2$$
$$= \frac{144a^8}{b^4} + \frac{25a^8}{b^4}$$
$$= \frac{169a^8}{b^4}$$

Luego, se halla el área del triángulo rectángulo (A_T) multiplicando la base por la altura y dividiendo el producto entre 2.

$$A_T = \frac{12a^4}{b^2}\cdot\frac{5a^4}{b^2}$$
$$= \frac{60a^8}{b^4} \div 2 = \frac{30a^8}{b^4}$$

Finalmente, se suman el área del cuadrado y el área del triángulo para hallar el área de la figura (A_F).

$$A_F = A_T + l^2$$
$$= \frac{30a^8}{b^4} + \frac{169a^8}{b^4}$$
$$= \frac{199a^8}{b^4}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Responde.

1. ¿Cómo se calcula el producto y el cociente de potencias de igual base?
2. Si se utiliza la potenciación para expresar la multiplicación $7 \times 7 \times 7 = 343$, ¿cuál es el exponente, cuál es la potencia y cuál es la base?

Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas teniendo en cuenta que $p, q \in \mathbb{R}$ y $s, t \in \mathbb{Z}$. Justifica tu respuesta.

3. $p^s + p^t = p^{s+t}$
4. $\dfrac{p^t}{p^s} = p^{s-t}, p \neq 0$
5. $p^s \cdot p^t = p^{s+t}$
6. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^t = \dfrac{p^t}{q^t}, q \neq 0$
7. $(p^s)^t = p^{ts}$
8. $\dfrac{p^s}{p^t} = p^{\frac{s}{t}}, p \neq 0$
9. $p^s + p^t = p^{s \cdot t}$
10. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^s = \dfrac{q^s}{p^s}, p, q \neq 0$

Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la potenciación.

11. $(-3)^3 + (-5)^2$
12. $\dfrac{(5^{-2})(5^4)(125)^{-1}}{(25)(5^{-3})}$
13. $\left[\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{36}\right] \div \left[\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 (5^{-1})(5^2)\right]$
14. $2 + 2^{-1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 + 2^0$
15. $\dfrac{(3^{-1} + 2^{-1})^{-1}}{(3^{-1} - 2^{-1})^{-1}}$
16. $\left[\dfrac{(7^{-2}) + (49^{-1})}{343}\right] \cdot \left[\left(\dfrac{(8^{-2}) + (2^{-6})}{(2^{-5})}\right)\right]$

Simplifica las siguientes expresiones.

17. $(x^2y^5)^3$
18. $(a^3b^2)^2(a^4b)^{-3}$
19. $\left(\dfrac{m^2n^3p^4}{m^5np^{-2}}\right)^{-1}$
20. $\dfrac{8x^4y^{-8}}{4x^{-1}y^3}$
21. $\left(\dfrac{st^{-2}v^{-3}}{s^2t^3v^{-5}}\right)^{-3}$
22. $(m^{-2}nx^{-3}y^{-5})^{-10}$
23. $(ab^2c^{-3})^{-2} \cdot (ab^2c)$
24. $\left(\dfrac{6ab^{-4}}{3a^{-2}b^{-2}}\right)\left(\dfrac{5ab^2}{2a^{-3}b}\right)^{-1}$
25. $\dfrac{(2a^3b^4)^{-5}}{(64a^{-3}b^{-2})^{-1}}$
26. $\dfrac{(4x^2yz^{-1})^{-10}}{(1.024x^6y^5z^{-4})^{-2}}$

Enumera de manera lógica los pasos para simplificar las expresiones.

27. (1) $\dfrac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$

( ) 1

( ) $\dfrac{x^6x^6}{x^{12}}$

( ) x^{12-12}

( ) $\dfrac{x^{12}}{x^{12}}$

( ) x^0

28. (1) $\dfrac{(x^2y^{-1}z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}$

( ) $\dfrac{y^{10}}{z^2}$

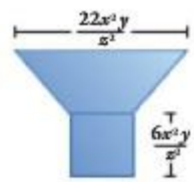
( ) $\dfrac{x^4y^8}{x^4y^{-2}z^2}$

( ) $\dfrac{(xy^2)^4}{(x^2y^{-1}z)^2}$

( ) $\dfrac{x^{4-4}y^{8-(-2)}}{z^2}$

Resuelve.

29. Prueba que $a^0 = 1$ aplicando el cociente de potencias de igual base si $a \neq 0$.
30. Halla la mitad de la mitad de la mitad de 2^{100}.
31. Encuentra la expresión algebraica que representa el área de la siguiente figura, formada por un trapecio isósceles y un cuadrado. Ambos tienen la misma altura.



32. Escribe el resultado de las operaciones del diagrama.

$\dfrac{2a^2b}{5xy^2}$		$\dfrac{(5x^2)^2}{(3b)^3}$	$=$	
$\times$		$\div$		
$\dfrac{5b^2}{a}$		$\left(\dfrac{3xy}{3b}\right)^2$		
$\div$		$\times$		
$\dfrac{6ab^4}{32x^2y^3}$	$+$	$\dfrac{8xy}{3b}$		

Lo que viene...

Averigua qué se debe tener en cuenta para expresar un número en notación decimal.

1.2 La notación científica

Ampliaciones multimedia

La **notación científica** se utiliza para representar números muy grandes o muy pequeños utilizando potencias de base diez y exponentes enteros.

> Un número está expresado en notación científica si está escrito de la forma
>
> $$a \times 10^n.$$
>
> Donde $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq a < 10$.

La notación científica se utiliza en algunas ciencias, como la Astronomía o la Biología. Por ejemplo, el diámetro del Sol es aproximadamente 1.400.000.000 m. Esta distancia se expresa en notación científica como $1{,}4 \times 10^9$ m.

Para expresar una cantidad en notación científica se debe tener en cuenta qué tipo de cantidad es:

Cantidad entera: se pone una coma a la derecha de la cifra de mayor valor posicional y se multiplica por la potencia de diez cuyo exponente es igual al número de cifras que hay después de la coma.

Por ejemplo, $2\underbrace{15.000}_{5\ \text{cifras}}$ se escribe en notación científica como $2{,}15 \times 10^5$.

Cantidad decimal: se corre la coma decimal para que quede a la derecha de la cifra de mayor valor posicional y se multiplica por la potencia de diez cuyo exponente es igual al número de cifras que se corrió la coma.

Por ejemplo, $4\underbrace{3.821}_{4\ \text{cifras}},76$ se escribe en notación científica como $4{,}382176 \times 10^4$.

Cantidad decimal con parte entera cero: se corre la coma para que quede a la derecha de la primera cifra decimal distinta de cero y se multiplica por una potencia de diez elevada a menos el número de cifras que se corrió la coma.

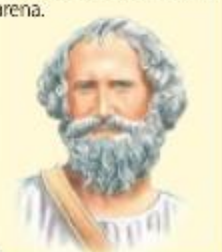
Por ejemplo, $0{,}\underbrace{007}_{3\ \text{cifras}}83$ se escribe en notación científica como $7{,}83 \times 10^{-3}$.

Para expresar un número de notación científica en notación decimal se debe tener en cuenta el exponente de la potencia de diez: si el exponente es negativo la coma se desplaza hacia la izquierda. En cambio, si el exponente es positivo la coma se desplaza hacia la derecha.

Historia de las matemáticas

Arquímedes, el universo y los números grandes

Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) fue el primer matemático que ideó un sistema para representar números grandes. Utilizando ese sistema llegó a la conclusión de que en el universo caben aproximadamente 10^{63} granos de arena.



EJEMPLOS

Reescribir las siguientes proposiciones en notación científica.

a. El 30 de octubre de 2011 la población mundial humana alcanzó los 7.000.000.000 de habitantes.

Para escribir 7.000.000.000 en notación científica se escribe el 7 y se multiplica por la potencia de diez cuyo exponente es la cantidad de ceros que tiene el número.

Por tanto, el 30 de octubre de 2011 la población mundial humana alcanzó los 7×10^9 habitantes.

b. El radio de un átomo es 0,0000001 mm.

Para reescribir 0,0000001 en notación científica se escribe el 1 y se multiplica por la cantidad de cifras que se corre la coma.

Por tanto, el radio de un átomo es 1×10^{-7} mm.

Operaciones con números en notación científica

Para realizar operaciones con números escritos en notación científica, se efectúan las operaciones entre los números que aparecen antes de las potencias de 10. Luego, se aplican las propiedades de la potenciación entre las potencias de 10, si es necesario.

Para sumar o restar números en notación científica se debe tener en cuenta que:

- Cuando las potencias de 10 tienen **igual exponente**, se factoriza la potencia de 10 y se operan los otros números.
- Cuando las potencias de 10 tienen **diferente exponente**, se expresan los números con una misma potencia de 10. Luego, se factoriza y se operan los otros números.

Para multiplicar o dividir números en notación científica se multiplican o dividen las partes enteras o decimales de los números y las potencias de 10 aplicando las propiedades de la potenciación.

EJEMPLOS

1. Efectuar las siguientes operaciones entre los números escritos en notación científica.

a. $(3{,}47 \times 10^5) + (2{,}56 \times 10^5)$

Primero, se factoriza la potencia de 10 en este caso es 10^5.

$$= (3{,}47 + 2{,}56) \times 10^5$$

Luego, se realiza la suma de decimales. Por tanto, el resultado es:

$$= 6{,}03 \times 10^5$$

b. $(5{,}08 \times 10^6) - (4{,}15 \times 10^4)$

Primero, se expresa ambos números con la misma potencia de 10.

$$= (5{,}08 \times 10^6) - (0{,}0415 \times 10^6)$$

Luego, se factoriza la potencia de 10 en este caso es 10^6.

$$= (5{,}08 - 0{,}0415) \times 10^6$$

Finalmente, se realiza la resta de decimales. Por tanto, el resultado es:

$$= 5{,}0385 \times 10^6$$

c. $(6{,}09 \times 10^4) \times (1{,}25 \times 10^2)$

Primero, se multiplican los números decimales y las potencias de 10.

$$= (6{,}09 \times 1{,}25) \times (10^4 \times 10^2)$$

$$= 7{,}6125 \times 10^6$$

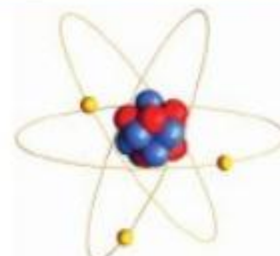
Luego, se expresa el producto en notación científica.

$$7{,}6125 \times 10^6$$

Por tanto, $(6{,}09 \times 10^4) \times (1{,}25 \times 10^2)$ equivale a $7{,}6125 \times 10^6$.

2. Leer y responder.

Aproximadamente la masa de un protón es $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, mientras que la masa de un electrón es de $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.



a. ¿Cuál es la suma de las masas del electrón y del protón?

$9{,}11 \times 10^{-31} = 0{,}000911 \times 10^{-27}$	Se plantea una potencia de diez común.
$(0{,}000911 \times 10^{-27}) + (1{,}67 \times 10^{-27})$	Se indica la suma.
$(0{,}000911 + 1{,}67) \times 10^{-27}$	Se factoriza.
$= 1{,}670911 \times 10^{-27}$	Se suman los números decimales.

La suma de las dos masas es $1{,}670911 \times 10^{-27}$ kg.

b. ¿Cuántas veces es mayor la masa del protón que la masas del electrón?

$(1{,}67 \times 10^{-27}) \div (9{,}11 \times 10^{-31})$	Se indica la división.
$= (1{,}67 \div 9{,}11) \times (10^{-27} \div 10^{-31})$	Se dividen los decimales y las potencias de diez.
$= 0{,}183315 \times 10^4$	Se simplifica.
$= 1{,}83315 \times 10^5$	Se expresa en notación decimal.

Por tanto, la masa del protón es $1{,}83315 \times 10^5$ veces mayor que la masa del electrón, aproximadamente.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina cuáles de los siguientes números están en notación científica, según la definición de la página 38.

33. 12,5
34. $6{,}05 \times 10^8$
35. $10{,}9 \times 10^4$
36. $2{,}58 \times 10^{-3}$
37. $1{,}11 \times 10$
38. $3{,}64 \times 10^{-9}$
39. $0{,}008 \times 10^{-3}$
40. $0{,}154 \times 10^6$

Escribe los siguientes números en notación científica.

41. 2.200
42. 0,0015
43. 3.520.000
44. 56.040.000
45. 0,00000036
46. 345,876

Escribe los siguientes números en notación decimal.

47. $6{,}8 \times 10^{-4}$
48. $2{,}115 \times 10^4$
49. $5{,}04 \times 10^2$
50. $6{,}72 \times 10^5$
51. $5{,}31 \times 10^{-5}$
52. $7{,}31 \times 10^{-5}$

Reescribe las siguientes proposiciones en notación científica.

53. El diámetro de un glóbulo rojo es aproximadamente 0,000075 cm.

____

54. Una tonelada métrica equivale a 1.000.000 g.

____

55. Un nanómetro es una unidad de medida que se utiliza para medir la radiación ultravioleta y equivale a 0,000000001 metros.

____

56. El área de la superficie de Australia es aproximadamente 7.686.850.000.000 m².

____

57. El segundo país más poblado del mundo es India con 1.241.492.000 habitantes.

____

58. El diámetro del protón de un átomo de hidrógeno es 0,00000000000016 centímetros.

____

Ordena los siguientes números de menor a mayor.

59. 3×10^2, 200, $5{,}01 \times 10^3$, 400.000
60. $8{,}5 \times 10^{-6}$, 0,008, 0,00075, $7{,}49 \times 10^{-5}$
61. $4{,}6 \times 10^4$, 4.598.000, $4{,}579 \times 10^3$
62. $1{,}79 \times 10^{-3}$, 0,00018, $1{,}8 \times 10^{-4}$

Expresa las siguientes operaciones en notación científica. Luego, resuélvelas.

63. $(0{,}000208) \times (0{,}000002)$
64. $(5{,}0003) \div (0{,}0001)^2$
65. $(1.600.000) + (1.200)^2$
66. $(0{,}000075) - (0{,}015)^3$
67. $(0{,}0005 \times 350) \div (500 \times 0{,}0007)$

Responde las preguntas 68 a 71 de acuerdo con la siguiente información.

La distancia entre la Tierra y las estrellas se mide en años luz. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año y equivale aproximadamente a $9{,}460728 \times 10^{12}$ kilómetros.

La distancia aproximada de la Tierra a algunas estrellas es:

Nombre	Distancia en kilómetros
Próxima Centauri	4×10^{13}
Vega	$2{,}37 \times 10^{14}$
Altair	$1{,}59 \times 10^{14}$
Nunki	$2{,}08 \times 10^{15}$

68. Aproximadamente, ¿a cuántos años luz de distancia se encuentra la estrella Próxima Centauri?
69. ¿Cuántos kilómetros más lejos está la estrella Vega que la estrella Altair?
70. ¿Cuántos kilómetros más cerca de la Tierra está la estrella Altair que la estrella Nunki?
71. ¿Cuántas veces más lejos está la estrella Nunki comparada con la estrella Próxima Centuari?

2. Radicación de números reales

Ampliación multimedia

La raíz enésima de un número real a es un número real b, si y sólo si la enésima potencia de b es a. Es decir,

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ si y sólo si } b^n = a$$

Donde, $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Si n es par, se debe cumplir que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$.

Cuando en una raíz no se indica el índice significa que dicho índice es 2, y por tanto corresponde a la raíz cuadrada.

En la radicación de números reales se pueden presentar las siguientes situaciones:

- **Índice par y cantidad subradical un número real positivo.** Si n es par y $a \in \mathbb{R}^+$, entonces, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$, la raíz es un número real positivo. Por ejemplo, $\sqrt{36} = 6$.
- **Índice par y cantidad subradical un número real negativo.** Si n es par y $a \in \mathbb{R}^-$, entonces, $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$, no existe la raíz en los números reales. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no existe en los números reales.
- **Índice impar y cantidad subradical un número real positivo.** Si n es impar y $a \in \mathbb{R}^+$, entonces, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$, la raíz es un número real positivo. Por ejemplo, $\sqrt[3]{27} = 3$.
- **Índice impar y cantidad subradical un número real negativo.** Si n es impar y $a \in \mathbb{R}^-$, entonces, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^-$, la raíz es un número real negativo. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-64} = -4$.

A partir de la radicación se define qué es un exponente racional así:

Un exponente racional de la forma $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$ se define como

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces, $a \geqslant 0$.

Es importante tener en cuenta que para los exponentes racionales también se cumplen las propiedades de la potenciación

Recuerda que...

Los términos de la radicación son:

Radical

Índice $\sqrt[n]{a} = b$ Raíz

Cantidad subradical

Actividad

Matemática*mente*

¿En $a^{\frac{m}{n}}$ es posible que $a = 0$ cuando $\frac{m}{n} < 0$?

EJEMPLOS

1. Escribir la expresión en forma radical. Luego, calcula la raíz.

$$\left[\left(4^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(64^{\frac{1}{4}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Primero, se expresa 64 como una potencia de 4.

$$= \left[\left(4^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(4^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Luego, se aplican las propiedades de la potenciación.

$$= \left[\left(4^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(4^{\frac{3}{4}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente, se expresa la potencia en forma radical.

$$= 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Por tanto, la expresión es igual a 2.

2. Escribir la expresión $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$ con exponentes racionales. Luego, simplificarla.

Primero, se expresa cada radical con exponente racional.

$$= \left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Luego, se aplican las propiedades de la potenciación.

$$\left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{18}} = x^{\frac{5}{9}}$$

Finalmente, se tiene que el resultado de la simplificación es $x^{\frac{5}{9}}$ o $\sqrt[9]{x^5}$.

2.1 Propiedades de la radicación

Enlace web

Las **propiedades de la radicación** se utilizan para simplificar expresiones algebraicas con radicales.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$, se cumplen las siguientes propiedades siempre y cuando las raíces indicadas existan, es decir, que las raíces deben ser números reales.

Propiedad	Expresión algebraica
Raíz de un producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
Raíz enésima de un número positivo elevado a la n	$\sqrt[n]{a^n} = a$ con $a \geq 0$.
Raíz enésima de un número elevado a una potencia impar	$\sqrt[n]{a^n} = a$ con n impar.

Las anteriores propiedades se pueden demostrar a partir de las propiedades de la potenciación, puesto que toda raíz se puede expresar como una potencia con exponente racional. Por ejemplo, para demostrar que se cumple la raíz enésima de un cociente, se realizan los siguientes pasos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Se aplica la definición de exponente racional.}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \quad \text{Se aplica la potencia de un cociente.}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{Se aplica la definición de exponente racional.}$$

Matemática*mente*

¿Cómo se demuestra que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$?

Simplificación de expresiones con radicales

Ampliación multimedia

Para que una expresión con radicales esté simplificada, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Los exponentes de los factores que conforman la cantidad subradical no deben ser mayores o iguales que el índice de la raíz. Por ejemplo, la expresión $\sqrt[3]{ab^2}$ está simplificada. En cambio, la expresión $\sqrt[3]{a^3 b}$ no está simplificada.
2. El máximo común divisor de los exponentes de los factores de las cantidades subradical y del índice de la raíz deben ser igual a 1. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt[4]{m^5 n^3}$ se cumple que mcd $(3, 4, 5) = 1$. En cambio, en la expresión $\sqrt[4]{m^6 n^2}$ se tiene que mcd $(2, 4, 6) = 2$.

   Cuando se simplifica una expresión con radicales, se asume que las raíces existen. De igual forma, si la expresión incluye fracciones se entiende que el denominador es diferente de cero.

EJEMPLOS

1. Aplicar las propiedades de la radicación para simplificar la siguiente expresión algebraica.

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{10}b^7\sqrt{a^3b^9}}}{\sqrt{ab^4}}}}$$

Para simplificar la expresión algebraica se realizan los siguientes pasos:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{10}b^7\sqrt{a^3b^9}}}{\sqrt{ab^4}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{13}b^{16}}}{\sqrt{ab^4}}}}$$ Se aplica la raíz de un producto.

$$= \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a^{12}b^{12}}}}$$ Se aplica la raíz de un cociente.

$$= \sqrt[24]{a^{12}b^{12}}$$ Se aplica la raíz de una raíz.

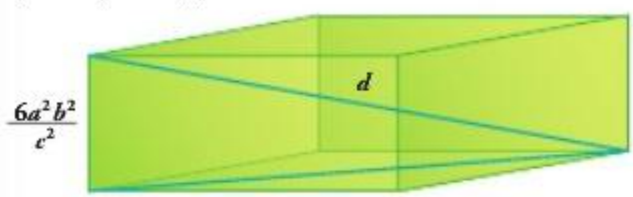
$$= \sqrt[24]{(ab)^{12}}$$ Se aplica la potencia de un producto.

$$= (ab)^{\frac{12}{24}}$$ Se aplica la raíz de una potencia.

$$= (ab)^{\frac{1}{2}}$$ Se simplifica el exponente racional.

$$= \sqrt{ab}$$ Se expresa en forma radical.

2. Utiliza las propiedades de la potenciación y de la radicación para hallar la diagonal del siguiente paralelepípedo.



Diagonal del rectángulo de la base: $\frac{8a^2b^2}{c^2}$

Para hallar la diagonal del paralelepípedo se realizan los siguientes pasos:

$$d^2 = \left(\frac{6a^2b^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{8a^2b^2}{c^2}\right)^2$$ Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = \frac{36a^4b^4}{c^4} + \frac{64a^4b^4}{c^4}$$ Se realiza la potencia de una potencia.

$$d^2 = \frac{100a^4b^4}{c^4}$$ Se efectúa la suma.

$$d = \sqrt{\frac{100a^4b^4}{c^4}}$$ Se extrae la raíz cuadrada teniendo en cuenta que d debe ser positivo.

$$d = \frac{\sqrt{100a^4b^4}}{\sqrt{c^4}} = \frac{10a^2b^2}{c^2}$$ Se aplica raíz de un cociente y se simplifica.

Por tanto, la diagonal del paralelepípedo es $d = \frac{10a^2b^2}{c^2}$.

Historia de las matemáticas

Los exponentes racionales

Nicolás Oresme (1323-1382) fue un intelectual francés, quien estableció algunas propiedades de la potenciación con exponentes racionales, tales como:

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$$

$$(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}$$

72. **Completa la tabla.**

Expresión	Índice	Cantidad subradical	Raíz
$\sqrt[5]{1.024}$			
	3	343	
$\sqrt[4]{x^8y^{12}}$			
	5	$m^{15}n^{30}$	

73. **Explica cuál es el error en el siguiente procedimiento, justifica tu respuesta.**

$16 = 16$	Se plantea la propiedad idéntica de la igualdad.
$(-4)^2 = (4)^2$	Se expresa 16 como potencia.
$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2}$	Se extrae la raíz cuadrada.
$-4 = 4$	

Numera de manera lógica los pasos para simplificar las siguientes expresiones.

74. (1) $\sqrt[4]{48}$
( ) $2\sqrt[4]{3}$
( ) $\sqrt[4]{16 \cdot 3}$
( ) $\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{3}$

75. (1) $\sqrt[3]{x^6y^4}$
( ) $(\sqrt[3]{(x^2)^3})(\sqrt[3]{y^3})(\sqrt[3]{y})$
( ) $\sqrt[3]{(x^2)^3(y^3)(y)}$
( ) $x^2y\sqrt[3]{y}$

Aplica las propiedades de la radicación para simplificar las siguientes expresiones.

76. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{b}}$

77. $\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^2}}$

78. $\sqrt{4x}\sqrt{20x^3}$

79. $\sqrt[4]{80x^5y^4}$

80. $\sqrt[3]{\dfrac{4xy^3}{256x^4y^2}}$

81. $\sqrt[4]{\sqrt{a^{16}b^{24}}}$

82. $\sqrt[6]{(\sqrt{m^2n^4})\cdot(\sqrt{m^4n^2})}$

83. $\left(\sqrt[6]{\sqrt{s^{24}t^{36}u^{12}}}\right)^2$

84. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256(a^{16}b^4)^2}}}$

85. $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{4a^2b^8}}{\sqrt{6.561a^{16}b^{24}}}}}$

Determina el valor de m en cada caso.

86. $\sqrt[3]{m} = 2$

87. $\sqrt[m]{243} = 3$

88. $(\sqrt[m]{2.187})^3 = 27$

89. $\sqrt[3]{1.728} = m$

90. $\sqrt{m}\sqrt{m} = 1.296$

91. $\sqrt[m]{-1,331} = -1,1$

92. $\sqrt{\sqrt[3]{4.096}} = m$

93. $\sqrt[3]{\sqrt{m}} = 5$

Escribe las siguientes expresiones con exponentes racionales. Luego, simplifica si es posible.

94. $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$

95. $(\sqrt[7]{m^6})(\sqrt[6]{m^5})$

96. $(\sqrt{16a}\,b^3)(\sqrt[6]{4a^3}\,b^2)$

97. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{27}a^{-3}b^6\right)^{-2}}$

98. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{3mn}{2a^3b^2}\right)^8}$

99. $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^8\sqrt{x^2y}}}$

100. $(\sqrt[3]{a^2b^6c})(\sqrt[3]{a^3b^3c^2})$

101. $(\sqrt[6]{mn^2})(\sqrt{\sqrt[3]{m^5n^4}})$

102. $\sqrt[5]{\sqrt{\dfrac{a^{20}b^{35}}{x^{12}x^{17}}}}$

103. $\dfrac{\sqrt[3]{s^6t^9v^4}}{\sqrt[3]{s^{12}t^3v^{10}}}$

Completa cada una de las siguientes igualdades para que sean verdaderas.

104. $\sqrt[3]{729a^5b^{\square}c^{\square}} = \square ab^4c^2\sqrt[3]{a^{\square}c^{12}}$

105. $\sqrt[4]{\square m^{\square}n^{\square}p^{\square}} = 5mnp\sqrt[4]{m^2n^3}$

Lee y resuelve.

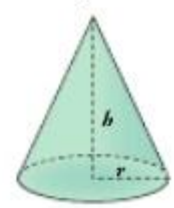
106. Según la teoría de la relatividad de Einstein la masa m de un objeto que se mueve a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m_0 es la masa del objeto en reposo y $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Halla la masa de un protón que se desplaza a una velocidad de 0,5 c, si su masa en reposo es $1,6 \times 10^{-27}$ kg.

107. Un cono es un cuerpo de revolución generado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos. El cateto sobre el que gira es la altura y la hipotensa es la generatriz.



Determina la generatriz g del cono, si

$$h = \frac{7m^2n^4}{x^6y^4} \text{ y } r = 6\left(\frac{2mn^2}{x^3y^2}\right)^2$$

Radicales semejantes

Dos o más radicales son semejantes si tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Por ejemplo, $6\sqrt{x^2y^3}$ y $-\frac{4}{3}\sqrt{x^2y^3}$ son radicales semejantes.

Para determinar si dos radicales son semejantes deben estar simplificados.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Identifica cuáles de las siguientes expresiones son semejantes a $\sqrt[3]{s^2t^2p}$.

108. $\sqrt{s^2t^2p}$

109. $7\sqrt[3]{s^2t^2p}$

110. $-2\sqrt[3]{s^2t^2p}$

111. $4\sqrt[3]{s^2tp^2}$

Escribe dos expresiones que sean semejantes a cada uno de los siguientes radicales.

112. $\sqrt{2mnp}$

113. $5\sqrt[3]{a^2bc}$

114. $-\frac{7}{3}\sqrt[4]{x^3y^2z}$

115. $-\frac{5}{4}\sqrt[5]{m^4n^3p^2}$

116. $-\sqrt[10]{a^9bc^2}$

117. $15\sqrt[5]{5a^4b^2c}$

118. $-\frac{3}{25}\sqrt[6]{x^3y^5}$

119. $\frac{1}{100}\sqrt[10]{m^3n^6p}$

Simplifica cada grupo de expresiones algebraicas. Luego, determina cuáles radicales son semejantes.

120. $\frac{\sqrt[3]{27x^6y^2z}}{3}, \sqrt[3]{\frac{x^9y^2z}{125}}, x^2\sqrt[3]{\frac{64y^2}{z^{-1}}}$

121. $2\sqrt{\sqrt{\frac{a^8}{b^4c^{16}}}}, 7\sqrt[4]{\frac{a^8b^4}{c^{16}}}, c^4\sqrt{\sqrt{\frac{b^4}{a^{-8}}}}$

122. $\sqrt[3]{\frac{24y^3z^6}{32x^4}}, \left[\left(\frac{24x^2z^6}{4x^3z^4}\right)^3\right]^{\frac{1}{9}}, \sqrt[3]{\frac{y^6z^6}{32x^4}}$

123. $\sqrt[5]{\frac{z^5x^6y}{x^4z^2}}, \sqrt[5]{\frac{y^4x^3}{y^3z}}, 8\sqrt[5]{\left(\frac{y^2}{xz^3}\right)^3(z^7)}$

124. $3\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^6b^4}{x}}}, \sqrt[6]{\frac{(a^2)^3x^{-1}}{b^{-4}}}, 3\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^{12}b^8}{x^2}}}$

125. $-2\sqrt[10]{\frac{m^7n^5}{m^4n}}, \sqrt[5]{\sqrt{\frac{m^3n^6}{1.024}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[5]{(mn^3)^2}}$

126. $\sqrt[3]{\frac{16m^2n^5}{p^5}}, -2\sqrt{\frac{4m^2n}{p^5}}, 2n\sqrt[6]{4p^{-10}m^4n^2}$

127. $\sqrt[4]{\frac{x^5y^2}{z^5}}, x\sqrt[6]{\frac{y^2}{z^5}}, \sqrt[3]{\frac{x^3y^4}{z^2}}$

Relaciona las expresiones que son semejantes.

128. $\sqrt[3]{x^2yz}$ | **a.** $5xy^4$

129. $\sqrt[6]{\frac{x^3y}{z^{-4}}}$ | **b.** $\frac{xy^3}{z^2}$

130. $\sqrt[3]{\frac{x^3y^9}{z^6}}$ | **c.** $\sqrt[3]{\frac{9x^2z}{9y^{-1}}}$

131. $\sqrt[5]{\frac{x^{-5}y}{z^{-10}}}$ | **d.** $\frac{\sqrt[5]{y}\,z^2}{x}$

132. $\sqrt[4]{625x^4y^{16}}$ | **e.** $\sqrt{x}\sqrt[3]{z^2}\sqrt[6]{y}$

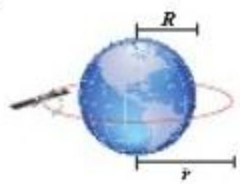
133. Completa los siguientes radicales para que la igualdad sea verdadera.

$$\frac{ab}{c}\sqrt[\square]{\sqrt[4]{\sqrt[\square]{\frac{a^{\square}}{c^{20}}}}} = \sqrt[60]{\frac{a^{100}b^{\square}}{c^{\square}}}$$

La expresión que permite calcular la velocidad v de un satélite que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular r, es:

$$v = \frac{1}{R}\left(\frac{4R}{2}\right)^2\sqrt{\frac{2}{r}}$$

Donde R es el radio de la Tierra y v se expresa en pies por segundo.



134. Prueba que $v = R\sqrt{\frac{32}{r}}$.

135. Si el radio de la Tierra es aproximadamente $6{,}37 \times 10^6$ m y $r = 6{,}76 \times 10^6$ m, ¿cuál es la velocidad del satélite?

136. Escribe un radical que sea semejante a la expresión que permite calcular la velocidad del satélite.

2.2 Operaciones con radicales

Ampliación multimedia
Recurso imprimible

Adición y sustracción de radicales

Para sumar o restar radicales se simplifica cada radical y luego, se reducen los radicales semejantes.

EJEMPLOS

1. Simplificar la siguiente expresión algebraica.

$$3\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} + 4\sqrt[4]{\sqrt{a}} - \frac{1}{6}\sqrt[8]{a}$$

$3\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} + 4\sqrt[4]{\sqrt{a}} - \frac{1}{6}\sqrt[8]{a} = 3\sqrt[8]{a} + 4\sqrt[8]{a} - \frac{1}{6}\sqrt[8]{a}$ Se simplifica cada radical.

$= 7\sqrt[8]{a} - \frac{1}{6}\sqrt[8]{a}$ Se realiza la suma.

$= \frac{41}{6}\sqrt[8]{a}$ Se realiza la resta.

2. Si $a = 20\sqrt{12}$, $b = 5\sqrt{48}$, $c = -4\sqrt{75}$ y $h = b - c + a$, ¿cuál es el valor de h?

$h = b - c + a$

$= 5\sqrt{48} - (-4\sqrt{75}) + 20\sqrt{12}$ Se remplazan los valores de a, b y c.

$= 5\sqrt{2^4 \cdot 3} - (-4\sqrt{5^2 \cdot 3}) + 20\sqrt{2^2 \cdot 3}$ Se expresa como potencia cada cantidad subradical.

$= 20\sqrt{3} + 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3}$ Se simplifica.

$= 80\sqrt{3}$ Se suman radicales semejantes.

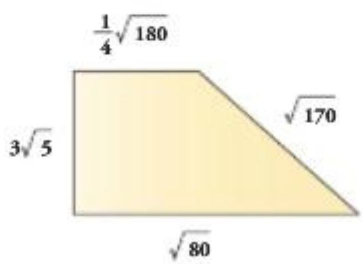
Por tanto, el valor de h es $80\sqrt{3}$.

Matemática*mente*

Escribe un ejemplo para probar por qué no se cumple la siguiente igualdad:

$$\sqrt{a} + \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a + \sqrt{a}}$$

3. Hallar el perímetro del siguiente trapecio.



$\frac{1}{4}\sqrt{180} + 3\sqrt{5} + \sqrt{80} + \sqrt{170}$ Se plantea la suma de las medidas de los lados del trapecio.

$= \frac{6}{4}\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + \sqrt{170}$ Se simplifican los radicales que es posible.

$= \frac{17}{2}\sqrt{5} + \sqrt{170}$ Se reducen radicales semejantes.

Por tanto, el perímetro P del trapecio es:

$$P = \frac{17}{2}\sqrt{5} + \sqrt{170}.$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

137. Responde.

¿Qué pasos debes seguir para sumar o restar expresiones con radicales?

Escribe = o ≠, según el caso.

138. $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ______ $\sqrt{9}$

139. $\sqrt{10} - \sqrt{21}$ ______ $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$

140. $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$ ______ $\sqrt[3]{2}$

Resuelve las siguientes operaciones.

141. $7\sqrt{2} + 8\sqrt{5} - 11\sqrt{2} + \sqrt{5}$

142. $-9\sqrt[3]{6} + 11\sqrt{7} + 35\sqrt{7} - 16\sqrt[3]{6}$

143. $\sqrt{20} + \sqrt{18} - 5\sqrt{8} + \sqrt{98} + 2\sqrt{45}$

144. $8\sqrt{75} - \sqrt{108} - 4\sqrt{300} + 5\sqrt{192} - \sqrt{12}$

145. $-9\sqrt[3]{8x^4} - \sqrt[3]{2x} + 3\sqrt[3]{4x} - 8\sqrt[3]{64x^4}$

146. $\frac{3}{2}\sqrt[5]{224} + \sqrt{75x^3} - \sqrt{363x^3} - \frac{11}{3}\sqrt[5]{7}$

147. $\frac{3x}{2}\sqrt{xy^3} - \frac{xy}{4}\sqrt{4xy} - \frac{2}{9}\sqrt{x^3y^3}$

148. $3\sqrt{a^3} - a\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a^5}}{a} - \sqrt[4]{a^2}$

149. Completa el siguiente cuadrado mágico, en el cual la suma de las filas, las columnas y las diagonales es igual a $9(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

	$\sqrt{2} - 2\sqrt{12}$	
	$3\sqrt{3} + \sqrt{18}$	
$\sqrt{8} - \sqrt{27}$		$\sqrt{12} + \sqrt{8}$

Encuentra los números que hacen verdadera cada igualdad.

150. $\sqrt{\square} - 4\sqrt{28} = 5\sqrt{7}$

151. $5\sqrt[3]{135} - 2\sqrt[3]{\square} + 4\sqrt[3]{625} = 3\sqrt[3]{5}$

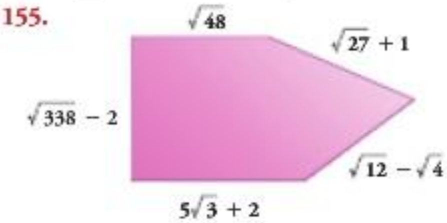
152. $3\sqrt{12} + 4\sqrt{18} + \sqrt{\square} - 4\sqrt{\square} = 8\sqrt{3}$

153. $\frac{3}{8}\sqrt{176} + \frac{3}{2}\sqrt{45} - \frac{1}{4}\sqrt{\square} - \frac{1}{2}\sqrt{275}$
$= \sqrt{5} - \sqrt{11}$

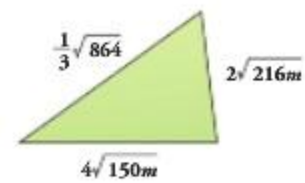
154. $\square\sqrt[3]{\sqrt{640}} - 9\sqrt[12]{\square} = -5\sqrt[6]{10}$

Halla el perímetro de cada figura.

155.

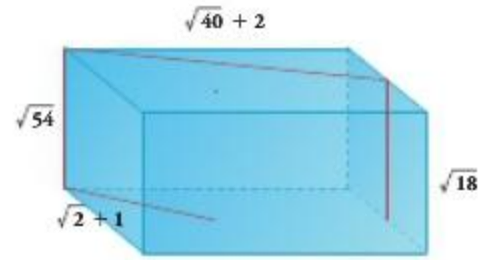


156.



Lee la información y resuelve.

En una oficina se desea instalar una red eléctrica con un cable cuya longitud es de $5\sqrt{3} + 12$ metros, como se muestra en la figura.



157. Determina si la cantidad de cable que se tiene es suficiente para realizar la red.

Halla el área de la región sombreada.

158.

Área del círculo mayor: $\sqrt{192\pi^2y^4}$

Área del círculo menor: $\sqrt{12\pi^2y^4}$

159.

Área del rectángulo: $6\sqrt[3]{5}$

Área del cuadrado: $\sqrt[3]{40}$

Área del triángulo: $\sqrt[3]{5}$

Multiplicación de radicales con igual índice

Para multiplicar radicales con igual base, se sigue el siguiente proceso.

- **Primero,** se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales, aplicando la propiedad de la raíz de un producto.

  Así, $(a\sqrt[n]{x})\cdot(b\sqrt[n]{y}) = a\cdot b\sqrt[n]{x\cdot y}$.
- **Luego,** se simplifica el resultado.

EJEMPLOS

1. Realizar cada producto.

a. $5\sqrt{24}\cdot 2\sqrt{12}$

$= 5\cdot 2\sqrt{24\cdot 12}$ Se multiplica.

$= 10\sqrt{288}$ Se resuelven los productos.

$= 10\sqrt{2^5\cdot 3^2}$ Se descompone 288.

$= 10\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{2}$ Se simplifica.

$= 120\sqrt{2}$

Luego, $5\sqrt{24}\cdot 2\sqrt{12} = 120\sqrt{2}$.

b. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{81x^4}\cdot\frac{2}{9}\sqrt[3]{4xy^7}$

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\sqrt[3]{81x^4\cdot 4xy^7}$ Se multiplica.

$= \frac{6}{36}\sqrt[3]{324x^5y^7}$ Se resuelven los productos.

$= \frac{6}{36}\sqrt[3]{2^2\cdot 3^4x^5y^7}$ Se descompone 324.

$= \frac{1}{6}\cdot 3xy^2\sqrt[3]{2^2\cdot 3x^2y}$ Se simplifica.

$= \frac{1}{2}xy^2\sqrt[3]{12x^2y}$

Así: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{81x^4}\cdot\frac{2}{9}\sqrt[3]{4xy^7} = \frac{1}{2}xy^2\sqrt[3]{12x^2y}$

c. $-5\sqrt[4]{625a^8b^6}\cdot 7\sqrt[4]{320a^3b^2}\cdot 2\sqrt[4]{5a^3}$

$= (-5\cdot 7\cdot 2)\sqrt[4]{(625a^8b^6)(320a^3b^2)(5a^3)}$ Se multiplica.

$= -70\sqrt[4]{1.000.000a^{14}b^8}$ Se resuelven los productos.

$= -70\sqrt[4]{2^6\cdot 5^6a^{14}b^8}$ Se descompone 1.000.000.

$= -70\cdot 2\cdot 5a^3b^2\sqrt[4]{2^2 5^2a^2}$ Se simplifica.

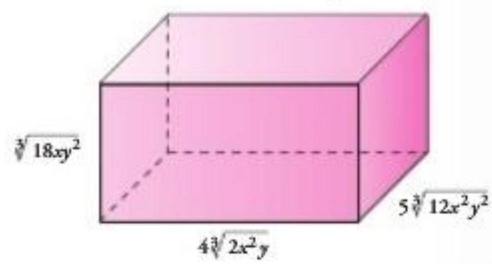
$= -700a^3b^2\sqrt[4]{100a^2}$

$= -700a^3b^2\sqrt[4]{10^2a^2}$ Se escriben como potencias las cantidades subradicales.

$= -700a^3b^2\left(10^{\frac{2}{4}}\right)\left(a^{\frac{2}{4}}\right)$

$= -700a^3b^2\sqrt{10a}$ Se simplifica.

2. Determinar el volumen de la siguiente figura.



Como el volumen se obtiene al multiplicar $5\sqrt[3]{12x^2y^2}$, $4\sqrt[3]{2x^2y}$, $\sqrt[3]{18xy^2}$, entonces:

$V = 5\sqrt[3]{12x^2y^2}\cdot 4\sqrt[3]{2x^2y}\cdot\sqrt[3]{18xy^2}$ Se plantea el producto.

$= 5\cdot 4\sqrt[3]{(12x^2y^2)\cdot(2x^2y)\cdot(18xy^2)}$ Se multiplica.

$= 20\sqrt[3]{432x^5y^5}$ Se resuelven los productos.

$= 20\sqrt[3]{2^4\cdot 3^3x^5y^5}$ Se descompone 432.

$= 20\cdot 2\cdot 3xy\sqrt[3]{2x^2y^2}$ Se simplifica.

$= 120xy\sqrt[3]{2x^2y^2}$

Por tanto, el volumen es $120xy\sqrt[3]{2x^2y^2}$.

3. Resolver $\sqrt[4]{6x}\cdot(\sqrt[4]{8x^3} - \sqrt[4]{12x^6})$.

$\sqrt[4]{6x}\cdot(\sqrt[4]{8x^3} - \sqrt[4]{12x^6})$

$= \sqrt[4]{6x}\cdot\sqrt[4]{8x^3} - \sqrt[4]{6x}\sqrt[4]{12x^6}$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= \sqrt[4]{6x\cdot 8x^3} - \sqrt[4]{6x\cdot 12x^6}$ Se multiplica.

$= \sqrt[4]{48x^4} - \sqrt[4]{72x^7}$ Se resuelven los productos.

$= \sqrt[4]{2^4\cdot 3x^4} - \sqrt[4]{2^3\cdot 3^2x^7}$ Se descomponen 48 y 72.

$= 2x\sqrt[4]{3} - x\sqrt[4]{72x^3}$ Se simplifica.

Luego, $\sqrt[4]{6x}\cdot(\sqrt[4]{8x^3} - \sqrt[4]{12x^6}) = 2x\sqrt[4]{3} - x\sqrt[4]{72x^3}$.

Multiplicación de radicales con diferente índice

Para multiplicar radicales con diferente índice, se reducen los radicales a radicales con igual índice. Luego, se procede como en el caso anterior.

Para hallar el índice común se realizan los siguientes pasos.

- **Primero,** se halla el mínimo común múltiplo entre los índices de los radicales, el cual será el índice común.
- **Luego,** se divide el índice común entre el índice de la raíz y se eleva la cantidad subradical a ese resultado.

EJEMPLOS

1. Encontrar los siguientes productos.

a. $4\sqrt[4]{2}\cdot 3\sqrt[6]{10}$

$4\sqrt[4]{2}\cdot 3\sqrt[6]{10}$

$= 4\sqrt[12]{2^3}\cdot 3\sqrt[12]{10^2}$ Se expresan como radicales de índice común.

$= 4\cdot 3\sqrt[12]{2^3\cdot 10^2}$ Se multiplican.

$= 12\sqrt[12]{800}$ Se simplifica.

Así, $4\sqrt[4]{2}\cdot 3\sqrt[6]{10} = 12\sqrt[12]{800}$.

b. $(-7\sqrt[3]{15x^5})(-5\sqrt{20x^3})$

$(-7\sqrt[3]{15x^5})(-5\sqrt{20x^3})$

$= (-7\sqrt[6]{(15x^5)^2})\cdot(-5\sqrt[6]{(20x^3)^3})$ Se expresan como radicales de índice común.

$= (-7)(-5)\sqrt[6]{225x^{10}\cdot 8.000x^9}$ Se multiplican.

$= 35\sqrt[6]{1.800.000x^{19}}$ Se resuelven los productos.

$= 35\sqrt[6]{2^6\cdot 3^2\cdot 5^5x^{19}}$ Se descompone 1.800.000.

$= 35\cdot 2\cdot x^3\sqrt[6]{3^2\cdot 5^5x}$ Se simplifica.

$= 70x^3\sqrt[6]{28.125x}$

Así, $(-7\sqrt[3]{15x^5})(-5\sqrt{20x^3}) = 70x^3\sqrt[6]{28.125x}$.

2. Hallar $(\sqrt[3]{20a^2})^2$.

$(\sqrt[3]{20a^2})^2 = \sqrt[3]{20a^2}\cdot\sqrt[3]{20a^2}$ Se expresa la potencia como producto.

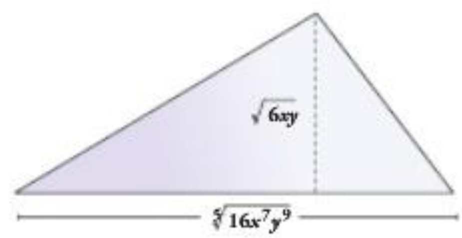
$= \sqrt[3]{20a^2\cdot 20a^2}$ Se multiplica.

$= \sqrt[3]{400a^4}$ Se resuelven los productos.

$= 2a\sqrt[3]{50a}$ Se simplifica.

Así, $(\sqrt[3]{20a^2})^2 = 2a\sqrt[3]{50a}$.

3. Hallar el área de la siguiente figura.



Como la figura es un triángulo, el área se obtiene así:

$A = \dfrac{\sqrt[5]{16x^7y^9}\cdot\sqrt{6xy}}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt[10]{(16x^7y^9)^2}\cdot\sqrt[10]{(6xy)^5}$ Se expresan como radicales de índice común.

$= \dfrac{1}{2}\sqrt[10]{(256x^{14}y^{18})\cdot 7.776x^5y^5}$ Se multiplica.

$= \dfrac{1}{2}\sqrt[10]{1.990.656x^{19}y^{23}}$ Se resuelven los productos.

$= \dfrac{1}{2}\sqrt[10]{2^{13}\cdot 3^5x^{19}y^{23}}$ Se descompone 1.990.656.

$= \dfrac{1}{2}2xy^2\sqrt[10]{1.944x^9y^3}$ Se simplifica.

$= xy^2\sqrt[10]{1.944x^9y^3}$

4. Ordenar los siguientes números de menor a mayor:

$\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}, \sqrt{3}$.

Para ordenar los números se expresan las raíces con radical común.

$\sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$

$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$

Luego, se comparan las cantidades subradicales:

$343 < 625 < 729$.

Por tanto, $\sqrt[4]{7} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

160. ¿Cómo se multiplican radicales con igual índice?

161. ¿Cómo se multiplican radicales con diferente índice?

Realiza el producto en cada caso. Luego, simplifica el resultado.

162. $\sqrt{2x} \times \sqrt{8x^3}$

163. $5\sqrt{3} \times 2\sqrt{a} + 9\sqrt{a^3}$

164. $-4\sqrt{27} \times 8\sqrt{12}$

165. $2a\sqrt[3]{a^4 b} \times b\sqrt[3]{a^5 b^7}$

166. $-\sqrt[4]{12x^3y^2} \times 13\sqrt[4]{4x^6y^9} \times \sqrt[4]{x^2y^5}$

167. $-\frac{2}{3}\sqrt[5]{120a^4b^8} \times \frac{1}{3}\sqrt[5]{4a^6b^7} \times \frac{21}{4}\sqrt[5]{16a^3b^{11}}$

Reduce cada grupo de radicales al mínimo común índice.

168. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5}$

169. $2\sqrt[3]{10}, \sqrt[6]{3}, 4\sqrt{15}$

170. $-5\sqrt{2x^3}, 7\sqrt[3]{3x^4}, 11\sqrt{4x^6y^9}$

171. $3\sqrt{2a}, 5\sqrt[3]{a^7}, 6\sqrt[5]{2a^2}, 8\sqrt[6]{3a^4}$

172. $\sqrt[6]{9}, \sqrt[8]{2}, \sqrt[3]{4x^2}, \sqrt[4]{3x^7}, \sqrt[12]{12x^9}$

Ordena cada grupo de números de mayor a menor.

173. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$

174. $\sqrt[3]{320}, \sqrt[8]{12}, \sqrt[6]{16}, \sqrt{5}$

175. $\sqrt[6]{11}, \sqrt[4]{7}, \sqrt[12]{17}, \sqrt[3]{4}$

176. $\sqrt[9]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt{49}, \sqrt[6]{10}$

Encuentra el producto. Luego, relaciónalo con su respectivo resultado.

177. $5\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$	**a.** $\sqrt[6]{72}$
178. $6\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[4]{a^2 b}$	**b.** $5\sqrt[12]{640}$
179. $\sqrt[4]{250} \cdot \sqrt[3]{10}$	**c.** $6\sqrt[12]{a^{10}b^7}$
180. $\sqrt[6]{3a^2 b} \cdot \sqrt[3]{2a^2 b}$	**d.** $5\sqrt[6]{200}$
181. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$	**e.** $a\sqrt[6]{12b^3}$

Determina los términos que deben ir en cada recuadro para que la igualdad sea verdadera. Justifica tu respuesta.

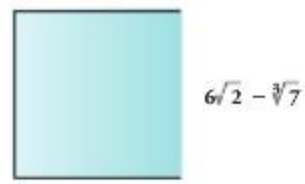
182. $\sqrt[\square]{2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{\square}$

183. $\sqrt[3]{a^2 b} \times \sqrt{\square} = ab\sqrt[6]{ab}$

184. $\sqrt{3x} \times \sqrt[\square]{18x^2} = 3x\sqrt[6]{\square}$

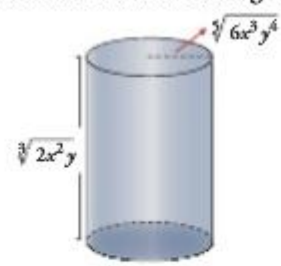
185. $\sqrt[3]{9m^2} \times \sqrt[\square]{27m^5n^8} = 3m^2n^2\sqrt[\square]{9mn^2}$

186. **Encuentra una expresión algebraica para expresar el área del cuadrado.**



187. **Encuentra el área de un triángulo equilátero cuyo lado tiene la misma medida que el lado de un cuadrado, como se muestra en la figura.**

188. **Determina el volumen del siguiente cuerpo.**



Halla el valor de $\frac{a \cdot b}{2}$ si:

189. $a = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ $\quad b = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$

190. $a = \sqrt{5 - \sqrt{3}}$ $\quad b = \sqrt[3]{7 - \sqrt{6}}$

191. **Demuestra que:**

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

División de radicales

Para hallar el cociente entre dos radicales, se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades del subradical se escriben dentro del mismo radical común, simplificando hasta donde sea posible. Si los radicales tienen diferente índice, se convierten en radicales con índice común.

EJEMPLOS

Realizar las siguientes divisiones.

a. $120\sqrt[5]{9a^4b^{13}} \div 24\sqrt[5]{3ab^2}$

$120\sqrt[5]{9a^4b^{13}} \div 24\sqrt[5]{3ab^2}$

$= \frac{120}{24}\sqrt[5]{\frac{9a^4b^{13}}{3ab^2}}$ Se dividen los coeficientes y las cantidades subradicales.

$= 5\sqrt[5]{3a^3b^{11}}$ Se simplifica.

$= 5b^2\sqrt[5]{3a^3b}$

Así, $120\sqrt[5]{9a^4b^{13}} \div 24\sqrt[5]{3ab^2} = 5b^2\sqrt[5]{3a^3b}$.

b. $2\sqrt[3]{x^7y^2} \div 6\sqrt{x^3y}$

$2\sqrt[3]{x^7y^2} \div 6\sqrt{x^3y}$

$= 2\sqrt[6]{(x^7y^2)^2} \div 6\sqrt[6]{(x^3y)^3}$ Se reducen a índice común.

$= 2\sqrt[6]{x^{14}y^4} \div 6\sqrt[6]{x^9y^3}$ Se resuelven las potencias.

$= \frac{2}{6}\sqrt[6]{\frac{x^{14}y^4}{x^9y^3}}$ Se divide.

$= \frac{1}{3}\sqrt[6]{x^5y}$ Se simplifica.

Así, $2\sqrt[3]{x^7y^2} \div 6\sqrt{x^3y} = \frac{1}{3}\sqrt[6]{x^5y}$.

Afianzo COMPETENCIAS

E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

E **Encuentra el cociente en cada caso.**

192. $8\sqrt{18} \div 4\sqrt{6}$

193. $2\sqrt[3]{6} \div 10\sqrt[3]{2}$

194. $12\sqrt[4]{27} \div 4\sqrt[4]{3}$

195. $48\sqrt[5]{60} \div 12\sqrt[5]{4}$

196. $-7\sqrt[3]{81x^2} \div \sqrt[3]{27x}$

197. $3\sqrt{1.250a^5b^7} \div \sqrt{10ab}$

E **Realiza la división indicada. Simplifica el resultado si es posible.**

198. $\frac{\sqrt[3]{9a^6b^{12}}}{\sqrt[6]{3a^5b}}$

199. $\frac{12\sqrt[5]{x}}{21\sqrt[6]{x}}$

200. $\frac{15\sqrt[3]{8x^3y}}{60\sqrt[5]{2x^2}}$

201. $\frac{18\sqrt{13w^4y^3}}{45\sqrt[4]{w^3y}}$

202. $\frac{-14\sqrt{2x}}{77\sqrt[3]{5x}}$

203. $\frac{\sqrt[6]{49x^4y^5}}{2\sqrt[8]{7xy^2}}$

204. $\frac{0,2\sqrt{8n^2m}}{0,5\sqrt[3]{2mn}}$

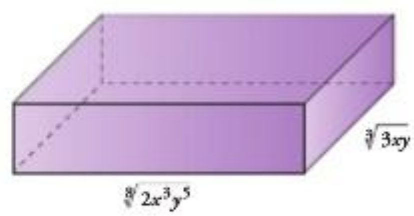
205. $\frac{\frac{4}{3}\sqrt[3]{2a^6b^7}}{\frac{6}{5}\sqrt{2ab^2}}$

R **Resuelve la operación indicada.**

206. $(\sqrt{8} + \sqrt{10}) \div \sqrt{2}$

207. $(\sqrt[3]{12m} + \sqrt{3m}) \div \sqrt[6]{3m}$

S **208. Encuentra una expresión para el lado que se desconoce en el siguiente sólido.**



El volumen del sólido es $V = 10\sqrt[6]{x^5y^7}$

S **Determina el valor de k si:**

209. $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \div \sqrt{5} = k(5 + \sqrt{10})$

Lo que viene...

En las siguientes páginas vas a trabajar la racionalización. Escribe en qué consiste la racionalización de denominadores.

3. Racionalización

Cuando un radical se simplifica en su forma más simple, también se tiene en cuenta que en el denominador no haya radicales y que ninguna fracción debe aparecer dentro de un radical.

Racionalizar una expresión fraccionaria en la que el denominador contiene uno o varios radicales consiste en expresarla como una fracción equivalente sin radicales en el denominador.

En la racionalización de fracciones se distinguen dos casos: cuando los denominadores son monomios y cuando los denominadores son binomios.

3.1 Racionalización de fracciones con denominadores monomios

Recurso imprimible | Actividad

Para racionalizar el denominador, se multiplican el numerador y el denominador por un radical, es decir, se complifica la fracción de tal forma que el radical del denominador tenga raíz exacta.

Recuerda que...

El factor que permite obtener una raíz exacta de $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, es $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

EJEMPLOS

1. Hallar el factor de cada radical, para que el radical final tenga raíz exacta.

a. $2\sqrt[3]{5a^2}$

El factor es $\sqrt[3]{25a}$ porque al realizar el producto $2\sqrt[3]{5a^2} \cdot \sqrt[3]{25a}$ se tiene:

$$2\sqrt[3]{5a^2} \cdot \sqrt[3]{25a} = 2\sqrt[3]{5a^2 \cdot 25a} = 2\sqrt[3]{125a^3} = 2\sqrt[3]{5^3a^3} = 2(5a) = 10a$$

b. $x\sqrt[5]{8x^2y}$

El factor es $\sqrt[5]{4x^3y^4}$ porque al realizar el producto $x\sqrt[5]{8x^2y} \cdot \sqrt[5]{4x^3y^4}$ se tiene:

$$x\sqrt[5]{8x^2y} \cdot \sqrt[5]{4x^3y^4} = x\sqrt[5]{32x^5y^5} = x\sqrt[5]{2^5x^5y^5} = x(2xy) = 2x^2y$$

2. Racionalizar cada expresión.

a. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}}$$ Se complifica por $\sqrt[3]{7^2}$.

$$= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{49}}{7}$$ Se resuelven los productos y se simplifica.

b. $\dfrac{2\sqrt{5a}}{3\sqrt[3]{4a}}$

$$\frac{2\sqrt{5a}}{3\sqrt[3]{4a}} = \frac{2\sqrt{5a}}{3\sqrt[3]{4a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{2a^2}}$$ Se complifica por $\sqrt[3]{2a^2}$.

$$= \frac{2\sqrt[6]{5^3a^3} \cdot \sqrt[6]{(2a^2)^2}}{3\sqrt[3]{2^3a^3}}$$ Se resuelven los productos.

$$= \frac{2\sqrt[6]{500a^7}}{3 \cdot 2 \cdot a} = \frac{2a\sqrt[6]{500a}}{6a} = \frac{\sqrt[6]{500a}}{3}$$ Se simplifica.

3.2 Racionalización de fracciones con denominadores binomios

Enlace web

Para racionalizar un denominador compuesto por dos términos, en una fracción, se tienen en cuenta dos casos:

- Si el denominador es un binomio que contiene radicales de índice dos, se debe complificar la fracción por el mismo binomio pero con el signo opuesto al segundo término. Esta expresión recibe el nombre de conjugado.

  Por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x} + y$ es $\sqrt{x} - y$.
- Si el denominador es un binomio que contiene radicales de índice tres, entonces, la fracción se debe complificar por el trinomio que convierte el producto del denominador en una suma o diferencia de cubos.

  Por ejemplo, si en el denominador se encuentra el binomio $\sqrt[3]{x} + y$, entonces, se debe complificar por el trinomio $(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\,y + (y)^2$, porque al realizar el producto $(\sqrt[3]{x} + y)\left[(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\,y + y^2\right]$, se obtiene $(\sqrt[3]{x})^3 + (y)^3 = x + y^3$.

Recuerda que...

Algunos productos notables relacionados con la racionalización son:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$= a^3 + b^3$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$= a^3 - b^3$

EJEMPLOS

1. Racionalizar cada expresión.

a. $\dfrac{2}{3 + \sqrt{7}}$

$$\frac{2}{3 + \sqrt{7}} = \frac{2}{3 + \sqrt{7}} \cdot \frac{3 - \sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}}$$ Se complifica por $3 - \sqrt{7}$.

$$= \frac{6 - 2\sqrt{7}}{(3)^2 - (\sqrt{7})^2}$$ Se resuelven los productos.

$$= \frac{6 - 2\sqrt{7}}{9 - 7}$$ Se resuelven las potencias.

$$= \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2} = 3 - \sqrt{7}$$ Se simplifica.

Por tanto, la racionalización de $\dfrac{2}{3 + \sqrt{7}}$ es $3 - \sqrt{7}$.

b. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}$$ Se complifica por $\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$.

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a})\cdot(2\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (2\sqrt{b})^2}$$ Se realizan los productos.

$$= \frac{a + 2\sqrt{ab}}{a - 4b}$$ Se resuelven las potencias y los productos.

Así, al racionalizar $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$, se obtiene $\dfrac{a + 2\sqrt{ab}}{a - 4b}$.

Matemática*mente*

¿Cómo se racionaliza un binomio como $\sqrt[3]{x} + 1$?

Historia de las matemáticas

Signo raíz $\sqrt{\ }$

El signo $\sqrt{\ }$ fue introducido por el matemático Christoph Rudolf en 1525.

Euler realizó una comparación entre el signo $\sqrt{\ }$ y la letra *r*, inicial del latín *radix*, que significa radical.

EJEMPLOS

2. Racionalizar y simplificar cada fracción.

a. $\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} = \frac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2}{(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2}$$

Se complifica por $(\sqrt[3]{6})^2-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2$.

$$= \frac{(7\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6})^2-7\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{4})^2}{(\sqrt[3]{6})^3+(\sqrt[3]{4})^3}$$

Se multiplica.

$$= \frac{7\sqrt[3]{72}-7\sqrt[3]{48}+7\sqrt[3]{32}}{6+4}$$

Se resuelven los productos y las potencias.

$$= \frac{14\sqrt[3]{9}-14\sqrt[3]{6}+14\sqrt[3]{4}}{10}$$

Se simplifican los radicales.

$$= \frac{7\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{6}+7\sqrt[3]{4}}{5}$$

Se simplifica por 2.

b. $\dfrac{a^3-b}{a-\sqrt[3]{b}}$

$$\frac{a^3-b}{a-\sqrt[3]{b}} = \frac{a^3-b}{a-\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{a^2+a\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}{a^2+a\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$$

Se complifica por $a^2+a\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2$.

$$= \frac{(a^3-b)(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a^3-(\sqrt[3]{b})^3}$$

Se multiplica.

$$= \frac{(a^3-b)(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a^3-b}$$

Se resuelven las potencias.

$$= a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$$

Se simplifica.

c. $\dfrac{8x+5}{2\sqrt[3]{x+4}-3}$

$$\frac{8x+5}{2\sqrt[3]{x+4}-3} = \frac{8x+5}{2\sqrt[3]{x+4}-3}\cdot\frac{(2\sqrt[3]{x+4})^2+(2\sqrt[3]{x+4})\cdot 3+(3)^2}{(2\sqrt[3]{x+4})^2+(2\sqrt[3]{x+4})\cdot 3+(3)^2}$$

Se complifica por $(2\sqrt[3]{x+4})^2+(2\sqrt[3]{x+4})\cdot 3+(3)^2$.

$$= \frac{(8x+5)(4\sqrt[3]{(x+4)^2}+6\sqrt[3]{x+4}+9)}{(2\sqrt[3]{x+4})^3-(3)^3}$$

Se multiplica.

$$= \frac{(8x+5)(4\sqrt[3]{(x+4)^2}+6\sqrt[3]{x+4}+9)}{8(x+4)-27}$$

Se resuelven las potencias.

$$= \frac{(8x+5)(4\sqrt[3]{(x+4)^2}+6\sqrt[3]{x+4}+9)}{8x+5}$$

Se resuelven las operaciones.

$$= 4\sqrt[3]{(x+4)^2}+6\sqrt[3]{x+4}+9$$

Se simplifica.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Explica los pasos que se tienen en cuenta para:

210. Racionalizar monomios.

211. Racionalizar binomios con índice radical dos.

212. Racionalizar binomios con índice radical tres.

Encuentra el factor para eliminar las raíces, en cada caso. Justifica tu respuesta.

213. $\sqrt{a}$

214. $3\sqrt{2}$

215. $\sqrt{a-b}$

216. $5\sqrt[3]{12ab^2}$

217. $9x\sqrt[7]{32x^3y}$

218. $\sqrt[6]{125a^4b^2c}$

219. $\sqrt{5}-x$

220. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

221. $\sqrt{2x}+\sqrt{3y}$

222. $\sqrt{x-1}+2$

223. $\sqrt[3]{4x^2}-y$

224. $\sqrt[3]{9a}+\sqrt[3]{2b^2}$

225. $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$

226. $5\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2y}$

Numera, en forma secuencial, los pasos para racionalizar la expresión.

227. ______ $\dfrac{3\sqrt[3]{4ab^2}}{b}$

228. ______ $\dfrac{6a}{\sqrt[3]{2a^2b}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{4ab^2}}$

229. ______ $\dfrac{6a}{\sqrt[3]{2a^2b}}$

230. ______ $\dfrac{6a\sqrt[3]{4ab^2}}{2ab}$

231. ______ $\dfrac{6a\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{2^3a^3b^3}}$

Racionaliza el denominador de cada fracción.

232. $\dfrac{7}{4\sqrt{3}}$

233. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{ax^2}}$

234. $\dfrac{1}{5w\sqrt[4]{25w}}$

235. $\dfrac{4mn}{\sqrt[5]{8m^2n^3}}$

236. $\dfrac{3\sqrt{ab}}{18\sqrt[4]{a^3b^2}}$

237. $\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}{a\sqrt{6b}}$

238. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{y\sqrt[4]{xy}}$

239. $\dfrac{4a^2-\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a-b}}$

Racionaliza cada expresión.

240. $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

241. $\dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}$

242. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

243. $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{6y}}{2\sqrt{6x}-\sqrt{3y}}$

244. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}$

245. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

246. $\dfrac{\sqrt{12}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

247. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{2-\sqrt{x+2}}$

248. $\dfrac{m^3-n}{m-\sqrt[3]{n}}$

249. $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

250. $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

251. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot(2-\sqrt{3})}$

En el movimiento pendular, el período T está determinado por la expresión

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde l: longitud y g: gravedad.

252. Racionaliza la expresión asociada al período de un péndulo.

253. Halla el período si $l=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$.

La velocidad del agua en canales abiertos está determinada por la fórmula de Manning.

$$v = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot S^{\frac{1}{2}}$$

254. Escribe en forma de radical la expresión de la velocidad del agua.

255. Racionaliza la fórmula de Manning.

Lo que viene...

En la próxima unidad trabajarás los números complejos. Consulta qué es un número imaginario y cómo se forma un número complejo.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Potenciación de números reales

Realiza las siguientes operaciones haciendo uso de la potenciación.

256. $5^{-1} + 4^{-1} - 3^{-1} + 6^{-1}$

257. $(3^{-1} + 4^{-1})^2$

258. $\dfrac{2^{-1} - 3^{-1}}{3^{-1} + 2^{-1}}$

259. $\dfrac{8^{-1} + 7^{-1}}{4^{-1}}$

En los siguientes ejercicios escribe el resultado como potencia de base 2 y exponente positivo.

260. $2^{-4} \cdot 4^3$

261. $14 \cdot 2^{-3} - 6 \cdot 2^{-3}$

262. $15 \cdot 2^5 + 2^5$

263. $4^2 \cdot 16^{-3} \cdot 8^3$

Resuelve.

264. Si la masa de una partícula es $2{,}5 \times 10^{-7}$ gramos, entonces, la masa de 5.000.000 de esas partículas, ¿es más próximo a 1 gramo, a 10 gramos, a 100 gramos o a 1.000 gramos?

Escribe los siguientes números en notación científica teniendo en cuenta que:

$$a = 4.900.000,\ b = 0{,}00000028,\ c = 450$$

Luego, calcula el valor de cada expresión.

265. $(a \cdot b)$

266. $(a \cdot b)c$

267. $\dfrac{a \cdot b}{c}$

268. $\dfrac{a \cdot c}{b}$

Radicación de números reales

Dados a y c, ¿qué valores puede tomar b para que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sea un número real?

269. $a = -3;\ c = 2$ $b =$ ________

270. $a = 2;\ c = 8$ $b =$ ________

271. $a = 1;\ c = 8$ $b =$ ________

272. $a = \dfrac{1}{3};\ c = \dfrac{2}{3}$ $b =$ ________

Simplifica cada uno de los siguientes radicales.

273. $\sqrt[6]{ab^4c} =$ ______

274. $\sqrt[3]{729\sqrt[3]{a^3}} =$ ______

275. $\sqrt[8]{a^2 + 2ab + b^2} =$ ______

276. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}} =$ ______

277. $\sqrt{5^2 - 3^2} =$ ______

278. $\sqrt{\sqrt[3]{(a^8b^4)^2}} =$ ______

279. $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}} =$ ______

280. $\sqrt[15]{m^{10}n^{15}x^{20}} =$ ______

Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en su forma simplificada.

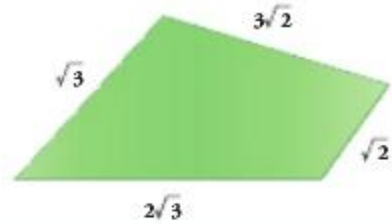
281. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab}$

282. $2\sqrt{3}(7\sqrt{5} + 5\sqrt{3})$

283. $(\sqrt{3x} - \sqrt{5y}) \div \sqrt{15xy}$

284. $\sqrt[4]{x^4 - y^4} \div \sqrt{x^2 - y^2}$

285. **Halla el perímetro de la figura.**



Racionalización

Racionaliza los denominadores.

286. $\dfrac{a}{\sqrt{a}} =$ ______

287. $\dfrac{5}{3\sqrt{2}} =$ ______

288. $\dfrac{6}{\sqrt{6}} =$ ______

289. $\dfrac{3}{4\sqrt{x}} =$ ______

290. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{y^2}} =$ ______

291. $\dfrac{8}{\sqrt[7]{xy^6}} =$ ______

292. $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$ ______

293. $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$ ______

294. $\dfrac{12}{a - \sqrt{b}} =$ ______

295. $\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} =$ ______

296. $\dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} =$ ______

297. $\dfrac{2ab}{\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}} =$ ______

PROBLEMAS PARA REPASAR

La masa del Sol es aproximadamente $2 \cdot 10^{33}$ gramos y una galaxia tiene en promedio 10^{11} veces la masa del Sol.

¿Cuál será la masa en kilogramos de una galaxia?

Si en el universo se cree que hay aproximadamente 100.000.000.000 galaxias, ¿cuál será la masa total de todas las galaxias del universo?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál será la masa en kilogramos de una galaxia?, si en el universo se cree que hay aproximadamente 100.000.000.000 galaxias, ¿cuál será la masa total de todas las galaxias del universo?

¿Cuáles son los datos del problema?

La masa del Sol es aproximadamente $2 \cdot 10^{33}$ gramos y una galaxia tiene en promedio 10^{11} veces la masa del Sol.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se halla la masa de una galaxia. Para ello, se escribe la masa del Sol en kilogramos así, $(2 \cdot 10^{33}) \div (10^{3}) = 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{-3} = 2 \times 10^{30}$.

Luego, se multiplica 2×10^{30} por 10^{11}, así:

$(2 \times 10^{30}) \times (10^{11}) = 2 \times 10^{41}$

Segundo, se calcula la masa total de todas las galaxias, para ello se escribe la cantidad aproximada de galaxias en notación científica, así:

$100.000.000.000 = 10^{11}$

Luego, se multiplica 10^{11} por la masa en kilogramos de una galaxia.

$(10^{11})(2 \times 10^{41}) = 2 \times 10^{52}$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones están realizadas correctamente. Luego, se tiene que la masa en kilogramos de una galaxia es 2×10^{41} y la masa total de todas las galaxias del universo es 2×10^{52}.

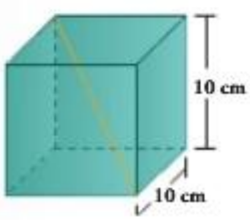
Responde.

298. La masa del universo estimada en 3×10^{55} g está concentrada casi por entero en los nucleones (partículas que constituyen los componentes principales del núcleo atómico). Para formar un gramo de masa se necesitan 6×10^{23} nucleones. ¿Cuántos nucleones aproximadamente hay en el universo?

299. Aproximadamente un 3,25% del mar es materia sólida disuelta y, en total, entre materia sólida y agua hay 330.000.000 millas cúbicas. Si una milla equivale a 1.852 m, ¿cuántos metros cúbicos de agua marina hay en total?

---

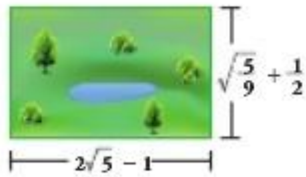
300. Determina la longitud de la diagonal de un cubo que tiene 10 cm de arista.



301. Calcula las dimensiones del cuadro.

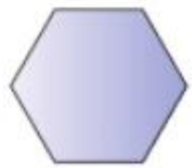
$$A = \frac{2{,}25x^{20}}{y^{8}}$$

302. Determina el perímetro del terreno.



$P =$ ______________________

303. Calcula la medida de la diagonal del siguiente polígono.



Medida del lado:
$\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{125x^2} - \sqrt[3]{27x^4y^2}\right)$.

$d =$ ______________________

304. ¿Si $v = \sqrt{m}$ y $w = \dfrac{1}{m}$, entonces, a qué equivale la expresión simplificada de $v^2 - w^2$?

---

305. Encuentra al menos cuatro números enteros positivos m, n, p, q distintos entre sí, que satisfagan las siguientes relaciones:

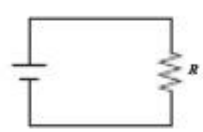
$$m + n = p + q, \sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q}$$

---

306. Si la base de un triángulo mide t y su altura mide $\dfrac{t}{2}$, entonces, ¿cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene igual área que el triángulo?

---

307. La expresión que permite calcular la intensidad de corriente de un circuito es: $I = \sqrt{\dfrac{P}{R}}$, donde P es la potencia y R es la resistencia.



Si la resistencia de un circuito es $R = 19$ ohmios y su potencia $P = 980$ vatios, ¿a cuánto equivale su intensidad?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para saber cuánta energía se libera en un temblor.

Un **sismo** es un temblor que se produce en la superficie de la tierra, originado por movimientos de masas que ocurren en su interior. Cuando tiene lugar en tierra firme, se llama terremoto y provoca desplazamientos de tierra, derrumbamiento de edificios y otros destrozos. Estos movimientos sísmicos son de diversa magnitud o intensidad.

La escala de Richter da la idea de la magnitud del terremoto. Esta escala tiene una graduación de 1 a 9 e indica la energía liberada que viene expresada en ergios (un ergio se puede definir como la energía que necesita una fuerza para mover la masa de un gramo a una distancia de un centímetro).

Observa la tabla que muestra la escala de Richter a continuación.

Escala de Richter	
Energía liberada (en ergios)	**Magnitud**
20.000.000.000.000.000.000	9
600.000.000.000.000.000	8
20.000.000.000.000.000	7
600.000.000.000.000	6
20.000.000.000.000	5
600.000.000.000	4
20.000.000.000	3
600.000.000	2
20.000.000	1

1. **Un terremoto de magnitud 5 en la escala de Ritcher, que va acompañado de un ligero temblor de tierra, tiene una energía de 20.000.000.000.000. ¿Cómo se escribe esta cantidad en notación científica?**

2. **Responde: ¿Cómo se expresa la energía de un terremoto de magnitud 8, aproximadamente, en la escala de Richter?**

3. **El lunes 11 de enero de 2010 se produjo un sismo de aproximadamente 4,5 en la ciudad de Manizales. Su epicentro fue en un municipio de Caldas.**

¿Cuál fue la energía liberada en ese terremoto?

Escribe esta cantidad en notación científica.

Trabaja con WIRIS

Objetivo: comprender la potenciación y la radicación en el conjunto de los números reales.

Descripción: aplicar las propiedades de la potenciación y la radicación. Además realizar las operaciones entre radicales en WIRIS.

Para acceder a WIRIS, ingresa y trabaja en línea en: herramientas.educa.madrid.org/wiris/ o www.wiris.net/santillana.cl/wiris/es/index.html

1. Activa la opción **Operaciones** en el menú, como se muestra en la ilustración.

2. Escribe potencias con la herramienta **Potencia**, en el menú **Operaciones**. Para escribir exponentes racionales, utiliza primero la herramienta **Fracción** y después la herramienta **Potencia**, como se muestra en la figura.

3. Para calcular potencias, se siguen los siguientes pasos:

   Primero, escribe la potencia en la ventana de trabajo. Por ejemplo, $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$.

   Luego, haz clic en el signo $=$, como se muestra en la figura.

4. Resuelve las siguientes potencias.

   a. $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+16^{0,5}$

   b. $\frac{1}{8^{-2}}\cdot\frac{1}{3^{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{15^{2}\cdot 20^{4}\cdot 5^{-2}}{(-5)^{3}(-8)^{3}(-9)^{2}}$

   c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+4{,}9^{0,5}-36^{\frac{3}{2}}-64^{0,3}+(-64)^{\frac{2}{3}}$

5. Escribe raíces con las herramientas **Raíz cuadrada** y **Raíz**, en el menú **Operaciones**, para escribir exponentes radicales, como se muestra en la figura.

6. Para realizar operaciones con radicales se siguen los siguientes pasos:

   Primero, escribe los radicales en la ventana de trabajo. Por ejemplo, $2\sqrt{45}-\sqrt{27}+\sqrt{20}$.

   Luego, haz clic en el signo $=$, como se muestra en la figura.

7. Realiza las operaciones indicadas.

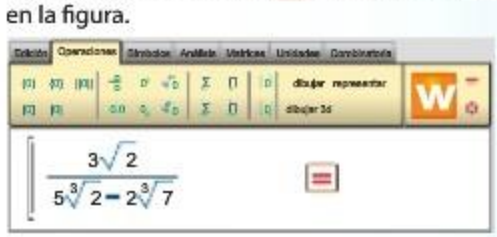
   a. $\frac{\sqrt[5]{100^{3}}\cdot\sqrt[15]{10}\cdot\sqrt[3]{100}}{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[5]{1.000}}$ **b.** $(5\sqrt{3})(7\sqrt[3]{6})$

8. Para racionalizar expresiones con radicales se siguen los siguientes pasos:

   Primero, escribe la expresión que vas a racionalizar en la ventana de trabajo, utilizando las herramientas estudiadas. Por ejemplo,

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{7}}.$$

   Luego, haz clic en el signo $=$, como se muestra en la figura.



3 Números complejos

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Aprender cuáles son los **números imaginarios** y cómo se forman.
- Comprender por qué existen los **números complejos** y su aplicación.
- Realizar operaciones entre **números complejos**.
- Solucionar problemas con **números complejos**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

- **2** Multimedia
- **1** Audios
- **1** Galerías
- **5** Imprimibles
- **4** Actividades
- **2** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Simplifica cada expresión.

a. $5^6 \times 5^2$ **b.** $(3^2)^3 \times 3^4$ **c.** $(-2)^{-2} \times 4^3$

2. Determina las raíces reales de los siguientes radicales.

a. $\sqrt{25}$ **b.** $\sqrt[3]{-27}$ **c.** $\sqrt{-36}$ **d.** $\sqrt[4]{81}$

3. Representa en el plano cartesiano los siguientes puntos.

a. $(-3, 5)$ **b.** $(4, 3)$ **c.** $(-5, -7)$ **d.** $\left(\frac{4}{5}, -6\right)$

4. Realiza las siguientes operaciones.

a. $\left(\frac{4}{5} - 6\right)\left(\frac{5}{2} + 3\right)$ **b.** $\sqrt{2}(\sqrt{6} - 2) - \sqrt{8}$

5. Resuelve los siguientes productos.

a. $(x + 8)(x - 3)$ **b.** $(5x - 8)(5x + 8)$

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

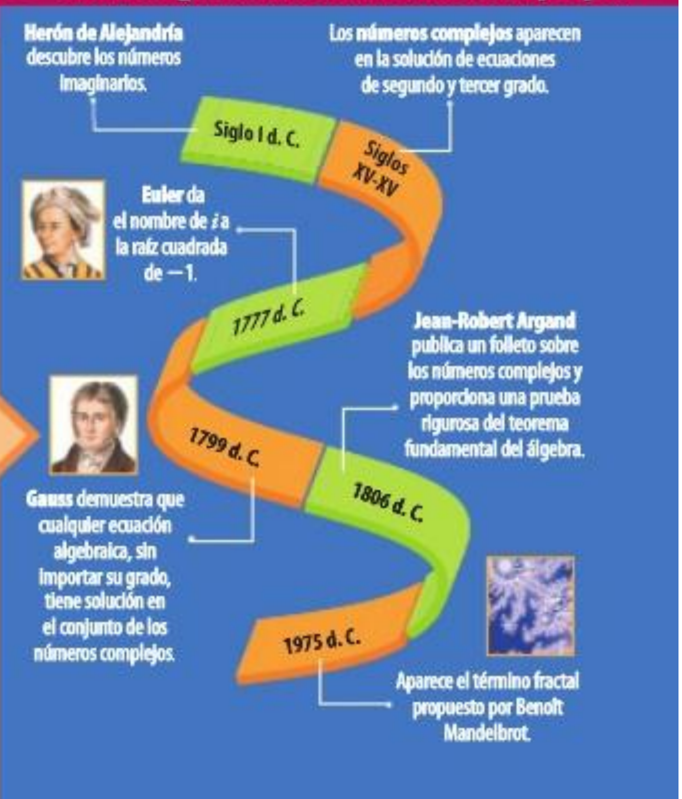
...Para entender los factores que influyen en la recepción de señales.

En electricidad es necesario utilizar los números complejos para estudiar fenómenos sinusoidales, los cuales se presentan en la emisión de señales eléctricas.

En la recepción de las señales se aprecia el estudio de los fasores, los cuales ayudan a conocer las interferencias, mejorando así el proceso de emisión y recepción de datos usada en las telecomunicaciones.

Lee más acerca de este tema en la página 84.

Cronología de los números complejos



1. Números imaginarios

Recurso imprimible

Los números imaginarios tienen variadas aplicaciones en diferentes campos. En electrónica para procesar, restaurar y optimizar señales; en la teoría de control que es un área que relaciona la ingeniería y la matemática, y en la física, donde los números imaginarios están relacionados con el electromagnetismo, la dinámica de fluidos, la mecánica cuántica y el análisis de vibraciones.

Las ecuaciones de la forma $x^2 + a = 0$, donde a es un número real positivo, no tienen solución en el conjunto numérico de los números reales porque el cuadrado de un número real es un número no negativo y al ser sumado con un número positivo su resultado no es cero.

Para dar solución a este tipo de ecuaciones, se generó un nuevo conjunto numérico denominado **números imaginarios**.

La unidad principal o unidad imaginaria se representa con la letra i y cumple las siguientes propiedades $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

Los números imaginarios que se expresan como el producto de un número real, diferente de cero, por la unidad imaginaria reciben el nombre de **imaginarios puros**.

Si $-s$ es un número real negativo, entonces, la raíz cuadrada principal de $-s$ es $\sqrt{-s} = \sqrt{s} \cdot i = \sqrt{s}\, i$.

Historia de las matemáticas

Números imaginarios

Un papiro matemático que se encontraba en el Valle de los Reyes, en una necrópolis del antiguo Egipto, muestra un ejemplo numérico que requería el uso de los números imaginarios en el proceso de calcular el volumen de una pirámide cuadrada truncada. En el primer siglo, el ingeniero y matemático Herón de Alejandría se encontró con una expresión para determinar la altura de la pirámide, asociada con los números imaginarios.

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

En 1777, el matemático suizo Leonhard Euler simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra i, probablemente porque aquellos números fueron llamados imaginarios.

EJEMPLOS

1. Escribir las siguientes raíces como números imaginarios puros.

a. $\sqrt{-49}$

$\sqrt{-49} = \sqrt{49}\, i$ Se extrae la raíz cuadrada principal de -49.

$= 7i$ Se halla la raíz.

b. $4\sqrt{-180}$

$4\sqrt{-180} = 4\sqrt{180}\, i$ Se extrae la raíz cuadrada principal de -180.

$= 4\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}\, i$ Se descompone 180.

$= 4 \cdot 6\sqrt{5}\, i$ Se simplifica.

$= 24\sqrt{5}\, i$ Se halla el producto.

2. Hallar la solución de la ecuación $4x^2 + 56 = 20$.

$4x^2 + 56 = 20$

$4x^2 = -36$ Se resta 56.

$x^2 = \frac{-36}{4}$ Se divide entre 4.

$x^2 = -9$ Se simplifica.

$x = \pm\sqrt{-9}$ Se despeja x.

$x = \pm 3i$ Se extrae la raíz.

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $3i$ y $-3i$.

1.1 Potencias de i

Recurso imprimible · Actividad

Las **potencias de la unidad imaginaria** i se obtienen aplicando las propiedades de la potenciación y la definición de i, i^2, como sigue:

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Estas cuatro potencias de i se denominan potencias básicas de i, ya que a partir de i^5 se repiten en períodos de cuatro. Así, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

En general, para determinar una potencia de i con exponente entero, se procede así:

- Se expresa el exponente de la forma $4n + r$, donde n es un número entero y r es un número entero positivo o cero.
- Se determina la potencia aplicando las propiedades de la potenciación y las potencias básicas de i.

Recuerda que...

Potencias básicas de i

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^0 = i^4 = 1$

EJEMPLOS

1. Hallar i^{21}.

$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1}$ Se expresa 21 como $4n + r$.

$= (i^4)^5 \cdot (i)^1$ Se aplican las propiedades de la potenciación.

$= (1)^5 \cdot i$ Se remplaza i^4.

$= i$ Se simplifica.

2. Simplificar la expresión $i^7 + 2i^{-1}$.

$i^7 + 2i^{-1} = i^{4 \cdot 1 + 3} + 2i^{4(-1) + 3}$ Se hallan i^7 e i^{-1}.

$= (1)^1 \cdot (-i) + 2(1)(-i)$ Se remplazan i^4 e i^3.

$= -i - 2i$ Se simplifica.

$= -3i$ Se resta.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono

1. Explica cómo se generó el conjunto de los números imaginarios.

Identifica cuáles de las siguientes expresiones corresponden a números imaginarios puros. Luego, exprésalos como números imaginarios.

2. $\sqrt{-7}$

3. $\sqrt{16}$

4. $\sqrt[3]{-8}$

5. $2\sqrt{-135}$

6. $8\sqrt{-720}$

7. $-9\sqrt[3]{-27}$

Halla la solución de cada ecuación.

8. $x^2 + 16 = 4$

9. $5x^2 + 40 = -60$

10. $-\frac{1}{6}t^2 = \frac{2}{3}$

11. $-y^2 + 8 = -5y^2$

12. $57 = 30 - x^2$

13. $-\frac{3}{15}x^2 = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}$

Halla las siguientes potencias de i.

14. i^{32}

15. i^{87}

16. i^{-4}

17. i^{349}

18. i^{-75}

19. $i^{2.012}$

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

20. Toda expresión de la forma $\sqrt{-a}$ representa un número imaginario.

21. $\sqrt[4]{-81} = 9i$.

22. Si $i = \sqrt{-1}$, entonces, $i^2 = -1$.

23. $i^{3n} = -i$.

Simplifica cada expresión.

24. $i^3 + i^6 + i^9 + \ldots + i^{96} + i^{99}$

25. $i^2 + i^4 + i^6 + \ldots + i^{98} + i^{100}$

26. Encuentra el número imaginario asociado a la fórmula de Herón

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a - b}{2}\right)^2}.$$

$$a = 28,\ b = 4,\ c = 15$$

27. Determina cuatro soluciones distintas para la ecuación $x^4 - 80 = 1$.

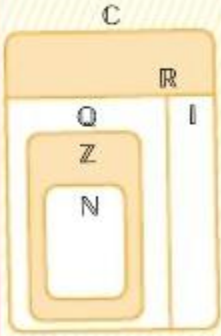
2. Conjunto de los números complejos

El conjunto de los números complejos está formado por los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Este conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{C}$. Es decir,

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

Recuerda que...

Entre los conjuntos numéricos se establecen las siguientes relaciones de inclusión.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

En todo número complejo $a + bi$ se distinguen dos partes: la parte real a y la parte imaginaria bi. Por ejemplo, en el número complejo $-2 + \sqrt{7}\,i$, la parte real es -2 y la parte imaginaria es $\sqrt{7}\,i$.

De lo anterior se deduce que todo número real a puede expresarse como un número complejo de la forma $a + 0i$. Así, todo número real es un número complejo. Por tanto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Del mismo modo, todo número imaginario se puede expresar como número complejo de la forma $bi = 0 + bi$. Así, todo número imaginario es un número complejo.

Todo número complejo se puede expresar de dos formas, así:

- En **forma binomial,** como se expresa por definición, es decir, de la forma $a + bi$. Por ejemplo, los números $4 + 5i$ y $8 - \sqrt{2}\,i$ están escritos en forma binomial.
- En **forma cartesiana,** como pareja ordenada donde la primera componente es la parte real y la segunda componente es el coeficiente de la parte imaginaria. En general, el número $a + bi$ en forma cartesiana es (a, b).

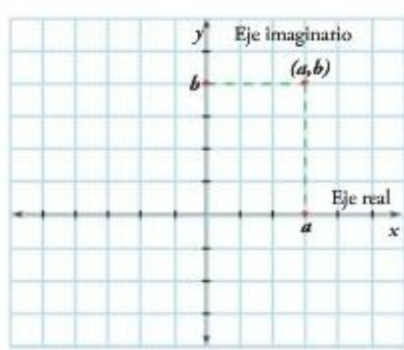
En relación con la forma cartesiana de los números complejos, se tiene que: dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales y sus partes imaginarias, respectivamente, son iguales. Es decir,

$$a + bi = c + di \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d.$$

2.1 Representación gráfica de los números complejos

Todo número complejo se puede representar geométricamente sobre el **plano complejo**. El plano complejo es un sistema de coordenadas rectangulares, en el cual el eje horizontal es el **eje real** y el eje vertical es el **eje imaginario**.

Así, para representar el número $a + bi$ se usa su forma cartesiana (a, b) donde la primera componente a se ubica sobre el eje real, y la segunda componente b se ubica sobre el eje imaginario.



EJEMPLOS

1. Identificar en los siguientes números complejos la parte real y la parte imaginaria. Luego, expresarlos en forma cartesiana.

a. $7 + \sqrt{-36}$

$7 + \sqrt{-36} = 7 + 6i$ Se transforma $\sqrt{-36}$.

Luego, la parte real es 7 y la parte imaginaria es $6i$.

Así, $7 + 6i$ en forma cartesiana es $(7, 6)$.

b. $-9 + \sqrt{144}$

$-9 + \sqrt{144} = -9 + 12 = 3$ Se simplifica.

$3 = 3 + 0i$ Se expresa 3 como $a + bi$.

Luego, la parte real es 3 y la parte imaginaria es $0i$.

Así, 3 en forma cartesiana es $(3, 0)$.

c. $-8\sqrt{-9} + 2\sqrt{-169} - 7$

$-8\sqrt{-9} + 2\sqrt{-169} - 7$

$= -8 \cdot (3i) + 2(13i) - 7$ Se transforma $\sqrt{-9}$ y $\sqrt{-169}$

$= -24i + 26i - 7$ Se multiplica.

$= 2i - 7$ Se simplifica.

Luego la parte real es -7 y la parte imaginaria es $2i$.

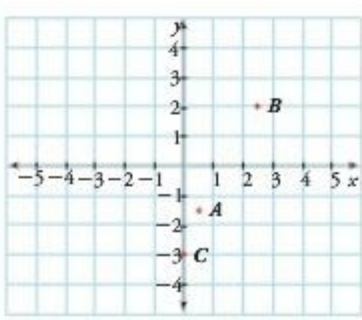
Así, $-7 + 2i$ en forma cartesiana es $(-7, 2)$.

2. Escribir en forma binomial cada uno de los números complejos representados en el plano complejo.

El punto A tiene como coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, luego su forma binomial es $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

El punto B tiene como coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$, luego su forma binomial es $\frac{5}{2} + 2i$.

El punto C tiene como coordenadas $(0, -3)$, luego su forma binomial es $0 - 3i = -3i$.



3. Hallar el valor de c y d, de tal forma que $\frac{2}{3}c - 15i$ sea igual a $-8 + 3di$.

Se igualan las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí, y se resuelven las ecuaciones obtenidas.

$\frac{2}{3}c - 15i = -8 + 3di$

$\frac{2}{3}c = -8$ y $-15 = 3d$

$c = -12$ y $-5 = d$

Por tanto, los valores de c y d son -12 y -5, respectivamente.

4. Representar los siguientes números complejos en el plano complejo.

a. $2 - i$

$2 - i$ en forma cartesiana es $P(2, -1)$.

b. $-3 + 4i$

$-3 + 4i$ en forma cartesiana es $Q(-3, 4)$.

c. $\frac{1}{2}i$

$\frac{1}{2}i$ en forma cartesiana es $S\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

d. $\frac{2}{5} - \frac{4}{3}i$

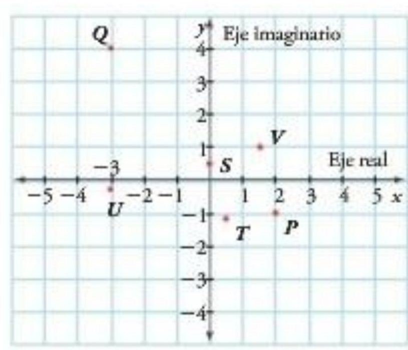
$\frac{2}{5} - \frac{4}{3}i$ en forma cartesiana es $T\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{3}\right)$.

e. $-3 - \frac{1}{4}i$

$-3 - \frac{1}{4}i$ en forma cartesiana es $U\left(-3, -\frac{1}{4}\right)$.

f. $\frac{3}{2} + i$

$\frac{3}{2} + i$ en forma cartesiana es $V\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Escribe un número complejo que cumpla cada condición.

28. La parte real sea el doble de la parte imaginaria.
29. La parte imaginaria sea negativa y la parte real sea un número mayor que -5.
30. El número complejo esté ubicado en el II cuadrante del plano complejo.
31. El número complejo esté ubicado en el IV cuadrante del plano complejo.
32. No tenga parte imaginaria.

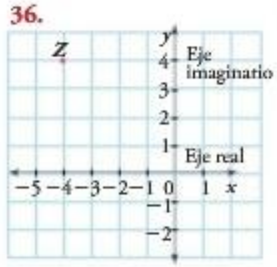
33. **Marca con una ✗ la casilla del conjunto al que pertenece cada uno de los siguientes números.**

Número	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-\sqrt{2}+i$					
$-\sqrt{2}$					
-1					
$-i$					
$-\sqrt{-9}$					
$\sqrt{16}$					

Escribe en forma binomial el número complejo representado en cada plano complejo.

34.

36.



35.

37.

Representa gráficamente los siguientes números complejos.

38. $2+i$
39. $-i+5$
40. $\sqrt{-25}\,i-\sqrt{100}$
41. $\dfrac{3+6i}{2}$
42. $\left(1,-\dfrac{3}{4}\right)$
43. $-\dfrac{2}{3}+4i$
44. $(-4,-2)$
45. $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{3}i$

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

46. $\sqrt{16}+\sqrt{-2}=2+i$ ( )
47. $\sqrt{-25}-9-5i+\sqrt{49}=-9i-7$ ( )
48. $\sqrt{16}+\sqrt{-2}=2+i$ ( )
49. $9\sqrt{-9}+5-\sqrt{9}+i=19i+2$ ( )
50. $\dfrac{3}{2}\sqrt{-4}-\dfrac{10}{4}-\dfrac{12}{2}i=-2-15i$ ( )

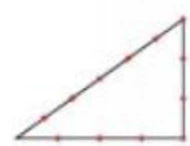
Determina el valor del término desconocido en cada caso.

51. $\sqrt{-36x^8}+\sqrt{-121x^8}-\sqrt{-169x^8}=324i$
52. $(\sqrt{-4y})(\sqrt{-2y^2})(\sqrt{-2y^3})=1.372i$

El gran matemático Diofanto construyó un triángulo con una cuerda en la cual había realizado 12 nudos equidistantes. El triángulo formado era un triángulo rectángulo con medidas de 3, 4 y 5; de tal manera que su área era de 6. Luego, con la misma cuerda, trató de construir otro triángulo rectángulo de forma que su área fuera de 7. Su planteamiento lo llevó a las siguientes soluciones, para un lado del triángulo.

$$x=\frac{43+\sqrt{-167}}{12}$$

$$x=\frac{43-\sqrt{-167}}{12}$$



53. Expresa las soluciones como números complejos.

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás el conjugado de un número complejo. Averigua qué es el conjugado.

2.2 Conjugado de un número complejo

Ampliación multimedia

El **conjugado de un número complejo** es un número que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria.

> El conjugado del número complejo z se simboliza $\overline{z}$.
> Si $z = a + bi$, entonces, $\overline{z} = a - bi$.

Un número complejo z y su conjugado $\overline{z}$ se ubican en forma simétrica respecto al eje real del plano complejo.

Por ejemplo, el conjugado de $z = 2 + 4i$ es $\overline{z} = 2 - 4i$ y su representación gráfica se observa en la figura 1.

El opuesto del número complejo $a + bi$ es $-a - bi$. Así, el opuesto del número complejo $-4 + 5i$ es $4 - 5i$.

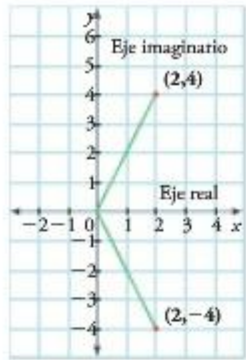


Figura 1

Matemática*mente*

Encuentra una condición para que un número complejo sea igual a su conjugado.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono

54. **Escribe en forma cartesiana el conjugado y el opuesto del siguiente número complejo.**

$z = a + bi.$

Completa cada enunciado si se conoce el número complejo.

55. La representación gráfica del conjugado de un número complejo se obtiene por una __________ respecto __________ del número complejo, en el plano complejo.

56. La representación gráfica del opuesto de un número complejo, se obtiene por una __________ respecto __________ del plano complejo, del número complejo dado.

Relaciona cada número complejo con su respectivo conjugado.

57. $-\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i$	**a.** $3 - 2i$
58. $3 + 2i$	**b.** $\sqrt{3}\,i + \sqrt{2}$
59. $-2 + 3i$	**c.** $-\sqrt{2}\,i$
60. $\sqrt{3} - 2i$	**d.** $-2 - 3i$
61. $\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i$	**e.** $\sqrt{3} + 2i$
62. $\sqrt{2}\,i$	**f.** $-\sqrt{2}\,i - \sqrt{3}$

Representa en el plano complejo cada número complejo, su conjugado y su opuesto.

63. $-3 + 7i$ **64.** $\dfrac{6 + 5i}{2}$

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

65. El conjugado de un número complejo es siempre un número real. ( )

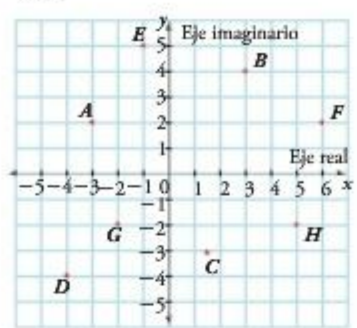
66. En el plano complejo, si el conjugado de un número complejo está ubicado en el III cuadrante, entonces, el número complejo está ubicado en el IV cuadrante. ( )

67. Si el conjugado de un número complejo es $-c + di$, entonces, el opuesto del número complejo es $c - di$. ( )

68. Comprueba la siguiente propiedad, mediante dos ejemplos.

$$\overline{\overline{z}} = z$$

69. Escribe en forma binomial el conjugado y el opuesto de cada número representado en el plano complejo.



2.3 Operaciones con números complejos

Actividad

Historia de las matemáticas

Gauss y los complejos

Gauss le concedió un estatus privilegiado a los números complejos en las matemáticas, gracias al teorema fundamental del álgebra.

Recurso imprimible

Adición de números complejos

Para sumar dos o más números complejos se suman, respectivamente, las partes reales y las partes imaginarias.

Si z y $w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces, $z + w = (a + c) + (b + d)i$

Por ejemplo, para sumar $(-12 + 7i)$ y $(4 + 25i)$ se procede así:

$(-12 + 7i) + (4 + 25i) = (-12 + 4) + (7 + 25)i$ Se suma cada parte del número complejo.

$= -8 + 32i$ Se resuelven las sumas.

La adición en el conjunto de los números complejos cumple con las siguientes propiedades.

Clausurativa: la suma de dos números complejos es otro número complejo. Es decir, si z y $w \in \mathbb{C}$, entonces, $z + w \in \mathbb{C}$. Por ejemplo:

$(3 + 8i) + (1 - 13i) = 4 - 5i$, donde $4 - 5i \in \mathbb{C}$.

Conmutativa: el orden en el que se realiza la suma de dos números complejos no altera el resultado. Es decir, si z y $w \in \mathbb{C}$, entonces, $z + w = w + z$.

Por ejemplo, si $z = 5 - 2i$ y $w = 8 + 6i$, entonces:

$z + w = (5 - 2i) + (8 + 6i) = 13 + 4i$

$w + z = (8 + 6i) + (5 - 2i) = 13 + 4i$

Luego, $z + w = w + z$.

Asociativa: los sumandos se pueden agrupar en diferentes formas sin alterar el resultado. Es decir, si x, w y $z \in \mathbb{C}$, entonces, $(x + w) + z = x + (w + z)$.

Por ejemplo, si $x = 4 + 3i$, $w = 2 + i$, $z = 1 + 9i$, entonces:

$$\begin{aligned}(x + w) + z &= [(4 + 3i) + (2 + i)] + (1 + 9i)\\ &= [6 + 4i] + (1 + 9i)\\ &= 7 + 13i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + (w + z) &= (4 + 3i) + [(2 + i) + (1 + 9i)]\\ &= (4 + 3i) + [3 + 10i]\\ &= 7 + 13i\end{aligned}$$

Luego, $(x + w) + z = x + (w + z)$.

Modulativa: existe un número complejo 0 tal que $z + 0 = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por ejemplo, si $z = 5 + 2i$, entonces: $z + 0 = (5 + 2i) + 0 = 5 + 2i = z$.

Invertiva: para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $-z$ tal que $z + (-z) = 0$.

Por ejemplo, si $z = 8 - 4i$, existe $-z = -8 + 4i$, tal que:

$z + (-z) = (8 - 4i) + (-8 + 4i) = 0$.

La adición de los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se expresa en forma cartesiana como: $z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Matemática*mente*

¿Es cierto que la suma de un número complejo y su conjugado es un número real?

Sustracción de números complejos

Para restar dos o más números complejos se restan, respectivamente, las partes reales y las partes imaginarias.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ con $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces, $z - w = (a - c) + (b - d)i$.

Recuerda que…

Sumar o restar dos o más números complejos es equivalente a reducir términos semejantes en una expresión.

Por ejemplo, la resta $(5 + 2i) - (8 + 7i)$ se realiza así:

$(5 + 2i) - (8 + 7i) = (5 - 8) + (2 - 7)i$ Se resta cada parte del complejo.

$= -3 - 5i$ Se resuelven las restas.

EJEMPLOS

1. Realizar la siguiente operación

$(2 - 5i) - (-3 + 8i) + (12i - 9)$.

$(2 - 5i) - (-3 + 8i) + (12i - 9)$

$= 2 - 5i + 3 - 8i + 12i - 9$ Se eliminan los signos de agrupación.

$= -4 - i$ Se reducen términos semejantes.

2. Encontrar $\overline{z + w}$ si $z = -15 + 7i$ y $w = 11 - 3i$.

$z + w = (-15 + 7i) + (11 - 3i)$ Se suman z y w.

$= -4 + 4i$ Se realizan las sumas.

Luego, se obtiene $\overline{z + w}$.

$\overline{z + w} = -4 - 4i$ Se halla el conjugado de $z + w$.

3. Hallar el número complejo z que cumple la siguiente igualdad.

$(7 + 4i) + z = 2 + 7i$

Se escribe $z = a + bi$.

$(7 + 4i) + (a + bi) = 2 + 7i$ Se remplaza z por $a + bi$.

$(7 + a) + (4 + b)i = 2 + 7i$ Se realiza la suma.

$7 + a = 2 \qquad 4 + b = 7$ Se igualan las partes reales e imaginarias.

$a = -5 \qquad b = 3$ Se despejan a y b, respectivamente.

Luego, $z = -5 + 3i$.

Por tanto,

$(7 + 4i) + (-5 + 3i) = 2 + 7i$

Afianzo COMPETENCIAS

Propongo · E Ejercito · R Razono

E **Realiza las siguientes adiciones.**

70. $(-4 + 5i) + (2 + 7i)$

71. $(17 - 8i) + (-20 - 3i)$

72. $\left(\frac{3}{2} + 4i\right) + \left(-10 + \frac{2}{3}i\right)$

73. $(3 - i) + (-17 - 6i) + (-10i + 2)$

74. $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i\right) + \left(-\frac{5}{4}i + 6\right) + \left(-\frac{8}{3}\right)$

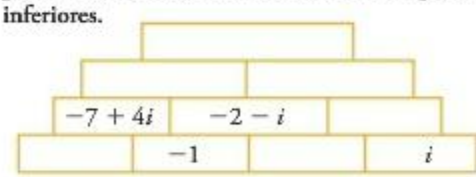
75. $\left(\frac{7}{2} + i\right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}i\right) + 2i$

76. $\left(-\frac{9}{4}i + 1\right) + \frac{7}{3}i + \left(\frac{5}{6} - 2i\right) + 16$

77. $\left(\frac{15}{4} - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{8}{5} + \frac{i}{3}\right) + \left(\frac{29}{12}i - 30\right)$

78. $\left(\sqrt{45} - \sqrt{-72}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \sqrt{50}\,i\right)$

E **79.** **Escribe los números que faltan de tal manera que cada número de la pieza superior corresponda a la suma de los números de las piezas inferiores.**



E **Determina el valor de cada expresión, sabiendo que**

$$z = 5 - 2i,\ w = -3 + 4i,\ v = \frac{1}{5} + \frac{3}{2}i.$$

80. $-w + (-z)$ **81.** $\overline{z - w} + v$

Resuelve las siguientes operaciones.

82. $(-i + 3) - (6 - 3i)$

83. $(4{,}6 - 8{,}1i) - (3{,}8 + 1{,}2i)$

84. $(12 - 3i) + (i - 13) + (1 + i) - i$

85. $(\sqrt{45}\,i - \sqrt{8}) + (\sqrt{-20} - i) + (4\sqrt{5}\,i + 3\sqrt{2})$

86. $\left(\frac{\sqrt{-72}}{5} + \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{3}{10}i - \frac{41}{12}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i\right)$

Encuentra el número complejo z, en cada caso.

87. $z + (3 - i) = 4 - 5i$

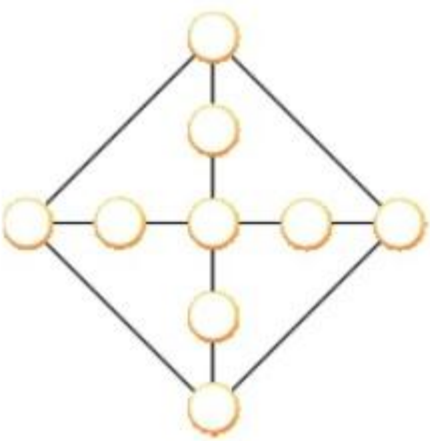
88. $2i + z = 6 + 4i$

89. $(5i + 3) - 4z = -8i + \sqrt{-9}$

90. $\left(\frac{3}{12} + \frac{1}{5}i\right) - z + 8i = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}i$

91. Ubica un número complejo en cada círculo de tal forma que la suma de los elementos de cada diagonal sea igual.

$2 - i$; $2 + 5i$; $4 - 2i$; $1 - 4i$; $3i$; $5 - 2i$; $1 + 2i$; $3i - 2$; $1 + 5i$



Escribe ✓ si la igualdad es cierta o ✗ en caso contrario. z y $w \in \mathbb{C}$. Justifica tu respuesta mediante un ejemplo.

92. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ ☐

93. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$ ☐

94. $\overline{\overline{z + w}} = z + w$ ☐

95. $z + (-w) = \overline{w} + z$ ☐

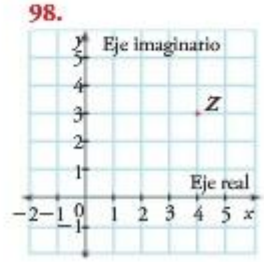
Encuentra los números complejos que cumplen cada condición.

96. Dos números complejos cuya diferencia sea un número real.

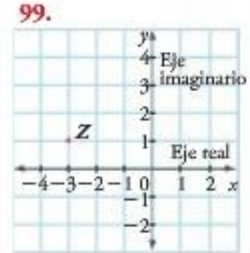
97. Dos números complejos cuyos conjugados suman 6.

Halla tres números complejos cuya suma sea igual al conjugado del número complejo representado en cada plano.

98.

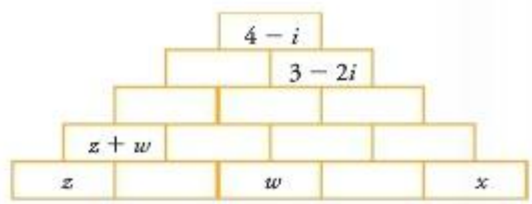


99.



100. Observa la forma como se construye la siguiente pirámide. Cada ladrillo en la pirámide se obtiene al sumar el valor de los dos que lo sostienen.

Si $z = 8 + 3i$ y $w = -10 + i$, determina el valor del número complejo x.



101. Ubica los siguientes números $-5 - 4i$, $-4 - 3i$, $-3 - 2i$, $-2 - i$, -1, i, $1 + 2i$, $2 + 3i$ y $3 + 4i$ en el cuadrado mágico, en el cual la suma de las filas, columnas y diagonales es siempre igual.

Lo que viene...

A continuación trabajarás operaciones con complejos ¿Cuál es el procedimiento para multiplicar complejos?

Multiplicación de números complejos

Para multiplicar dos números complejos se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se aplica la propiedad distributiva.
- **Luego,** se resuelven las potencias de i.
- **Finalmente,** se reducen términos semejantes.

En la multiplicación de los números complejos $(a + bi)$ y $(c + di)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 && \text{Se aplica la propiedad distributiva.}\\ &= ac + adi + bci + bd(-1) && \text{Se remplaza } i^2 \text{ por } -1.\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Se reducen términos semejantes.}\end{aligned}$$

Si $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces, $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

La multiplicación en el conjunto de los números complejos cumple las siguientes propiedades.

Clausurativa: la multiplicación de dos números complejos es un número complejo. Es decir, si z y $w \in \mathbb{C}$, entonces, $z \cdot w \in \mathbb{C}$. Por ejemplo:

$(5 - 3i)(-2 - 4i) = -10 - 20i + 6i + 12i^2 = -22 - 14i$, donde $-22 - 14i \in \mathbb{C}$

Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto. Es decir, si z y $w \in \mathbb{C}$, entonces, $z \cdot w = w \cdot z$. Por ejemplo:

Si $z = 3 - 6i$ y $w = 7 + 2i$, se tiene que:

$$\begin{aligned}z \cdot w &= (3 - 6i)(7 + 2i) \\ &= 21 + 6i - 42i - 12i^2 \\ &= 33 - 36i\end{aligned} \qquad \begin{aligned}w \cdot z &= (7 + 2i)(3 - 6i) \\ &= 21 - 42i + 6i - 12i^2 \\ &= 33 - 36i\end{aligned}$$

Como $z \cdot w = 33 - 36i$ y $w \cdot z = 33 - 36i$, entonces, $z \cdot w = w \cdot z$.

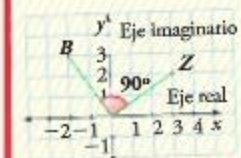
Asociativa: para multiplicar tres números complejos, se pueden agrupar o asociar de diferente forma y el resultado siempre es el mismo. Es decir, si x, w y $z \in \mathbb{C}$, entonces, $(x \cdot w) \cdot z = x \cdot (w \cdot z)$. Por ejemplo, si $x = 2 + 3i$, $w = 2 + i$ y $z = 4 - i$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(x \cdot w) \cdot z &= [(2 + 3i)(2 + i)] \cdot (4 - i) && \text{Se remplazan } x, w \text{ y } z.\\ &= [4 + 2i + 6i + 3i^2] \cdot (4 - i) && \text{Se multiplica.}\\ &= [1 + 8i] \cdot (4 - i) && \text{Se realizan las operaciones.}\\ &= 4 - i + 32i - 8i^2 && \text{Se multiplica.}\\ &= 12 + 31i && \text{Se reducen términos semejantes.}\\ x \cdot (w \cdot z) &= (2 + 3i) \cdot [(2 + i) \cdot (4 - i)] && \text{Se remplazan } x, w \text{ y } z.\\ &= (2 + 3i) \cdot [8 - 2i + 4i - i^2] && \text{Se multiplica.}\\ &= (2 + 3i) \cdot (9 + 2i) && \text{Se realizan las operaciones.}\\ &= 18 + 4i + 27i + 6i^2 && \text{Se multiplica.}\\ &= 12 + 31i && \text{Se reducen términos semejantes.}\end{aligned}$$

Modulativa: existe un número complejo 1 tal que $z \cdot 1 = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Por ejemplo, si $z = \sqrt{2} + 5i$, entonces: $z \cdot 1 = (\sqrt{2} + 5i) \cdot 1 = \sqrt{2} + 5i = z$

Recuerda que...

En el plano complejo, cuando se multiplica un número complejo por i, se está aplicando un giro de 90° al punto multiplicado.



Recuerda que...

Si $z = a + bi$, entonces, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

División de números complejos

Para dividir dos números complejos se multiplican el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor. Luego, se realizan las operaciones indicadas.

En general, si z y $w \in \mathbb{C}$, con $z = a + bi$, $w = c + di$ y $w \neq 0$, entonces:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

EJEMPLOS

1. Realizar la división $(6 + 4i) \div (5 - i)$.

$(6 + 4i) \div (5 - i) = \dfrac{6 + 4i}{5 - i}$ — Se expresa la división como fracción.

$= \dfrac{(6 + 4i)(5 + i)}{(5 - i)(5 + i)}$ — Se multiplica por el conjugado de $5 - i$.

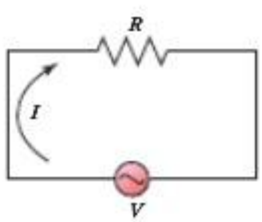
$= \dfrac{30 + 6i + 20i + 4i^2}{5^2 + 1^2}$ — Se realizan las multiplicaciones.

$= \dfrac{26 + 26i}{26}$ — Se reducen términos semejantes y se remplaza i^2 por -1.

$= \dfrac{26}{26} + \dfrac{26}{26}i$ — Se expresa el resultado como $a + bi$.

$= 1 + i$ — Se simplifica.

2. Resolver el siguiente problema. La impedancia es un fenómeno físico que se describe por medio de oscilaciones y es de gran importancia en ingeniería electrónica. La impedancia afecta la corriente en un circuito y se determina mediante la fórmula:



$$Z = \frac{V}{I}, \text{ donde } V \text{ es el voltaje e } I \text{ es la corriente.}$$

Determinar la impedancia cuando $V = 1{,}5 - 0{,}6i$ e $I = -0{,}3i$.

$Z = \dfrac{V}{I} = \dfrac{1{,}5 - 0{,}6i}{-0{,}3i}$ — Se remplazan V e I en la fórmula.

$= \dfrac{(1{,}5 - 0{,}6i) \cdot (0{,}3i)}{(-0{,}3i) \cdot (0{,}3i)}$ — Se multiplica por el conjugado de $-0{,}3i$.

$= \dfrac{0{,}45i - 0{,}18i^2}{-0{,}09i^2}$ — Se realizan las multiplicaciones.

$= \dfrac{0{,}18 + 0{,}45i}{0{,}09}$ — Se remplaza i^2 por -1.

$= \dfrac{0{,}18}{0{,}09} + \dfrac{0{,}45}{0{,}09}i$ — Se expresa como $a + bi$.

$= 2 + 5i$

Luego, la impedancia es $2 + 5i$.

Inverso multiplicativo

Actividad

El **inverso multiplicativo** de todo complejo $z \neq 0$, es otro número complejo que se simboliza z^{-1}, tal que $z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Si $z \in \mathbb{C}$, con $z = a + bi$ y $z \neq 0$, entonces, $z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

Recuerda que...

Los números complejos están relacionados con los fractales, cuyas imágenes se aprecian en el universo.

EJEMPLOS

1. Hallar el inverso multiplicativo de $z = 9 + 8i$.

Como $z = 9 + 8i$, entonces, z^{-1} se obtiene así:

$$z^{-1} = \frac{9 - 8i}{9^2 + 8^2}$$ Se remplazan a y b en z^{-1}.

$$= \frac{9 - 8i}{145}$$ Se resuelven las operaciones.

$$= \frac{9}{145} - \frac{8}{145}i$$ Se expresa como $a + bi$.

2. Resolver cada ecuación.

a. $x(-5 + 4i) = 4 - 3i$

$$x(-5 + 4i) = 4 - 3i$$

$$x(-5 + 4i) \cdot (-5 + 4i)^{-1} = (4 - 3i)(-5 + 4i)^{-1}$$ Se multiplica por el inverso de $-5 + 4i$.

$$x = (4 - 3i)\frac{(-5 - 4i)}{(-5)^2 + 4^2}$$ Se halla el inverso de $-5 + 4i$.

$$x = \frac{-20 - 16i + 15i + 12i^2}{25 + 16}$$ Se realizan las operaciones.

$$x = \frac{-32 - i}{41}$$ Se simplifica.

$$x = -\frac{32}{41} - \frac{1}{41}i$$ Se expresa como $a + bi$.

Por tanto, $x = -\frac{32}{41} - \frac{1}{41}i$.

b. $\frac{2 - 4i}{w} = 1 - i$

$$\frac{2 - 4i}{w} = 1 - i$$

$$2 - 4i = (1 - i) \cdot w$$ Se multiplica por w.

$$\frac{2 - 4i}{1 - i} = w$$ Se divide entre $1 - i$.

$$\frac{(2 - 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = w$$ Se multiplica por el conjugado de $1 - i$.

$$\frac{2 + 2i - 4i - 4i^2}{1^2 + 1^2} = w$$ Se realizan las multiplicaciones.

$$\frac{6 - 2i}{2} = w$$ Se reducen términos semejantes y se remplaza i^2 por -1.

$$3 - i = w$$ Se expresa como $a + bi$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

102. **Numera de 1 a 4 los pasos que se deben seguir para multiplicar números complejos.**

- ☐ Expresar los factores de la forma $a + bi$.
- ☐ Remplazar las potencias de i^2 por -1.
- ☐ Multiplicar los números complejos aplicando la propiedad distributiva.
- ☐ Reducir términos semejantes.

Realiza las siguientes multiplicaciones de números complejos.

103. $(4 + 5i)(8 - 3i)$

104. $(3 - 2i)(6i)$

105. $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{-75}$

106. $\left(\frac{1}{2} + 5i\right)(4 + 2i)$

107. $(-7)(3 + 3i)$

108. $\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{7}{9} - \frac{6}{4}i\right)$

109. $(1 - i)(8 - 2i)$

110. $\frac{1}{4}i(-8i)(7i)$

111. $-\frac{8}{7}i\left(\frac{1}{2} - \frac{6}{5}i\right)$

112. $5i\left(-7 + \frac{15}{5}i\right)\left(\frac{3}{9}i\right)$

Resuelve los ejercicios 113 a 116 con el siguiente proceso. Realiza el producto de cada par de números complejos. Luego, representa gráficamente el resultado en un mismo plano.

$$(-5 - 2i)i,\ (-5 - 2i)i^2,$$
$$(-5 - 2i)i^3,\ (-5 - 2i)i^4$$

113. Nombra los puntos de cada producto P, Q, R y S, respectivamente, y ubica el punto A en $(0, 0)$.

114. Determina el ángulo que hay entre los lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$ y $\overline{AS}$.

115. ¿Cuál es la potencia de i para la cual los productos en cada una de las multiplicaciones no cambia?

116. Determina la regularidad que hay entre los puntos P, Q, R y S.

117. **Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que:**

$$z = -3 + i;\ w = \frac{2}{5} - 7i,$$
$$\text{y } u = \frac{8}{7} - 4i$$

$\times$	$2 - 7i$	$\frac{1}{3} - 5i$	$\frac{1}{5} - \frac{6}{9}i$
z			
w			
u			

Divide cada par de números complejos.

118. $\frac{2 - 4i}{1 + i}$

119. $\frac{3 - 2i}{2 + i}$

120. $\frac{i^3}{i}$

121. $\frac{-5 + 7i}{-2 + 5i}$

122. $\frac{5 - 4i}{1 + i}$

123. $\frac{-i}{-1 + 2i}$

124. $\frac{3 + 7i}{-i}$

125. $\frac{2 - 4i}{1 + i}$

126. $\frac{9 - i}{6 + 3i}$

127. $\frac{11 - 3i}{1 + 4i}$

128. $\frac{-4}{11 + 5i}$

129. $\frac{15 - 4i}{i^2 + i}$

Calcula el inverso multiplicativo de los siguientes números complejos.

130. $-3 + 4i$

131. $7 + i$

132. $-4 + 12i$

133. $4 - 3i$

134. $23 + 6i$

135. $17 - 13i$

Determina el número complejo z, en cada caso.

136. $(-7 + i) \cdot z = 7$

137. $z \cdot (-5 + 4i) = 4 - 3i$

138. $(6 + 7i) \cdot z = 3i$

139. $z \cdot -i\left(-7 + \frac{15}{5}i\right) = 1 + 2i$

140. $\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{7}{10}i - 4\right) \cdot z$

141. $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}i\right) \cdot z = \left(\frac{51}{16} - \frac{9}{8}i\right)$

Determina el valor de cada expresión, si $z = 6 + 2i$, $w = 21 - i$, $v = 27i$.

142. $\dfrac{z}{w} - v$

143. $\dfrac{w - z + v}{-w}$

144. $\dfrac{z \cdot w}{v}$

145. $\dfrac{-v}{w + z} + w$

146. $\dfrac{w - v}{w + z} + 1$

147. $\dfrac{v}{w + z} + \dfrac{w}{v - w}$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta con un ejemplo.

148. El inverso multiplicativo de todo número complejo siempre es un número complejo. ( )

149. El producto de dos números complejos es siempre un número complejo. ( )

150. La división de todo número complejo por su conjugado es igual a 1. ( )

151. Un número complejo elevado al cuadrado siempre es igual a un número real. ( )

Encuentra el factor desconocido en cada una de las expresiones.

152. $\dfrac{2 - 4i}{\boxed{}} = 1 - i$

153. $\dfrac{\boxed{}}{-7 + 3i} = 2 + 8i$

154. $\dfrac{\boxed{}}{9 + 2i} = -i^3$

155. $\dfrac{2 - 4i}{1 + i} = \boxed{}$

156. $i^2 = \dfrac{\boxed{}}{1 + 2i}$

157. $\dfrac{-2 - 2i}{\boxed{}} = 3i - 2$

158. Encuentra el error que se cometió en el siguiente razonamiento. Explica tu respuesta.

$$(-2) \cdot (-2) = 4$$
$$\sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4}$$
$$\sqrt{(-2)} \cdot \sqrt{(-2)} = 2$$
$$(\sqrt{2}\, i) \cdot (\sqrt{2}\, i) = 2$$
$$(\sqrt{2})^2 \cdot i^2 = 2$$
$$2 \cdot (-1) = 2$$
$$-2 = 2$$

159. Ubica los signos $+$, $-$, $\times$ y $\div$ para que la igualdad sea correcta.

$$12i \,\boxed{}\, 6 \,\boxed{}\, 3i \,\boxed{}\, 4i \,\boxed{}\, 5i = 20 + 5i$$

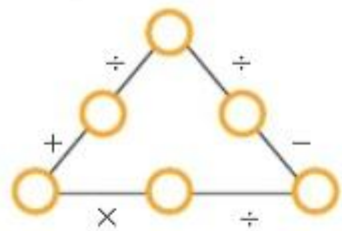
160. Determina el número complejo z para que la siguiente igualdad sea válida.

$$(2 + i)z \cdot (2 - i) = 10 - 4i$$

161. Halla el valor de a para que el siguiente cociente corresponda a un imaginario puro.

$$\frac{(3 + 2i)(a + 3i)}{(3i + 1)(2i + 1)}$$

162. Determina seis expresiones para completar el triángulo, de manera que el resultado de las operaciones por cada lado sea el mismo.



Resuelve.

163. Si $C = \dfrac{(1 - i)^9}{1 - i^9} + \dfrac{(1 + i)^{13}}{1 - i^{13}} + \dfrac{(1 + i)^{17}}{1 - i^{17}}$, halla el valor de $(C \div 4) + 5$.

164. Calcula el valor de P^{-1}, si

$$P = (1 - i)^6\left(\frac{2}{1 + i} - 1\right)\left(\frac{4}{1 + i} - 2\right)\left(\frac{6}{1 - i} - 3\right)$$

165. Determina la impedancia, Z, mediante la fórmula $Z = \dfrac{V}{I}$, cuando $V = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{10}i$ e $I = \dfrac{2}{10}i$.

166. Utiliza la expresión $Z = \dfrac{V}{I}$, para hallar I. Si $Z = \dfrac{3}{2} + 8i$ y $V = \dfrac{8}{5} - \dfrac{2}{10}i$.

En un circuito, si las inductancias se encuentran en paralelo, la impedancia total está determinada por la siguiente fórmula.

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

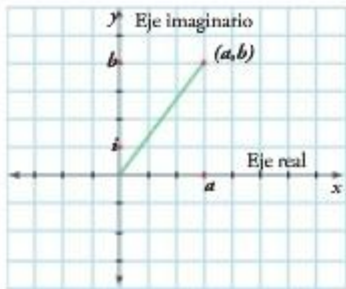
167. Encuentra Z_T, si $Z_1 = 4 + i$ y $Z_2 = -6 + 2i$.

168. Halla Z_1, si $Z_T = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{i}{4}$ y $Z_2 = \dfrac{5}{3} - 9i$.

Norma de un número complejo

Enlace web

La **norma de un número complejo** es la distancia del punto que representa al número complejo hasta el origen del plano complejo.



En la figura se representa el número complejo $z = a + bi$ y la distancia del punto (a, b) al origen.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene la expresión para determinar la norma de un número complejo así:

La norma del número complejo $z = a + bi$, que se simboliza $|z|$, es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EJEMPLOS

1. Hallar la norma de cada número complejo. Luego, realizar la representación en el plano complejo.

a. $z = 4 - i$

$|z| = \sqrt{4^2 + (-1)^2}$ Se remplazan a y b.

$= \sqrt{16 + 1}$ Se realizan las operaciones.

$= \sqrt{17}$ Se obtiene la norma.

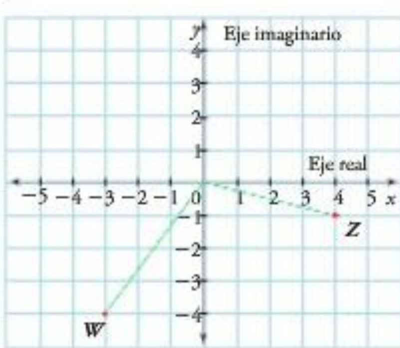
b. $w = -3 - 4i$

$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$ Se remplazan a y b.

$= \sqrt{9 + 16}$ Se realizan las operaciones.

$= \sqrt{25}$ Se obtiene la norma.

$= 5$



2. Calcular la norma del número $z = -5 + 6i$ y de su conjugado. Luego, realizar la representación gráfica.

Primero, se halla la norma de $z = -5 + 6i$ y su conjugado así:

$|z| = |-5 + 6i|$ $\quad$ $|\bar{z}| = |-5 - 6i|$

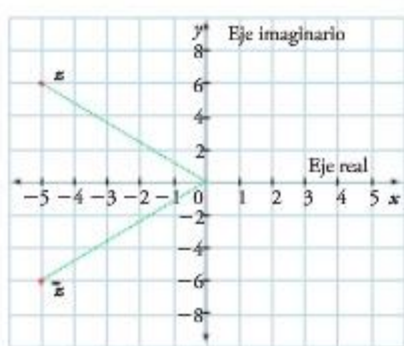
$= \sqrt{(-5)^2 + 6^2}$ $\quad$ $= \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{25 + 36}$ $\quad$ $= \sqrt{25 + 36}$

$= \sqrt{61}$ $\quad$ $= \sqrt{61}$

Por tanto, la norma de un número complejo y la norma del conjugado del mismo número complejo son iguales.

La representación gráfica es:

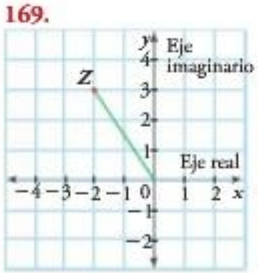


Afianzo COMPETENCIAS

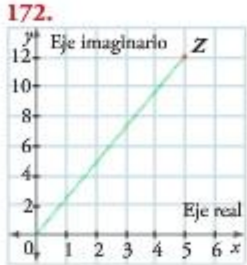
Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Halla la norma de los números complejos que están representados en cada plano.

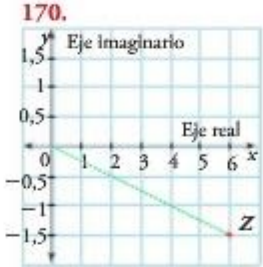
169.



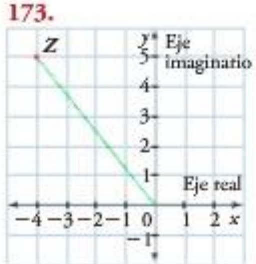
172.



170.

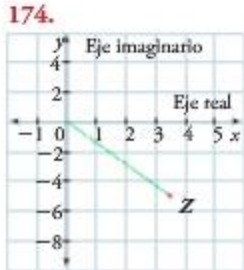


173.



171.

174.



Calcula la norma de los siguientes números complejos.

175. $6 + 4i$

176. $-12 - 5i$

177. $1 + i$

178. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}i$

179. $-2i$

180. $-i$

181. i

182. $-1 + \frac{7}{2}i$

183. $-\frac{6}{9} - i$

184. $7i$

185. $5 - 3i$

186. $6 + 6i$

187. $-\frac{5}{3} + i$

188. $-\frac{7}{3} + 4i$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

189. La norma de un número complejo es un número complejo. ( )

190. La norma de un número complejo es la menor distancia que hay del punto dado a un punto cualquiera del plano complejo. ( )

191. La norma de un número complejo siempre es un número real positivo. ( )

Escribe = o ≠ según corresponda, teniendo en cuenta que $z = 3 - 4i$, $v = 8 - 5i$ y $w = 5 + 12i$.

192. $|z + w| \square\ 5$

193. $|v + w - z| \square\ 11$

194. $|w \cdot v| \square\ 10$

195. $|v \div z| \square\ 5$

196. $|v + z| - |w| \square\ 1$

197. $|z \cdot w| \square\ 30$

198. $|-z + v| \square\ 17$

199. $|w \div v| \square\ 100$

200. $|v + z| \cdot |w| \square\ 150$

201. $|z \cdot v| + |w| \square\ 60$

Encuentra un número complejo que cumpla con las siguientes condiciones.

202. La norma sea la misma del número complejo $4 - 6i$.

203. La norma sea mayor que 5.

204. La norma sea mayor que la de $-\frac{5}{4}i$.

Resuelve teniendo en cuenta que

$$u = 6 - 7i,\ v = -11 + i,\ w = 5 + 8i.$$

205. Si $x = \frac{u}{|u|}$, halla la norma de x.

206. Si $y = \frac{v}{|v|}$, halla la norma de y.

207. Si $z = \frac{w}{|w|}$, halla la norma de z.

208. Formula una conclusión sobre las normas de x, y y z.

209. Resuelve.

Determina la norma de la impedancia, Z, si $Z = \frac{V}{I}$, cuando $V = 12 + 5i$ e $I = -3 + 4i$.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Números imaginarios

Escribe las siguientes raíces como números imaginarios puros.

210. $\sqrt{-81} =$ ______ **212.** $\frac{2}{5}\sqrt{-144} =$ ______

211. $7\sqrt{-4} =$ ______ **213.** $-3\sqrt{-96} =$ ______

Simplifica cada expresión.

214. $i^5 + i^{-5} =$ ______

215. $i^7 \cdot i^{69} =$ ______

216. $4(i^{11})^3 - \frac{3}{i} =$ ______

217. $3i^5 + 6i^9 - 9i^{12} =$ ______

Números complejos

Identifica en los siguientes números complejos la parte real y la parte imaginaria.

218. $-4 + \sqrt{-10}$

Parte real ______ Parte imaginaria ______

219. $\frac{6}{7} - \sqrt{-121}$

Parte real ______ Parte imaginaria ______

220. $-\frac{1}{2}\sqrt{-50} + \sqrt{-8}$

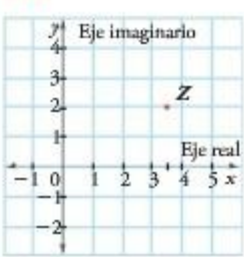
Parte real ______ Parte imaginaria ______

221. $7 + \frac{4}{3}\sqrt{-5}$

Parte real ______ Parte imaginaria ______

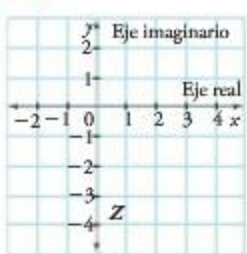
Escribe en forma binomial el número complejo representado en cada plano complejo.

222.



(______ , ______)

223.



(______ , ______)

Representa, en tu cuaderno, cada número complejo y su respectivo conjugado, sobre el plano complejo.

224. $4 + i$

225. $-1 - i$

226. $-12 - 9i$

227. $6 - 2i$

228. $-\frac{5}{4} + \frac{2}{3}i$

229. $-\frac{4}{7} - i$

230. $-\frac{7}{4} + \frac{6}{3}i$

231. $-\frac{13}{26} + \frac{7}{3}i$

Efectúa y simplifica.

232. $(5 + 8i) + (5 - 8i)$

233. $-(3 - i) \div (6 - i)$

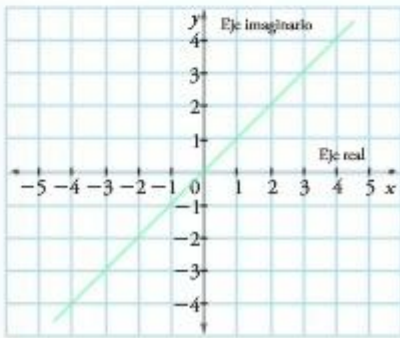
234. $(4 - i) - (7 + 12i)$

235. $(7 + i) \cdot (8 - 5i)$

236. $(3 - i) \cdot \left(\frac{4}{5} + 3i\right)$

237. $(2 - i) \div \left(\frac{-2}{7} + 9i\right)$

La siguiente gráfica muestra los puntos del plano complejo que tiene la forma $z = a + ai$, en la cual $a \in \mathbb{R}$.



Representa en el plano complejo los siguientes conjuntos de puntos.

238. $\bar{z} = a - ai$

239. $\bar{z} = -a + ai$

Realiza las siguientes operaciones.

240. $\dfrac{i^{98} \times i^{1}}{i^{92}} =$ ________

241. $\left(\frac{7}{2} - i\right) + \left(3 - \frac{1}{5}i\right) =$ ________

242. $\dfrac{(9 + 5i)}{-(3 - 6i)} =$ ________

243. $(-2 + 3i)\left(\frac{-3}{2} - \frac{2}{3}i\right) =$ ________

244. $\left(\frac{5}{2} - \frac{16}{3}i\right) \div (2 + 5i) =$ ________

245. $\dfrac{(9 + 5i)}{-(3 - 6i)} + \frac{3}{5} + 7i =$ ________

Calcula las siguientes expresiones teniendo en cuenta que $w = -2 + 3i$, $z = -4 + 6i$.

246. $z - w =$ ________

247. $\overline{z \cdot w} =$ ________

248. $z \cdot w =$ ________

249. $\overline{z \cdot w} + \bar{w} =$ ________

250. $\dfrac{w}{z} =$ ________

251. $\bar{z} \div \bar{w} =$ ________

Halla la norma de los siguientes números complejos.

252. $(3 + 4i)$

253. $(-2 - 5i)$

254. $(-8 + \sqrt{-1})$

255. $-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}i\right)$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Un profesor califica utilizando los números complejos. A continuación se muestran las calificaciones de tres estudiantes.

Nombre	Nota 1	Nota 2	Nota 3
Diana	$5 + 3i$	$3 + i$	$4 + 5i$
Juan	$10 + 20i$	$80 + 70i$	$60 + 40i$
Luisa	$70 + 80i$	$100 + 70i$	$10 + 30i$

Para determinar el desempeño final de cada estudiante, el profesor suma las tres notas y divide el resultado entre tres. Luego, halla la norma del resultado y asigna una letra de acuerdo con la siguiente escala.

Escala	Desempeño
100 a 90	Excelente (E)
89 a 85	Sobresaliente (S)
84 a 75	Aceptable (A)
74 a 0	Insuficiente (I)

¿Cuál es el puntaje de Juan?

¿Cómo se evalúa su desempeño?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el puntaje de Juan? ¿Cómo se clasifica su desempeño?

Paso 2 Elaborar un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determinan las notas de Juan.

Las notas de Juan son $10 + 20i$, $80 + 70i$ y $60 + 40i$.

Segundo, se suman las tres notas y luego se divide entre 3.

$$(10 + 20i) + (80 + 70i) + (60 + 40i) = 150 + 130i$$

$$\frac{150 + 130i}{3} = \frac{150}{3} = \frac{130}{3}i = 50 + \frac{130}{3}i$$

Tercero, se calcula la norma de $50 + \frac{130}{3}i$.

$$\left|50 + \frac{130}{3}i\right| = \sqrt{(50)^2 + \left(\frac{130}{3}\right)^2} = 66{,}16$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Al revisar las operaciones y observar los rangos de la tabla, se puede concluir que el puntaje de Juan es de 66,16 y su desempeño se evalúa como insuficiente.

Lee y responde las preguntas 256 a 260 con base en la siguiente información.

Se produjo una fuga de material radiactivo en una central nuclear. La cantidad del compuesto radiactivo al momento de la fuga era $18 \times 10^{23} i^{4k} - 12 \times 10^{11} i^{4k+2}$ microgramos, donde k es cualquier número entero. Se sabe que cada año dicha cantidad del compuesto se reduce a la mitad.

256. ¿Qué cantidad de compuesto habrá después de un año?

257. ¿Qué cantidad de compuesto habrá después de cinco años?

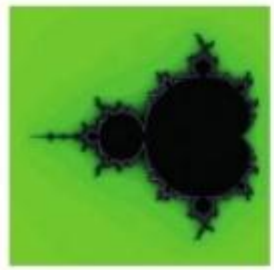
258. ¿Cuál es la diferencia de compuesto desde que se produjo la fuga hasta pasados cinco años?

259. ¿Qué cantidad de compuesto permanecerá en el ambiente después de 1.000 años?

260. Expresa la cantidad de compuesto que habrá después de n años de iniciado el accidente nuclear.

Lee y resuelve los ejercicios 261 y 262 con base en la siguiente información. Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas. En muchos casos, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo capaz de producir estructuras autosimilares independientemente de la escala específica.

Un ejemplo de este hecho se observa en el fractal de Mandelbrot y el fractal de Julia.



Los fractales de Mandelbrot se generan al aplicar un proceso iterativo, es decir, repetitivo de la expresión, cuya forma es $z^2 + c$, donde z y c son números complejos, z varía y c permanece constante.

Así, si el valor inicial de z es z_0, se tiene que $z_1 = z_0^2 + c$ y cada resultado se utiliza para el cálculo siguiente, y así sucesivamente.

$$z_2 = z_1^2 + c$$

$$z_3 = z_2^2 + c$$

$$z_n = z_{n-1}^2 + c$$

261. Dada la expresión $z_n = z_{n-1}^2 + c$ donde z y c son números complejos y $c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, tabula cinco valores para $z_0 = 0$, $z_0 = \frac{1}{2}i$ y $z_0 = \frac{1}{2}$.

262. Sobre el plano complejo, grafica los resultados del ejercicio anterior. Une los puntos en cada caso.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para entender los factores que influyen en la recepción de señales.

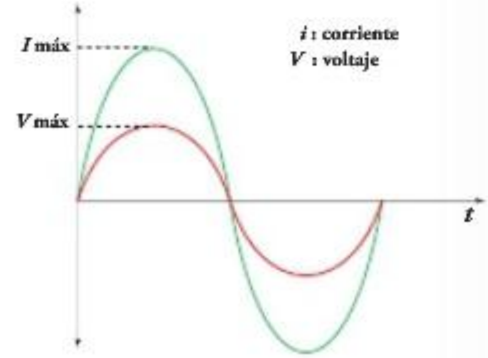
En electricidad es necesario utilizar los números complejos para estudiar fenómenos sinusoidales, los cuales se presentan en la emisión de señales eléctricas.

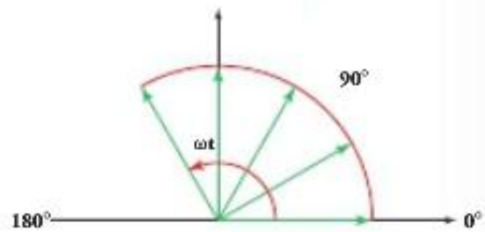
En la recepción de las señales se aprecia el estudio de los fasores, los cuales ayudan a conocer las interferencias, mejorando así el proceso de emisión y recepción de datos usado en las telecomunicaciones.

Cuando se utiliza corriente alterna *AC* en la emisión de señales, se puede definir la potencia compleja S, teniendo en cuenta que la corriente se mueve en dos direcciones. Entonces, para minimizar errores en la señal recibida, se debe tener en cuenta no solo la potencia real P sino también la potencia reactiva Q, que es la parte imaginaria de la potencia compleja.

La expresión que representa la potencia compleja entonces es:

$$S = P + jQ$$





Nótese que la parte imaginaria es representada con la letra j. Esta notación es usada en ingeniería y telecomunicaciones para distinguirla de la intensidad de corriente i.

Lo anterior se aplica en técnicas de análisis de circuitos resistivos para analizar circuitos *AC* de una sola frecuencia que contienen resistencias, bobinas y condensadores. De igual modo, los circuitos *AC* con más de una frecuencia o con diferentes ondas pueden ser analizados para obtener tensiones y corrientes, convirtiendo todas las formas de onda en sus componentes sinusoidales y analizando después cada frecuencia por separado.

1. **Ubica en el plano complejo las siguientes potencias complejas.**

   a. $4 + j3$
   b. $25 - j6$
   c. $31 + j18$
   d. $19{,}5 + j8{,}5$

2. **Encuentra la potencia compleja resultante de las siguientes potencias.**

   a. $P = 3 + j2$ y $Q = 8 - j3$
   b. $P = 25{,}3 - j34{,}2$ y $Q = 35{,}2 + j45{,}67$
   c. $P = 12{,}34 + j55{,}41$ y $Q = 56{,}78 + j33{,}22$

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: aplicar los conceptos estudiados acerca de los números complejos, como forma binomial de un complejo, operaciones con los números complejos, conjugado de un número complejo y norma de un complejo.

Descripción: expresar un número complejo en forma binomial, hallar la adición, sustracción, multiplicación y división entre números complejos. Dado un número complejo, encontrar su conjugado y calcular su norma en el programa Microsoft Mathematics.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math

1. Haz clic en Microsoft Mathematics.

2. Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona la opción **Números complejos,** como se muestra en la ilustración.

3. Identifica en la calculadora la herramienta **Números complejos** y las opciones **>rectangulares y conjugado**.

4. Expresa un número complejo en forma binomial, como sigue.

   Selecciona la herramienta **>rectangulares**. Luego, escribe la expresión $-4 + \sqrt{-121}$ y, finalmente, haz clic en **Entrar**, como se muestra en la figura. Verifica que el resultado sea $-4 + 11i$.

5. Determina el conjugado de los siguientes números. Para ello, utiliza la opción conjugado, de la herramienta Números complejos.

   a. $8 + 5i$
   b. $-\frac{2}{3} - \frac{i}{4}$
   c. $-\sqrt{-2} - i$
   d. $\frac{5}{9}i - \sqrt{169}$

6. Realiza operaciones entre números complejos. Primero, escribe la operación indicada. Luego, haz clic en **Entrar** en la parte inferior. Observa la suma $(10 + 6i) + (5 - 7i)$, como se muestra en la figura. Confirma el resultado en la **Hoja de cálculo** del programa.

7. Realiza las operaciones mediante Microsoft Mathematics.

   a. $3 - (3 - 4i)$
   b. $(-4 + 48i) + (108 - 77i)$
   c. $(5 + 4i)^2$
   d. $\dfrac{2 + 5i}{6 + 7i}$
   e. $(8 + 5i) \times (3 - 4i)$

8. Selecciona el valor absoluto de un número en la calculadora $|x|$. Luego, introduce el número complejo $5 - 4i$ para hallar su norma. Observa cómo se escribe el número.

Determina la norma de $z = -\sqrt{3} - \sqrt{2}i$.

4 Sistemas de ecuaciones lineales

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer cuándo una relación es **función**, sus elementos y su representación gráfica.
- Identificar las características de una **función lineal**.
- Encontrar la **ecuación** de una recta dadas ciertas condiciones.
- Resolver **sistemas de ecuaciones lineales** 2×2 y 3×3.

Encuentra en tu Libromedia

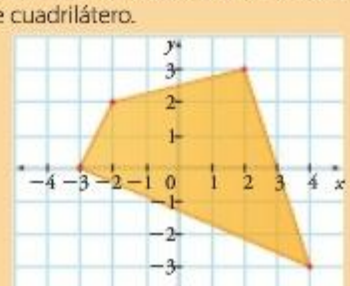
Evaluaciones:

✓ De desempeño

- **9** Multimedia
- **1** Audios
- **1** Galerías
- **8** Imprimibles
- **5** Actividades
- **2** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Escribe las coordenadas de los vértices del siguiente cuadrilátero.



2. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones si $a = -5$, $b = 2$ y $c = 4$.

a. $3b - 2a + 5c$

b. $-c + b - 8a$

c. $13a + b - 7c$

d. $6b - 5a + 9c$

3. Despeja la incógnita que se indica en cada caso.

a. $10x + 3y = 5$, despejar y.

b. $\dfrac{m-1}{3} = n + 2$, despejar m..

Cronología de los sistemas de ecuaciones lineales

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

... Para entender la oferta, la demanda y el equilibrio de mercado en economía.

El mercado está constituido por vendedores y compradores. Cada uno de ellos tiene sus expectativas de producción, es decir, la cantidad de bienes o servicios que los vendedores están dispuestos a ofrecer (oferta) y la cantidad de bienes o servicios que los compradores están dispuestos a adquirir (demanda). Estas expectativas generan las funciones de oferta y demanda, que en algunos casos están representadas por gráficas lineales o cuadráticas.

Lee más acerca de este tema en la página 126.

1. Funciones

Si se conoce la variación del precio de la moneda, se puede predecir el valor de la acción de una empresa en determinado periodo de tiempo.

Las funciones permiten representar, modelar y describir situaciones del mundo real, ya sean fenómenos físicos, económicos, biológicos o demográficos. Por ejemplo, conocer la variación del precio de la moneda en un período de tiempo ayuda a predecir el valor de una acción de una empresa en la bolsa de valores.

1.1 Concepto de función

Ampliación multimedia

Una **función** es una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A uno y solo un elemento de un conjunto B.

Las funciones se simbolizan con letras minúsculas tales como f, g, h, entre otras.

Así, para notar la función f definida del conjunto de partida A en el conjunto de llegada B, se escribe

$f: A \to B$ y se lee "efe de A en B".

Además, si $x \in A$ y $y \in B$, la expresión $f(x) = y$ se lee "efe de x igual a y", se interpreta así:

El elemento $x \in A$ está relacionado con el elemento $y \in B$ por medio de la función f.

La imagen del elemento x por la función f es el elemento y.

Una función $f: A \to$ B se puede representar mediante un diagrama sagital como el de la figura 1.

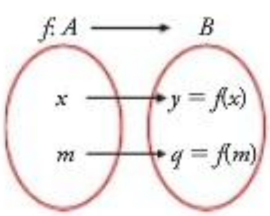


Figura 1. Diagrama sagital de la función f que se define de A en B.

1.2 Elementos de una función

Actividad

En una función $f: A \to B$ se distinguen los siguientes elementos:

- **Dominio:** es el conjunto de partida de la función, se simboliza Dom f.
- **Codominio:** es el conjunto de llegada de la función, se simboliza Cod f.
- **Rango:** es el conjunto formado por los elementos del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio, se simboliza Ran f.
- **Grafo:** es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas (x, y) tales que $x \in$ Dom f y $y \in$ Ran f.

EJEMPLOS

1. **Una muestra de oxígeno ocupa un volumen de 15 litros a la presión normal de 1 atmósfera. La relación entre la presión y el volumen se muestra en la siguiente tabla.**

P (atm)	1	2	3	5	10
V (L)	15	7,5	5	3	1,5

Describir los elementos de la función volumen en términos de la presión.

Los elementos de la función f son:

Dom $f = \{1, 2, 3, 5, 10\}$ Son los elementos de P.

Cod $f = \{15, 7{,}5, 5, 3, 1{,}5\}$ Son los elementos de V.

Ran $f = \{15, 7{,}5, 5, 3, 1{,}5\}$ Son los elementos del conjunto de imágenes.

Grafo $= \{(1, 15), (2, 7{,}5), (3, 5), (5, 3), (10, 1{,}5)\}$

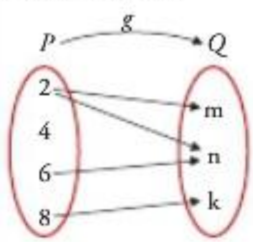
Son los elementos del conjunto de las parejas (x, y).

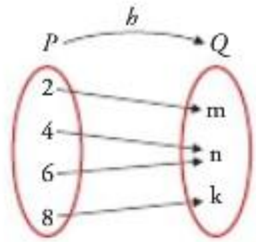
2. Realizar el diagrama sagital de cada relación. Luego, determinar si el grafo corresponde a una función.

$P = \{2, 4, 6, 8\}$ $\quad$ $g = \{(2, m), (2, n), (6, n), (8, k)\}$

$Q = \{m, n, k\}$ $\quad$ $h = \{(2, m), (4, n), (6, n), (8, k)\}$

Los diagramas de g y h son:





El grafo de la relación g no es una función ya que al elemento $2 \in P$ le corresponden dos imágenes m y n. Además, el elemento $4 \in P$ no tiene imagen y todos los elementos del conjunto de salida deben tener imagen.

El grafo de la función h sí es una función ya que a cada elemento de P le corresponde uno y solo un elemento en Q.

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Ejercito • Razono

Resuelve y explica.

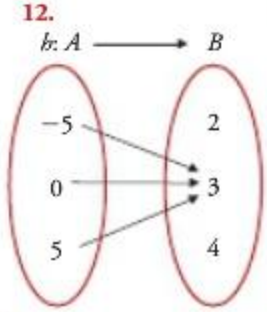
1. ¿Qué es una función?
2. ¿Cómo se simboliza una función?
3. La diferencia entre el codominio y el rango de una función.
4. ¿Toda gráfica en el plano cartesiano es una función?
5. En una función, ¿todos los elementos del conjunto de salida pueden tener la misma imagen?

Representa en diagramas sagitales los siguientes grafos. Luego, determina si corresponden o no a una función.

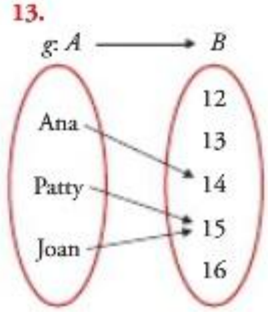
6. $\{(2, 1), (2, 2), (4, 2), (4, 1), (4, 4)\}$
7. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)\right\}$
8. $\{(0, 0), (1, 1), (2, \sqrt{2})\ (3, \sqrt{3}), (4, 2)\}$
9. $\left\{\left(-\frac{3}{2}, -3\right), \left(\frac{3}{4}, -2\right), \left(\frac{4}{3}, 4\right), \left(-\frac{1}{2}, -2\right)\right\}$
10. $\left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)\right\}$
11. $\{(1, 0), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

Encuentra el dominio, codominio, rango y grafo de cada función.

12.



13.



Determina si las relaciones son o no son funciones definidas del conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

14. A cada elemento de A le corresponde su doble en B.
15. Cada elemento de A se relaciona con su cuadrado en B.
16. Cada elemento de A se relaciona con su cantidad de divisores en B.
17. Cada elemento de A se relaciona con 5 en B.

1.3 Representación de funciones

Ampliación multimedia   Recursos imprimibles

Para representar una función se puede utilizar la forma verbal, la fórmula, la tabla de valores y la gráfica.

- **Forma verbal:** es la relación entre las variables que se realiza por medio de un enunciado, es decir, una descripción con palabras.
- **Fórmula:** es la expresión algebraica de la función. Esta expresión se simboliza $y = f(x)$ donde x es la variable independiente y representa los elementos de Dom f, y y es la variable dependiente que representa los elementos de Ran f.
- **Tabla de valores:** es un arreglo con dos filas, en la fila superior se ubican los valores que toma la variable independiente y en la fila inferior se ubican los valores que se obtienen para la variable dependiente.
- **Gráfica:** es un diagrama sagital o un diagrama cartesiano, en el cual se ubican los elementos del dominio en el eje horizontal y los elementos del codominio en el eje vertical.

Matemática*mente*

¿Pueden dos funciones tener el mismo dominio, codominio y rango pero diferente expresión algebraica?

EJEMPLOS

1. La presión dinámica del aire depende de la velocidad y la densidad del aire, mediante la expresión $q = \frac{1}{2}\rho v^2$. Representar en la tabla de valores y en forma gráfica la función q, si $\rho = 1{,}2$ kg/m³ y los valores para v son 0, 1, 2 y 3 metros por segundo.

Para realizar la tabla de valores de la función q se determinan las imágenes de cada elemento por medio de la fórmula $q = \frac{1}{2}\rho v^2$, así:

$q(0) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot (0)^2 = 0$

$q(1) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot (1)^2 = 0{,}6$

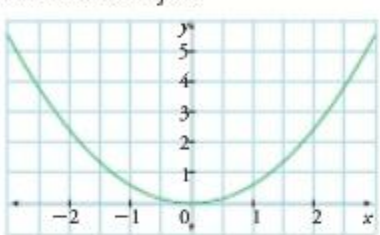
$q(2) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot (2)^2 = 2{,}4$

$q(3) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot (3)^2 = 5{,}4$

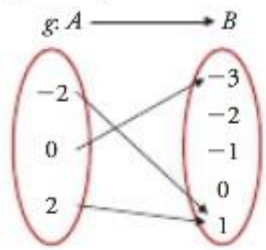
Por tanto, la tabla de valores es:

v	0	1	2	3
q	0	0,6	2,4	5,4

La gráfica de la función q es:



2. Representar, por medio de una tabla de valores, y por fórmula, la función g dada a partir de su representación en diagrama sagital.



Primero, se determina en qué conjuntos está definida la función g.

$A = \{-2, 0, 2\}$ y

$B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

Segundo, se ubican en la tabla de valores los elementos de A en la primera fila y sus respectivas imágenes en la segunda fila.

x	−2	0	2
$g(x)$	1	−3	1

Finalmente, la expresión algebraica de la función g se determina por la relación entre cada elemento de x y su respectiva imagen.

Así, la fórmula de la función es $g(x) = x^2 - 3$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde cada pregunta.

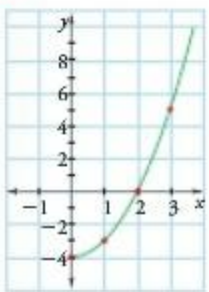
18. ¿Cuáles son las formas de representar una función?

19. ¿Cómo se obtiene la fórmula de una función a partir de su gráfica?

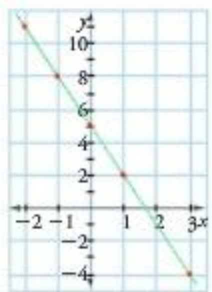
20. ¿Para qué valores está definida la función $f(x) = \sqrt{2x}$?

Construye una tabla de valores para cada función, a partir de su representación gráfica.

21.



22.



Determina cuáles de las siguientes relaciones representan una función. Justifica tu respuesta.

23. Un número real y su logaritmo.

24. Un número negativo y su cubo.

Expresa.

25. De diferentes formas, la función que a cada número le hace corresponder su cuadrado menos tres.

26. De forma algebraica y mediante una tabla de valores, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

Realiza las tablas de valores y representa en el plano cartesiano las siguientes funciones.

27. $y = 2x - 5$

28. $f(x) = 2x^2$

29. $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

30. $h(x) = \sqrt{x - 1}$

31. $j(x) = x^2 - 2$

32. $k(x) = -x^2 - x - 1$

Realiza lo indicado.

33. Escribe tres situaciones que involucran el estudio de funciones.

34. Propón una función que tenga representación gráfica, pero que sea imposible conocer su fórmula.

35. Determina la fórmula de una función donde el rango corresponde a un único elemento.

El movimiento de una partícula se describe por medio de la siguiente tabla de valores:

Tiempo segundos	0	1	2	3	4	5
Distancia cm	2	4	6	8	10	12

36. Realiza la gráfica que describe el movimiento de la partícula.

37. Encuentra la fórmula que describe el movimiento de la partícula.

38. ¿A qué distancia estará la partícula después de 10 segundos?

39. ¿Cuánto tiempo transcurrió si la partícula se encuentra a 18 cm del punto inicial?

Se midió la temperatura de un aula de clases durante 6 horas y se construyó la siguiente tabla con los resultados.

Hora	1	2	3	4	5	6
Temperatura (°C)	15	18	24	22	21	16

40. Realiza una gráfica asociada a la tabla que se muestra.

1.4 Funciones de variable real

Ampliación multimedia | Recurso imprimible | Enlace web

Una función f es una **función de variable real** cuando su dominio y su rango son el conjunto de los números reales o son subconjuntos del mismo.

En las funciones de variable real no es posible indicar todas las parejas ordenadas que constituyen una función real, por tanto, se utiliza la fórmula $y = f(x)$ para referirse a estas funciones.

La gráfica de una función real f es el conjunto de puntos (x, y) del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la fórmula de la ecuación.

Como no es posible representar todos los puntos en la gráfica de una función, entonces, solo se ubican algunos de ellos y se unen mediante un trazo continuo, teniendo en cuenta los valores para los cuales la función está definida, es decir, que pertenezcan al dominio de la función. De esta manera se obtiene el bosquejo de la gráfica de una función real.

Historia de las matemáticas

El término "función" aparece por primera vez a finales del siglo XVII mencionado por el matemático Johann Bernoulli. Sin embargo, no es sino hasta 1748 que Leonhard Euler introduce un concepto de función en su libro *Introducción al análisis infinito,* donde la define así: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes". Con el tiempo esta definición se fue modificando hasta obtener la que conocemos hoy día.

EJEMPLO

Realizar una tabla con algunos valores para x. Luego, trazar la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 5$.

Primero, se elabora la tabla con algunos valores reales.

Luego, se traza la curva a partir de los puntos obtenidos.

Para la construcción de la tabla se evalúa la función para los valores indicados. Así:

Si $x = -2$, su imagen es $f(-2) = 2(-2)^3 - 5 = -21$.

Si $x = -1$, su imagen es $f(-1) = 2(-1)^3 - 5 = -7$.

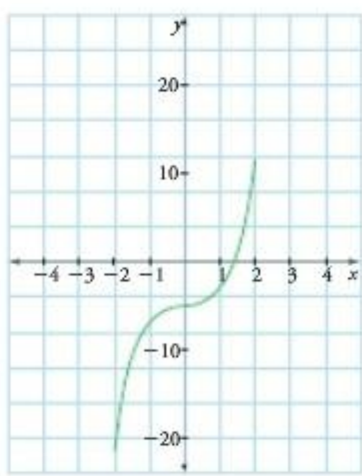
Si $x = 0$, su imagen es $f(0) = 2(0)^3 - 5 = -5$.

Si $x = 1$, su imagen es $f(1) = 2(1)^3 - 5 = -3$.

Si $x = 2$, su imagen es $f(2) = 2(2)^3 - 5 = 11$.

Por tanto, la tabla de valores de $x = -2, -1, 0, 1$ y 2, y el bosquejo de la gráfica de la función son:

x	$f(x)$
-2	-21
-1	-7
0	-5
1	-3
2	11



Método gráfico para identificar funciones

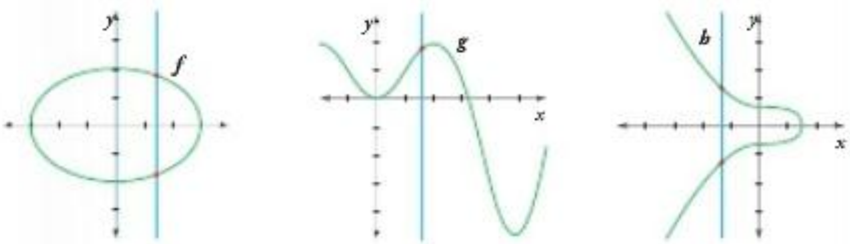
Recurso imprimible · Enlace web

Para comprobar que una gráfica describe una función, se trazan líneas rectas verticales y se verifica que cualquier recta corte la gráfica de la función máximo en un solo punto.

En el caso de que una recta corte a la gráfica en más de un punto, se afirma que la gráfica no corresponde a una función.

EJEMPLO

Determinar si las siguientes gráficas representan funciones o no.



Las gráficas de f y h no son funciones ya que al trazar una línea vertical esta toca a las curvas en más de un punto, en este caso, cada elemento del dominio tiene más de una imagen.

La gráfica de g representa una función ya que la línea vertical la toca en un solo punto, es decir, cada elemento del dominio tiene una y sola una imagen.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono

Realiza la gráfica en el plano cartesiano de cada una de las siguientes funciones.

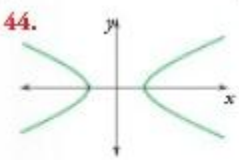
41. Una función de dominio los números reales positivos.

42. Una función de dominio los números reales negativos y rango los números reales positivos.

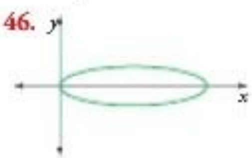
43. Una función de dominio los números reales y rango los números naturales.

Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones. Explica tu respuesta.

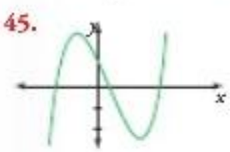
44.



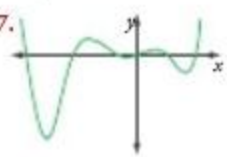
46.



45.



47.



Realiza las gráficas de las siguientes funciones según los valores dados para x.

48. $y = x + 4$; $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0$.

49. $f(x) = 2 - 3x$; $x = -2, -1, 0, 1$.

50. $g(x) = x^2 - 1$; $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

51. $h(x) = -\frac{1}{3}x$; $x = -3, 3, 6, 9$.

Si $f(x) = \sqrt{x - 5}$ responde.

52. ¿Cuál es el dominio de f?

53. ¿Cuál es el rango de f?

Encuentra una función de variable real que represente cada situación. Luego, determina el dominio y el rango de cada función.

54. Un automóvil avanza 60 km en una hora; 120 km, en dos horas; 180 km, en tres horas.

55. Por una hora de Internet Luis cobra 1.500 pesos; por 3 horas, 4.500 pesos, y 9.000 pesos, por 6 horas.

1.5 Función lineal y función afín

Recurso imprimible

Función lineal

Ampliación multimedia

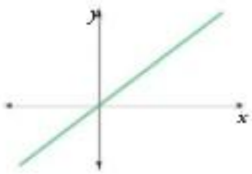


Figura 2

Toda función de la forma $y = mx$, donde m es una constante diferente de cero, es una **función lineal**.

La representación gráfica de una función lineal en el plano cartesiano es una línea recta no vertical que pasa por el origen como muestra la figura 2.

Función afín

Toda función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes diferentes de cero, es una **función afín**.

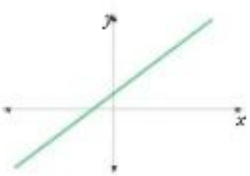


Figura 3

Una función afín tiene como representación gráfica una línea recta que no pasa por el origen del plano cartesiano como muestra la figura 3.

Es posible encontrar los **puntos de corte de la recta** correspondiente a la gráfica de una función afín con los ejes coordenados, mediante un proceso algebraico, así:

- Para hallar el punto de corte de la recta con el eje x, o punto $(x, 0)$: en $y = mx + b$ se remplaza y por 0 y se despeja x.
- Para hallar el punto de corte de la recta con el eje y, o punto $(0, y)$: en $y = mx + b$ se remplaza x por 0 y se despeja y.

EJEMPLOS

1. Un automóvil, en promedio, consume un galón de gasolina por cada 45 km en la ciudad. Determinar la expresión que relaciona la cantidad de gasolina con la distancia recorrida. Luego, construir la gráfica de la función.

x: Cantidad de gasolina.

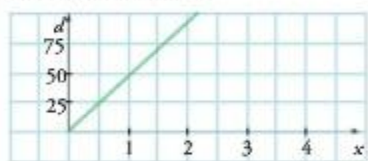
d: Distancia recorrida en kilómetros.

Primero, se realiza la tabla de valores para identificar la relación entre las variables.

x	0	1	2	3	4
d	0	45	90	135	180

Como por cada galón de gasolina se recorren 45 km, entonces, la expresión que relaciona la cantidad de gasolina con la distancia recorrida es: $d = 45x$.

Así, la gráfica de la función es:



Como la gráfica pasa por el origen del plano cartesiano, entonces, la función es lineal.

2. Hallar los puntos de corte de $y = 3x - 6$ con los ejes coordenados.

Primero, se halla el corte con el eje x.

$y = 3x - 6$ Ecuación de la función.

$0 = 3x - 6$ Se remplaza y por 0.

$x = 2$ Se despeja x.

Luego, se determina el corte con el eje y.

$y = 3x - 6$ Ecuación de la función.

$y = 3(0) - 6$ Se remplaza x por 0.

$y = -6$ Se realizan las operaciones.

Por tanto, los cortes con los ejes coordenados son $(2, 0)$ y $(0, -6)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

56. ¿Cuál es la diferencia entre la gráfica de una función lineal y la gráfica de una función afín?

57. ¿Cómo se determina si una función es lineal, a partir de una tabla de valores?

58. ¿Cómo se obtiene la gráfica de una función afín, a partir de su expresión algebraica?

59. ¿Qué valores debe tener el punto b en la ecuación $y = 3x + b$ para obtener una función lineal?

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

60. La función $y = c$ representa una función lineal.

61. La expresión $x = a$ representa una función afín.

62. Toda función lineal corta al eje y.

63. La velocidad con la que una llave de agua llena un tanque como función del tiempo, representa una función lineal.

64. El precio de la libra de café como función del tiempo representa una función afín.

Determina, en cada caso, si la función corresponde a una función lineal o a una función afín.

65. $y = -5x$

66. $y = -3x - 2$

67. $y = \frac{1}{5}x$

68. $y = 2x - 10$

69. $y = \frac{1}{4}x + 1$

70. $y = -\frac{12}{7}x - \frac{20}{3}$

Encuentra los puntos de corte con los ejes coordenados de las siguientes funciones. Luego, realiza la representación gráfica de cada función.

71. $y = 4 - 3x$

72. $y = -\frac{7}{6}x$

73. $y = -\frac{240}{15}x$

74. $y = x + \frac{1}{3}$

75. $y = -12x - 168$

76. $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}x$

77. $y = \frac{3}{2} - 2x$

78. $y = \frac{1}{4}x + 6$

Resuelve.

79. ¿Qué valores de m y b hacen que los cortes de la función con los ejes coordenados de la función $y = mx + (b - 2)$ sean $(-2, 0)$ y $(0, 3)$?

80. Halla el valor de m y b para que $y = mx + b$ pase por los puntos $(0, 4)$ y $(1, -6)$.

Determina si la función corresponde a una función lineal o a una función afín o ninguna de las dos. Escribe la expresión que determina cada función.

81.

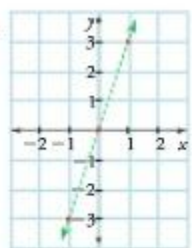
Número de gotas	2	5	10	20	40
Cantidad (miligramos)	0,1	0,25	0,5	1	2

82.

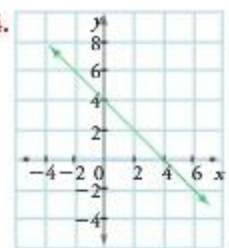
Minutos celular	1	2	3	4	5
Costo del minuto	180	360	540	720	900

Clasifica la gráfica de cada función como lineal o afín. Escribe la expresión que determina cada función.

83.



84.



Indica cuáles de las siguientes situaciones representan funciones lineales o afines.

85. En una factura telefónica se tiene un cargo fijo de \$2.000 y cada minuto cuesta \$100.

Relación: costo factura con cantidad de minutos consumidos.

86. Un esfero cuesta \$750 en un establecimiento. Al venderlo a este precio deja una ganancia del 10%.

Relación: cantidad de esferos contra ganancia.

En una empresa, el costo (en dólares) de producir x artículos está modelado por la expresión

$$c(x) = 20x + 100.$$

87. Calcula el costo de producir 120 artículos.

88. Si la empresa tiene un capital de US\$5.000, halla la cantidad de artículos que puede producir.

2. Línea recta

Actividades

En la ecuación $y = mx + b$, la constante m recibe el nombre de pendiente de la recta e indica la inclinación de esta respecto al eje positivo de las x.

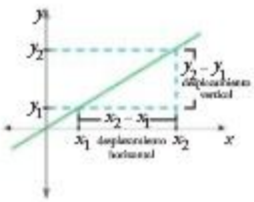


Figura 4

Pendiente de una recta

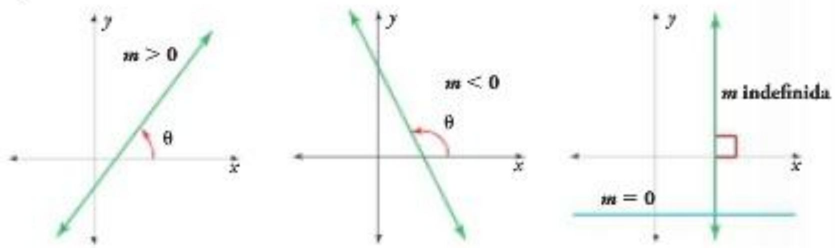
La pendiente de una recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se halla mediante la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ o } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \text{ con } x_1 \neq x_2.$$

La pendiente se puede interpretar como la razón del incremento vertical con respecto al incremento horizontal de la recta como muestra la figura 4.

El signo de la pendiente de una recta depende del ángulo de inclinación de la recta con respecto al eje x. De acuerdo con esto se pueden presentar cuatro casos:

- **Caso 1:** una recta es creciente si la pendiente es positiva, $m > 0$.
- **Caso 2:** una recta es decreciente si la pendiente es negativa, $m < 0$.
- **Caso 3:** una recta es horizontal si su pendiente es cero, en este caso, la expresión algebraica será $y = b$, donde b es una constante.
- **Caso 4:** la pendiente de una recta vertical no está definida, en este caso, la expresión algebraica será $x = c$, donde c es una constante.



EJEMPLOS

1. Los carpinteros acostumbran usar el término de inclinación para hacer referencia a la relación entre dos longitudes, como se muestra en la figura.

a. Determinar la pendiente de la recta que une los puntos A y B.

$$m = \frac{\text{variación vertical}}{\text{variación horizontal}} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Por tanto, la pendiente de la recta es $-\frac{2}{3}$.

b. Interpretar el significado de la pendiente de la recta que se aprecia en la figura.

La inclinación de $-\frac{8}{12}$ del techo de la casa significa que el techo desciende 8 metros por cada 12 metros de longitud horizontal.

2. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 1)$ y $B(0, -1)$

Se toman A y B, y se remplazan en la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ Ecuación de la pendiente.

$$m = \frac{1 - (-1)}{3 - 0} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$.

2.1 Ecuación explícita de la recta

Actividad | Ampliación multimedia

La ecuación de la forma $y = mx + b$ se llama **ecuación explícita de la recta**. A partir de la ecuación explícita de la recta se puede determinar la pendiente m y el punto de corte con el eje y que tiene coordenadas $(0, b)$.

Para hallar la ecuación explícita de una recta se deben considerar los siguientes casos:

Caso 1. Cuando se conocen la pendiente y el intercepto con el eje *y*.

En este caso, se remplaza el valor de m y de b en la ecuación $y = mx + b$.

Caso 2. Cuando se conocen la pendiente y un punto.

Para hallar la ecuación de una recta, dados un punto y el valor de m:

Primero, se remplazan la pendiente y las coordenadas del punto dado en $y = mx + b$ para determinar el valor de b.

Luego, se remplazan m y b en la ecuación $y = mx + b$.

Caso 3. Cuando se conocen dos puntos.

En este caso, primero se halla la pendiente mediante la fórmula con las coordenadas de los dos puntos. Luego, con la pendiente m y cualquiera de los puntos conocidos, se halla el valor de b en la ecuación $y = mx + b$ y se procede igual que en el caso anterior.

Matemática*mente*

¿Por dos puntos pasa una y solo una línea recta? Explica tu respuesta.

EJEMPLOS

1. Una compañía de telecomunicaciones paga mensualmente a cada empleado de la sección de ventas \$350.000 fijos más \$40.000 por paquete de servicios vendido. Escribir la ecuación que representa la situación anterior y determinar el sueldo de una persona que vende 20 paquetes de servicios.

Primero, se reconocen los datos del problema.

x: Cantidad de paquetes de servicios que vende una persona.

m: Valor que gana la persona por cada paquete vendido.

b: Valor fijo.

Luego, se remplazan los datos del problema en la ecuación $y = mx + b$.

Por tanto, la ecuación es $y = 40.000x + 350.000$.

Ahora, si una persona vende 20 paquetes, entonces:

$y = 40.000x + 350.000$ Ecuación.

$y = 40.000(20) + 350.000$ Se remplaza x por 20.

$y = 1.150.000$ Se realizan las operaciones.

Finalmente, una persona que vende 20 paquetes recibe un sueldo de \$1.150.000.

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(1, 1)$.

Primero, se determina la pendiente.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Ecuación de la pendiente.

$m = \dfrac{-3 - 1}{2 - 1}$ Se remplazan los valores.

$= \dfrac{-4}{1} = -4$ Se realizan las operaciones.

Segundo, se remplaza la pendiente -4 y uno de los puntos, por ejemplo, $(2, -3)$.

$y = mx + b$ Ecuación de la recta.

$-3 = (-4)2 + b$ Se remplazan la pendiente y un punto en la ecuación.

$-3 = -8 + b$ Se realizan las operaciones.

$b = 5$ Se despeja b.

Finalmente, se obtiene la ecuación de la recta, así:

$y = (-4)x + 5$ Se remplazan $m = -4$ y $b = 5$.

$y = -4x + 5$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(1, 1)$ es $y = -4x + 5$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

89. ¿Cuáles son las letras que representan la pendiente y el intercepto con el eje y de una línea recta?

90. ¿Cómo se determina la pendiente de una línea recta?

91. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la pendiente de una línea recta?

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

92. Una recta es creciente si su pendiente es positiva.

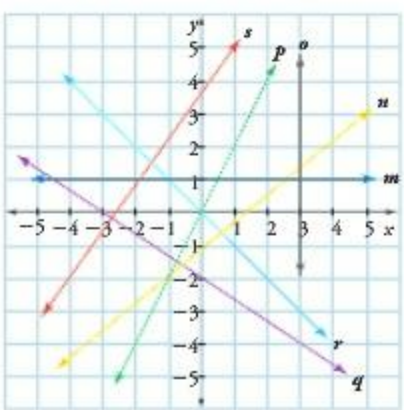
93. Una recta tiene pendiente negativa si su intercepto con el eje y es negativo.

94. La pendiente de una recta vertical es 0.

95. La ecuación de una línea recta paralela al eje x es $x = b$.

96. Si la pendiente de una recta es -2, entonces, la gráfica de la recta es horizontal.

Con base en la gráfica, determina el valor de verdad de cada enunciado. Justifica tu respuesta.



97. La pendiente de m es igual a cero.

98. La línea recta q es decreciente.

99. La función que representa la línea recta r es afín.

100. La pendiente de la recta o es igual a cero.

101. La función que representa la línea recta p es lineal.

102. La pendiente de la recta s es $\frac{7}{5}$.

Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

103. $(3, 5)$ y $(2, 1)$

104. $(4, 5)$ y $(3, -2)$

105. $(-4, -1)$ y $(3, 6)$

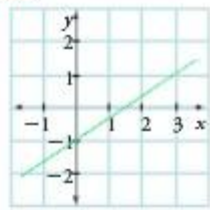
106. $(0, -11)$ y $(7, 10)$

107. $(8, -5)$ y $(-3, 9)$

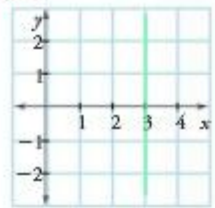
108. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, 5\right)$

Identifica dos puntos sobre cada recta y encuentra el valor de la pendiente.

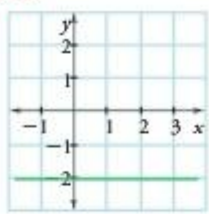
109.



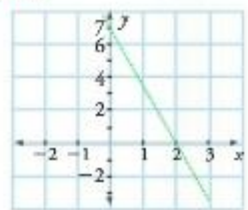
111.



110.



112.



Relaciona cada ecuación con la recta correspondiente en la gráfica.

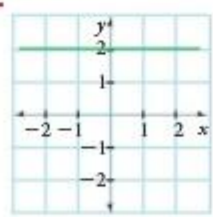
113. $y = 3$

114. $y = 3x$

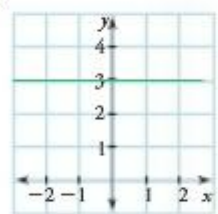
115. $x = 4$

116. $y = 2$

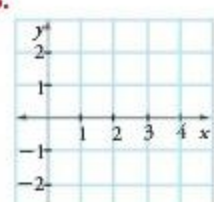
a.



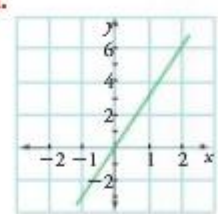
c.



b.



d.



Encuentra la ecuación explícita de la recta de acuerdo con las siguientes condiciones.

117. Pasa por $(0, -3)$ y tiene pendiente -2.

118. Pasa por $(-2, -1)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

119. Pasa por los puntos $(2, -4)$ y $(-2, 1)$.

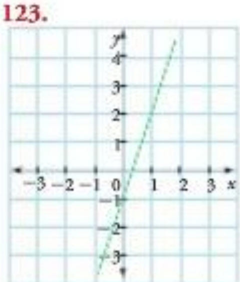
120. Pasa por $(5, 3)$ y tiene pendiente 0.

121. Pasa por $(2, 3)$ y la pendiente es indeterminada.

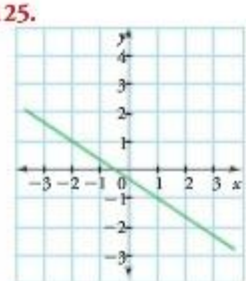
122. Pasa por el punto $(4, -1)$ e interseca al eje y en $(0, 6)$.

Determina la ecuación de la recta en cada caso.

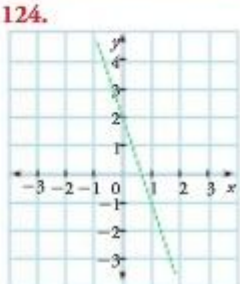
123.



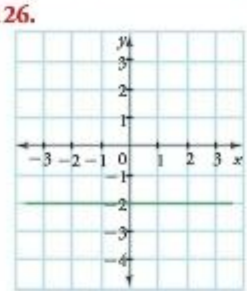
125.



124.



126.



Determina la ecuación que representa el perímetro de cada polígono regular, como función de la longitud del lado.

127. Pentágono regular. **128.** Heptágono regular.

Sean l y n dos líneas rectas con pendientes $m_l > 0$ y $m_n < 0$, respectivamente. Verifica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Explica tu respuesta por medio de un ejemplo.

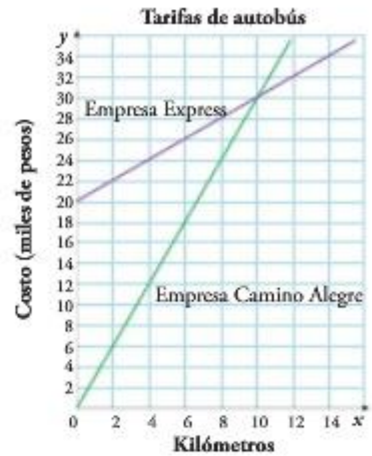
129. l y n nunca se cortan.

130. l y n siempre se cortan.

131. l y n cortan al eje x en el mismo punto.

132. l y n cortan al eje y en el mismo punto.

Dos empresas de autobuses ofrecen diferentes tarifas. La siguiente gráfica muestra el costo de renta de un autobús de la empresa Express y uno de la empresa Camino Alegre. Responde.



133. ¿Cómo calcularías el costo fijo y la tarifa por kilómetro recorrido de cada empresa, a partir de la información que proporciona la gráfica?

134. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa cada situación?

135. Si el recorrido total de una salida ambiental es de 120 kilómetros, entonces, ¿con cuál de las dos empresas conviene rentar un autobús?

Resuelve.

136. Una agencia de alquiler de vehículos ofrece automóviles por 120.000 pesos durante 5 días más 10.000 pesos por hora adicional. ¿Cuál es la ecuación que representa los ingresos de la agencia por alquilar un automóvil?

137. El precio de 3 lb de naranja es de 1.800 pesos y el precio de 5 libras es 2.500. Si y es el precio de la naranja y x es el peso, determina la ecuación que representa el precio de la naranja según su peso.

138. Los sondeos realizados en la corteza terrestre ponen de manifiesto que, en el interior de la tierra, la temperatura aumenta a razón de 1 °C cada 100 m de profundidad.

Si la temperatura media en un lugar es de 15 °C, ¿cuál será la función que expresa la variación de la temperatura con la profundidad?

Ecuación general de la recta

Matemática*mente*

¿Qué valores toman A y B cuando las rectas son líneas horizontales y verticales? Explica tu respuesta.

La **ecuación general de la recta** es una expresión de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales, y donde A y B no son cero al mismo tiempo.

De la ecuación general se puede despejar y para determinar la ecuación explícita y así obtener el valor de la pendiente m y el intercepto con el eje y.

$Ax + By + C = 0$ Ecuación general de la recta.

$By = -Ax - C$ Se restan Ax y C.

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ Se despeja y.

Por tanto, para la recta que tiene como ecuación $Ax + By + C = 0$, la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ y el corte con el eje y es $b = -\frac{C}{B}$, para $B \neq 0$.

Si la ecuación de una recta está dada en forma explícita, entonces, su forma general se puede obtener con algunas operaciones algebraicas.

EJEMPLOS

1. En Colombia se cultiva café de tipo arábigo. Las variables que se cultivan son: típica, borbón, maragapipe, tabi, caturra y variedad Colombia.

Un vendedor dispone de dos clases de café: típica a \$2.800 la libra y caturra a \$2.100 la libra.

Determinar la ecuación que permite conocer la cantidad de libras que se debe mezclar de cada clase de café para obtener un café que cueste \$2.590 la libra.

Primero, se identifican las variables.

x: Libras de café típica. y: Libras de café caturra.

$2.800x + 2.100y = 2.590(x + y)$ Se establece la ecuación.

$2.800x + 2.100y = 2.590x + 2.590y$ Se multiplica.

$210x - 490y = 0$ Se iguala a cero.

Por tanto, la ecuación que relaciona las dos clases de café es $210x - 490y = 0$.

2. Encontrar la pendiente y el corte con el eje y de la recta cuya ecuación general es $x - 2y + 3 = 0$.

$x - 2y + 3 = 0$ Ecuación de la recta.

$-2y = -x - 3$ Se restan x y 3.

$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ Se despeja y.

Por tanto, la pendiente de la línea recta es $m = \frac{1}{2}$ y el corte con el eje y es $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

3. Realizar la gráfica de la recta cuya ecuación es $3x - 2y - 12 = 0$.

Para realizar la gráfica, se hallan dos puntos de la recta.

$3x - 2y - 12 = 0$ Ecuación de la recta.

$3 \cdot (0) - 2y - 12 = 0$ Se remplaza x por 0.

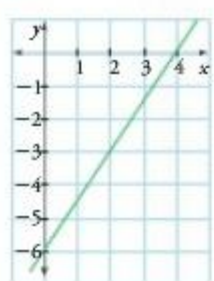
$y = \frac{12}{-2} = -6$ Se despeja y.

$3x - 2 \cdot (0) - 12 = 0$ Se remplaza y por 0.

$x = \frac{12}{3} = 4$ Se despeja x.

Luego, la recta pasa por los puntos $(0, -6)$ y $(4, 0)$.

Por tanto, la gráfica de la recta se observa al lado.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

139. ¿Cómo se expresa la ecuación general de la recta?

140. ¿Cuál es la pendiente y el intercepto de la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$?

141. ¿Cómo se determina la ecuación general de la recta a partir de su ecuación explícita?

142. ¿Cuál es la diferencia entre la ecuación explícita de la recta y la ecuación general de la recta?

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

143. Los puntos $(-2, 1)$ y $(1, -1)$ pertenecen a la recta $2x - 3y + 1 = 0$.

144. El valor de la pendiente de una recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ con B igual a cero es indefinido.

145. El valor de la pendiente de la recta cuya ecuación es $4x + 5y - 3 = 0$ es $\frac{4}{3}$.

146. Los puntos de corte de la recta $x - y + 4 = 0$ con los ejes coordenados son $(0, 4)$ y $(-4, 0)$.

147. Las rectas horizontales tienen como ecuación general $Ax + C = 0$.

Escribe cada ecuación en forma explícita.

148. $2x - 3y - 5 = 0$

149. $x + 4y + 3 = 0$

150. $5x - 5y + 2 = 0$

151. $7x - 5y - 4 = 0$

Encuentra la pendiente y el corte con el eje y de las siguientes rectas. Luego, realiza su gráfica.

152. $2x - y + 3 = 0$

153. $x - 4y + 8 = 0$

154. $2x + 3y - 6 = 0$

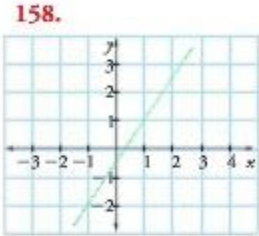
155. $6x - y + 6 = 0$

156. $3x + 2y + 5 = 0$

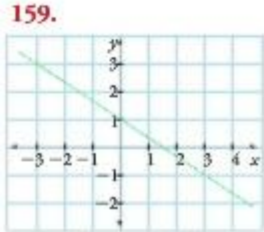
157. $4x + 2y - 6 = 0$

Encuentra la ecuación general de la representación de cada recta.

158.



159.



Escribe la ecuación general $Ax + By + C = 0$ de cada recta dada.

160. La pendiente es un número entero entre -5 y -2 y corta el eje x en el punto 3.

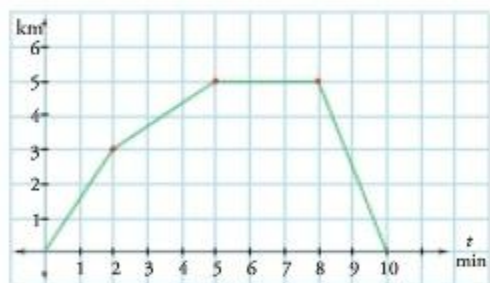
161. A es un número primo par, B un número mayor que cero entero y menor que 3 y $C = 4$.

El precio de una vivienda ha subido desde \$150.000 en el año 2000 hasta \$174.000 en el año 2008.

162. ¿Cuál fue su precio más probable en 1999?

163. De seguir esta tendencia, ¿cuál será su precio en el año 2015?

La siguiente gráfica representa el movimiento de un objeto entre 0 y 10 minutos.



164. Escribe las ecuaciones en forma general de cada una de las rectas que describen el movimiento.

165. ¿En qué intervalo de tiempo se recorrió más distancia?

Las siguientes ecuaciones representan los costos e ingresos en millones de una fábrica de lápices de colores: los costos, $10x - 2y + 20 = 0$ y los ingresos, $10x - y - 20 = 0$, donde x son las unidades producidas en miles.

166. Realiza la gráfica de cada función en el mismo plano cartesiano.

167. ¿Cuáles son los ingresos si se producen 4 mil unidades?

168. ¿Cuáles son los gastos si se producen 8 mil unidades?

169. ¿Cuántas unidades se producen para que los costos y los ingresos sean los mismos?

2.2 Rectas paralelas, perpendiculares y secantes

Dadas dos rectas diferentes en el plano cartesiano, se pueden presentar tres situaciones: las rectas son paralelas, las rectas son perpendiculares o las rectas son secantes.

Rectas paralelas

Dos rectas no verticales son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales.

Sean l_1 y l_2 dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente; se cumple que las rectas son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Dadas dos rectas l_1 y l_2, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Rectas secantes

Dos rectas son **secantes** cuando se cortan en un único punto sin formar un ángulo recto.

EJEMPLOS

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a la recta $y = -2x - 3$.

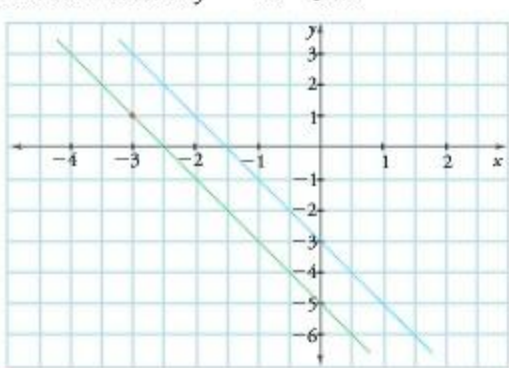
Como la pendiente de la recta dada es -2 y las rectas son paralelas, entonces, la recta tiene pendiente -2.

Ahora, se halla la ecuación de la recta así:

$y = mx + b$	Ecuación explícita de la recta.
$1 = -2(-3) + b$	Se remplazan m y el punto $(-3, 1)$.
$b = -5$	Se despeja b.
$y = -2x - 5$	Se remplazan m y b en la ecuación explícita de la recta.

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -2x - 5$.

La representación gráfica de la recta paralela a la recta que tiene como ecuación $y = -2x - 3$ es:



2. Determinar si las rectas l_1: $3x + y - 2 = 0$ y l_2: $y = \frac{1}{3}x - 4$ son paralelas, perpendiculares o secantes.

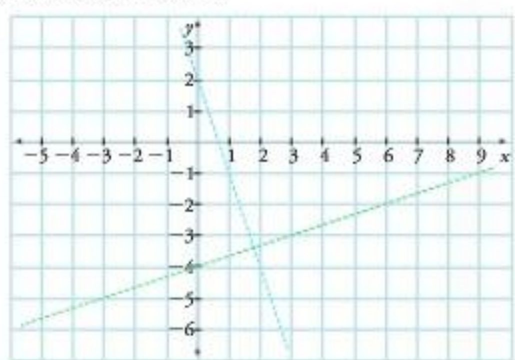
Primero, se expresa la recta l_1 de forma explícita:

$3x + y - 2 = 0$	Ecuación de la recta.
$y = -3x + 2$	Se despeja y.

Así, la recta l_1 tiene pendiente -3.

Como la ecuación de la recta l_2 es $y = \frac{1}{3}x - 4$, entonces, su pendiente es $\frac{1}{3}$.

Como $m_1 \cdot m_2 = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$, entonces, las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Soluciono problemas

Responde.

170. ¿Cómo se determina si dos rectas son paralelas a partir de sus ecuaciones?

171. ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular a la recta que tiene como ecuación $y = mx + b$?

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

172. La recta con ecuación $3x - 2y + 1 = 0$ es paralela a la recta con ecuación $y = -2$.

173. Si la pendiente de l es $m = 2a$ y $a \neq 0$, entonces, la pendiente de una recta perpendicular a l es $-\frac{a}{2}$.

174. Si la recta l_1 tiene pendiente $m_1 = 3$ y la recta l_2 es perpendicular a l_1, entonces, $m_2 = -3$.

175. La recta l_1 es paralela a l_2 y l_2 es perpendicular a l_3, entonces, l_1 es perpendicular a l_3.

Determina si las rectas representadas en cada caso por las ecuaciones son paralelas, perpendiculares o secantes.

176. $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

177. $\begin{cases} 6x = 1 + 2y \\ 3x - y - 5 = 0 \end{cases}$

178. $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 6x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$

179. $\begin{cases} 4y = 3x + 6 \\ 4x = 2 - 3y \end{cases}$

180. $\begin{cases} 2y = \frac{1}{2}x - 12 \\ 2y - 3 = x \end{cases}$

181. $\begin{cases} 10y - 5x = -15 \\ 6x + 3y = -9 \end{cases}$

182. $\begin{cases} 5x - 2y + 1 = 0 \\ 20x - 8y = 12 \end{cases}$

183. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 9y = 6x - 1 \end{cases}$

Escribe la ecuación general de la recta que cumple cada una de las siguientes condiciones.

184. Pasa por el punto $(-1, 1)$ y es paralela a la recta $y = -3x + 1$.

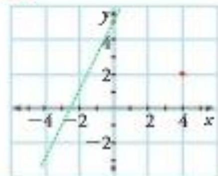
185. Pasa por el punto $(3, 0)$ y es paralela a la recta que se expresa como $2x - 2y + 3 = 0$.

186. Pasa por $(-2, 1)$ y es perpendicular a la recta que se expresa como $3y = -x$.

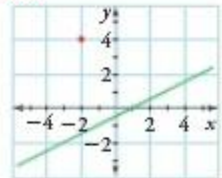
187. Pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la recta que se expresa como $2y - 3x = 6$.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta representada.

188.

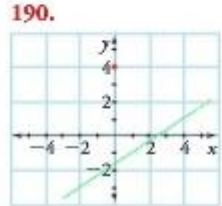


189.

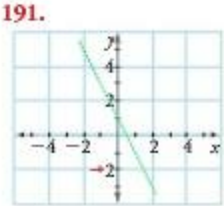


Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta representada.

190.



191.



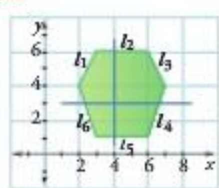
Demuestra las siguientes afirmaciones aplicando la relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares.

192. Si la recta l_1 pasa por $(-4, 3)$ y $(-2, -1)$ y la recta l_2 pasa por $(2, 3)$ y $(4, -1)$, entonces, con l_1 y l_2 se puede formar un paralelogramo tomando estos cuatro puntos.

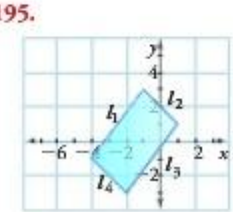
193. Si la recta l_1 pasa por $(2, 4)$ y $(4, 6)$; la recta l_2 pasa por $(2, 4)$ y $(6, 0)$, y la recta l_3 pasa por los puntos $(4, 6)$, $(6, 0)$, entonces, con l_1, l_2 y l_3 se puede formar un triángulo rectángulo.

Escribe la ecuación de las rectas que forman cada polígono.

194.



195.



Determina el valor de la constante k de modo que:

196. $3kx + 5y + k = 0$ pase por el punto $(-1, 4)$.

197. $4x - ky - 7 = 0$ tenga pendiente 3.

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Historia de las matemáticas

Flor de Thymaridas

Thymaridas de Paros (400 a. C.), matemático griego, creó un método geométrico para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que se conoció como la "flor" o "floración de Thymaridas" y se define así:

"Si se da la suma de n cantidades y también la suma de cada par que contiene una cantidad particular, entonces, esta cantidad particular es igual a $1/(n-2)$ de la diferencia entre las sumas de estos pares y la primera suma dada". Es decir,

$x + x_1 + \dots + x_{n-1} = S$

$x + x_1 = m_1$

$x + x_2 = m_2$

$\vdots$

$x + x_{n-1} = m_{n-1}$

Entonces, x es igual a:

$$\frac{m_1 + \dots + m_{n-1} - S}{n-2}$$

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales, cada una de ellas con dos o más incógnitas.

Si el mayor exponente de las variables de las ecuaciones que intervienen en el sistema es uno, entonces, el sistema recibe el nombre de *sistema de ecuaciones lineales*.

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Son un conjunto de ecuaciones formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Por ejemplo, $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones 2×2 pues está formado por dos ecuaciones y dos incógnitas, x y y.

Sistemas de ecuaciones lineales 3×3

Son un conjunto de ecuaciones formado por tres ecuaciones lineales y tres incógnitas.

Por ejemplo, $\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ -2x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones 3×3, ya que está formado por tres ecuaciones y tres incógnitas, x, y y z.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Solucionar un sistema de ecuaciones lineales es encontrar un punto que es a la vez, solución de cada una de las ecuaciones que intervienen.

EJEMPLO

Plantear un sistema de ecuaciones para la siguiente situación.

Para ingresar a un museo, Luisa paga \$33.000 por 3 entradas de adulto y 2 de niño. Mientras que Carlos por 5 de adulto y 4 de niño paga \$57.000.

Primero, se definen las variables del problema.

x: Valor entrada de un adulto.

y: Valor entrada de un niño.

Luego, se plantean las ecuaciones.

$$\underbrace{\text{3 entradas de adulto}}_{3x} \text{ y } \underbrace{\text{2 de niños}}_{+\;2y} \text{ cuestan } \underbrace{\$33.000}_{=\;33.000}$$

$$\underbrace{\text{5 entradas de adulto}}_{5x} \text{ y } \underbrace{\text{4 de niños}}_{+\;4y} \text{ cuestan } \underbrace{\$57.000}_{=\;57.000}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones que representa la situación anterior es:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 33.000 \\ 5x + 4y = 57.000 \end{cases}$$

3.1 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones 2 × 2

Ampliaciones multimedia

Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2 × 2, se pueden utilizar varios métodos como el método gráfico, el método de sustitución, el método de igualación, el método de reducción y el método por determinantes.

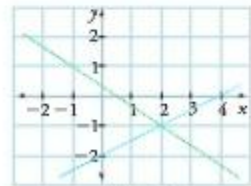


Figura 5

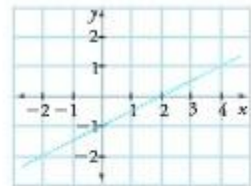


Figura 6

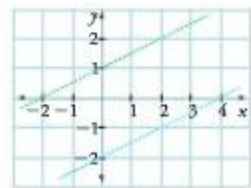


Figura 7

Método gráfico

Este método consiste en representar gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema. El punto de corte entre las dos rectas es la solución del sistema.

Cuando se utiliza el método gráfico para resolver un sistema 2 × 2 se presentan los siguientes casos.

Las rectas se cortan en un solo punto

En este caso el sistema de ecuaciones tiene una única solución (x, y) que corresponde a las coordenadas del punto de corte de las dos rectas, como se muestra en la figura 5. Así, el sistema recibe el nombre de **determinado** o **consistente**.

Las rectas coinciden en todos sus puntos

En este caso el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, como se muestra en la figura 6. Por tanto, el sistema recibe el nombre de **indeterminado**.

Las rectas son paralelas

En este caso las rectas no tienen punto en común. Es decir, el sistema de ecuaciones no tiene solución, como se muestra en la figura 7. Así, el sistema recibe el nombre de **inconsistente**.

EJEMPLO

En economía se denomina punto de equilibrio al punto donde coinciden las rectas de las ecuaciones de oferta y demanda.

Si $2y - x = 8$ es la ecuación que determina la demanda y $6y - 5x = 12$ es la ecuación de oferta, determinar el punto de equilibrio.

Primero, se escribe en forma explícita cada ecuación.

$2y - x = 8$ Ecuación de demanda.

$y = \frac{1}{2}x + 4$ Se despeja y.

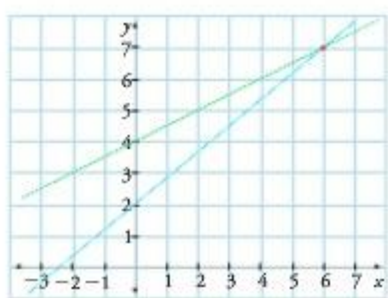
Así, la recta tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y punto de corte con el eje y en 4.

$6y - 5x = 12$ Ecuación de oferta.

$y = \frac{5}{6}x + 2$ Se despeja y.

Así, la recta tiene pendiente $\frac{5}{6}$ y punto de corte con el eje y en 2.

Luego, se representan las rectas en el mismo plano.



El punto de equilibrio entre la oferta y demanda es (6, 7).

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Soluciono problemas

Responde.

198. ¿Cuántos puntos se necesitan para realizar la gráfica de una línea recta?

199. ¿Cómo deben ser las pendientes de las rectas de las ecuaciones que forman un sistema de ecuaciones lineales inconsistente?

200. ¿Qué tipo de solución tiene un sistema de ecuaciones cuya gráfica son dos rectas perpendiculares?

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

201. La ecuación $2x - 5y = 4$ tiene infinitas soluciones.

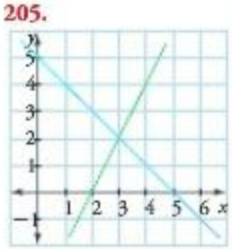
202. Un sistema de ecuaciones lineales 2×2 es consistente si las rectas que lo conforman tienen al menos dos puntos en común.

203. Para mostrar que un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 es inconsistente, se debe realizar la representación gráfica de las ecuaciones.

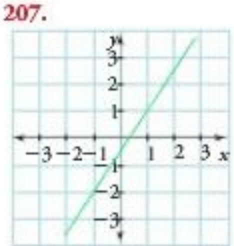
204. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre tiene, por lo menos, una solución.

Determina si los sistemas de ecuaciones lineales representados gráficamente tienen solución única, infinitas soluciones o no tienen solución. Escribe el sistema de ecuaciones asociado a cada gráfica.

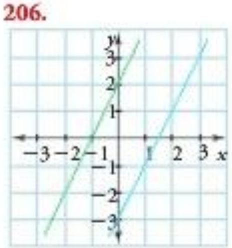
205.



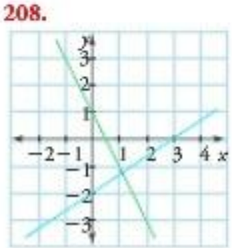
207.



206.



208.



Verifica si los puntos dados son una solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

209. $\begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$ $(1, 1)$

210. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ $(2, -1)$

Encuentra la solución gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

211. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2y = x + 8 \end{cases}$

214. $\begin{cases} 3x - 1 = y \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

212. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = -1 \end{cases}$

215. $\begin{cases} 2x + 1 = 3y \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

213. $\begin{cases} 8x - 2y - 10 = 0 \\ 3x - 3y - 15 = 0 \end{cases}$

216. $\begin{cases} y - 4 = 2x \\ 6y - 12x = 24 \end{cases}$

Resuelve.

217. Las rectas r, s y t que representan a tres ecuaciones lineales se cruzan formando un triángulo. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema formado por r y s? ¿Y por r y t? ¿Y por s y t?

218. Las rectas r, s, t y u, que representan a ecuaciones lineales se cruzan formando un rombo. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema formado por dos de ellas? Estudia los casos que se pueden presentar.

Lee y resuelve.

Las ecuaciones de oferta y demanda de una empresa textil son $2y - x - 4 = 0$ y $6y - x - 36 = 0$, respectivamente, donde y es el precio en millones de pesos y x la cantidad de productos en miles.

219. Encuentra el punto de equilibrio de la oferta y la demanda por el método gráfico.

220. ¿Cuántos productos se deben vender para que la oferta sea de 6 millones?

Lee y responde.

En dos tiendas se vende un producto de aseo el cual varía el precio cada mes desde el comienzo del año. La primera tienda tiene el precio inicial de \$500 y aumenta en \$100 cada mes. En la segunda tienda, el precio inicial del producto es de \$700 pesos y aumenta en \$90 cada mes.

221. ¿En qué tienda conviene comprar el producto?

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el **método de sustitución**, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se despeja una de las variables en cualquiera de las ecuaciones dadas.
- **Segundo,** se remplaza la expresión obtenida en el primer paso en la otra ecuación y se resuelve.
- **Luego,** se encuentra el valor de la otra variable remplazando, en cualquiera de las ecuaciones del sistema, el valor de la variable que se halló en el segundo paso.
- **Por último,** se verifican las soluciones.

EJEMPLOS

1. **Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución.**

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 & (1) \\ 4x + 2y = 2 & (2) \end{cases}$$ Se enumeran las ecuaciones.

Primero, se despeja una de las variables en una de las dos ecuaciones.

$2x - 5y = 7$ Se toma la ecuación (1).

$2x = 5y + 7$ Se suma $5y$.

$x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2}$ Se despeja x.

Segundo, se remplaza la expresión obtenida para x en la ecuación (2).

$4x + 2y = 2$ Ecuación (2).

$4\left(\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 2y = 2$ Se sustituye x por $\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}$.

$10y + 14 + 2y = 2$ Se multiplica y se simplifica.

$12y + 14 = 2$ Se suman términos semejantes.

$12y = 2 - 14$ Se resta 14.

$12y = -12$ Se realiza la operación.

$y = -1$ Se divide entre 12.

Así, el valor de y es -1.

$2x - 5y = 7$ Ecuación (1).

$2x - 5(-1) = 7$ Se remplaza y por -1.

$2x + 5 = 7$ Se multiplica.

$2x = 2$ Se resta 5.

$x = 1$ Se divide entre 2.

Por tanto, la solución del sistema es $x = 1$ y $y = -1$.

Por último, se verifica la solución en el sistema de ecuaciones.

$2x - 5y = 7$ Ecuación (1).

$2(1) - 5(-1) = 7$ Se remplazan x por 1 y y por -1.

$2 + 5 = 7$ Se multiplica.

$7 = 7$ Se verifica la igualdad.

$4x + 2y = 2$ Ecuación (2).

$4(1) + 2(-1) = 2$ Se remplazan x por 1 y y por -1.

$4 - 2 = 2$ Se multiplica.

$2 = 2$ Se verifica la igualdad.

2. **Determinar la medida de dos ángulos complementarios, si la medida del ángulo mayor excede a la medida del ángulo menor en 40°.**

Primero, se identifican las variables.

a: Medida del ángulo mayor.

b: Medida del ángulo menor.

Segundo, se plantean las ecuaciones.

$a + b = 90$ Los ángulos son complementarios.

$a = b + 40$ Relación entre los ángulos.

Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones.

$a + b = 90$ Ecuación.

$(b + 40) + b = 90$ Se remplaza a por $b + 40$.

$2b + 40 = 90$ Se realizan las operaciones.

$b = 25$ Se despeja b.

$a = b + 40$ Ecuación.

$a = 25 + 40 = 65$ Se remplaza b por 25.

Por tanto, la medida de los ángulos son 65° y 25°.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Soluciono problemas

Responde.

222. ¿Cuáles son los pasos que se deben seguir para resolver un sistema de ecuaciones 2×2 por el método de sustitución?

223. ¿Cuáles son las ventajas de resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 por el método de sustitución al compararlo con el método gráfico?

Despeja la variable indicada en cada caso.

224. $2m + 2n = 6$, despeja m.

225. $\frac{1}{3}x - 2y = -1$, despeja y.

226. $\frac{2}{3}x + 5y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$, despeja x.

227. $\frac{2x - y}{4} = \frac{2x + 3y}{2}$, despeja y.

Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

228. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$

229. $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 6x - 9y = -1 \end{cases}$

230. $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 6x = 10y + 8 \end{cases}$

231. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ y = -\frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$

232. $\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$

233. $\begin{cases} 6x - 2 = 2y + 1 \\ 3x - 5 = y + 4 \end{cases}$

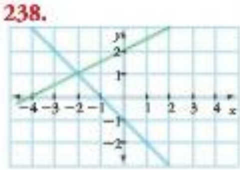
234. $\begin{cases} 5x - 3 = 4y + 4 \\ 6x = 3y + 3 \end{cases}$

235. $\begin{cases} \frac{1}{2}y + 2x = x - 1 \\ \frac{5}{2}x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases}$

Encuentra la ecuación de la recta de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Luego, encuentra la solución por el método de sustitución.

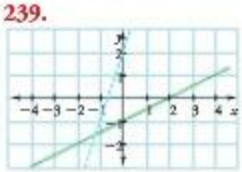
236.

238.



237.

239.



Para resolver el siguiente problema: "Un supermercado ofrece dos tipos de carne molida: *light* (con 4% de materia grasa) y 'sabrosa' (con 10% de materia grasa), pero desea ofrecer una tercera opción a sus clientes: una carne molida con 6% de materia grasa. ¿Cuánta carne de cada tipo que existe debe mezclarse para obtener 150 kilogramos del nuevo producto?", un estudiante plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y = 150$$

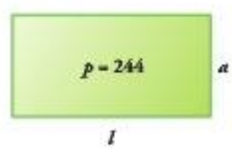
$$\frac{4x + 10y}{x + y} = 6$$

240. Explica qué significa cada una de las incógnitas del sistema y cómo se obtiene la segunda ecuación.

241. Resuelve el sistema y da respuesta al problema.

Observa cada figura. Luego, propón un problema relacionado con sistemas de ecuaciones lineales en cada caso y resuélvelo aplicando el método de sustitución.

242.



243.

Plantea un sistema de ecuaciones para cada situación y resuelve usando el método de sustitución.

244. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°. Si uno de los ángulos mide 60° más que el triple del segundo ángulo, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

245. La empresa A tiene 120 empleados entre hombres y mujeres. Si el número de mujeres excede en 20 al total de hombres, ¿cuántas mujeres y hombres hay en la empresa?

246. Para ingresar a la Feria del hogar se puede adquirir boletas para adultos a 4.500 pesos y para niños a 2.000 pesos. Si la familia González adquirió 6 boletas y pagó 17.000 pesos, ¿cuántos adultos y cuántos niños conforman la familia González?

Método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación se llevan a cabo los siguientes pasos:

- **Primero,** se despeja la misma variable en las dos ecuaciones dadas.
- **Segundo,** se igualan las expresiones obtenidas en el primer paso y se despeja la variable que queda.
- **Tercero,** se determina el valor de la otra variable remplazando en alguna de las ecuaciones despejadas, el valor de la variable encontrada en el segundo paso.
- **Por último,** se verifican las soluciones.

EJEMPLOS

1. **Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación**

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 & (1) \\ 2x + 4y = 10 & (2) \end{cases}.$$

Primero, se despeja x en cada una de las ecuaciones.

$5x - 3y = -1$ Ecuación (1).

$x = \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}$ Se despeja x.

$2x + 4y = 10$ Ecuación (2).

$x = -2y + 5$ Se despeja x.

Luego, se igualan las dos expresiones, así:

$\frac{3}{5}y - \frac{1}{5} = -2y + 5$

$\left(\frac{3}{5}y - \frac{1}{5}\right)5 = (-2y + 5)5$ Se multiplica por 5.

$3y - 1 = -10y + 25$ Se resuelven las operaciones.

$13y = 26$ Se suma $10y$ y 1.

$y = 2$ Se divide entre 13.

Ahora, se halla x en alguna de las ecuaciones donde aparece despejada, como sigue:

$x = -2y + 5$ Ecuación.

$x = -2(2) + 5$ Se remplaza y por 2.

$x = 1$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la solución del sistema es $x = 1$ y $y = 2$.

2. **Determinar la solución del sistema por el método de igualación**

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}n = -\frac{1}{2} & (1) \\ -2m + 6n = 4 & (2) \end{cases}.$$

Primero, se despeja m en cada una de las ecuaciones.

$\frac{1}{2}m - \frac{3}{2}n = -\frac{1}{2}$ Ecuación (1).

$\left(\frac{1}{2}m - \frac{3}{2}n\right)\cdot 2 = -\frac{1}{2}\cdot 2$ Se multiplica por 2.

$m - 3n = -1$ Se simplifica.

$m = 3n - 1$ Se despeja m.

$-2m + 6n = 4$ Ecuación (2).

$-2m = 4 - 6n$ Se resta $6n$.

$m = 3n - 2$ Se despeja m.

Ahora se igualan las dos expresiones, así:

$3n - 1 = 3n - 2$

$3n - 3n = -2 + 1$ Se resta $3n$ y se suma 1.

$0 = -1$ Se realizan las operaciones.

En este caso el sistema de ecuaciones no tiene solución.

3. **Las empresas A y B venden paquetes turísticos. La empresa A paga a sus asesores 500 mil pesos fijos más 80 mil pesos por paquete turístico vendido. La empresa B paga 100 mil pesos fijos y 100 mil pesos por paquete vendido. ¿Cuántos paquetes se deben vender para que cada empresa pague el mismo valor?**

x: Cantidad de paquetes vendidos.

y: Pago por la venta de x paquetes.

Primero, se plantean las ecuaciones.

$y = 80x + 500$ Empresa A.

$y = 100x + 100$ Empresa B.

Luego, se igualan las expresiones así:

$80x + 500 = 100x + 100$

$x = 20$ Se despeja x.

Ahora, se determina el pago de cada empresa, así:

$y = 80(20) + 500$ Se remplaza y se simplifica.

$= 2.100$

Finalmente, las empresas deben vender 20 paquetes y el pago recibido es $2.100.000.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

247. ¿Cuáles son los pasos que se deben seguir para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de igualación?

248. ¿Cómo deben ser los valores de a y b tales que al solucionar el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación $\begin{cases} x - 2y = a \\ -3x + 6y = b \end{cases}$ se obtiene que $0 = 0$?

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

249. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$

250. $\begin{cases} 8x + y = -5 \\ 16x + 2y = -10 \end{cases}$

251. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = -\frac{10}{3} \end{cases}$

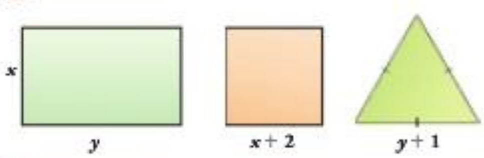
252. $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ -2x - y = -3 \end{cases}$

253. $\begin{cases} 2x - 1 = 4y \\ 4y - 2x = 3 \end{cases}$

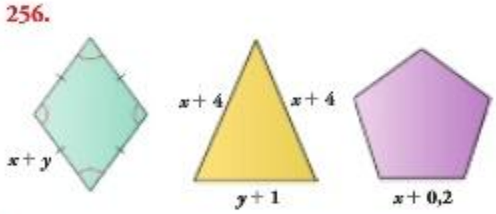
254. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = -4 \\ \frac{1}{2}x = \frac{5}{3} - 3y \end{cases}$

Encuentra el valor de las variables para que el perímetro de cada una de las figuras sea igual.

255.



256.



Encuentra los valores de a y b para que la solución del sistema de ecuaciones sea la indicada.

257. $\begin{cases} ax + by = 11 \\ 3ax - by = 9a \end{cases}$ $\quad x = 5, y = 3$

258. $\begin{cases} ax + by = 12 \\ bx + ay = 12 \end{cases}$ $\quad x = \frac{12}{5}, y = \frac{12}{5}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones literales para x y y, analizando los distintos valores que pueden tomar el resto de los coeficientes literales.

259. $\begin{cases} x - 2ay = 4 \\ 2x + y = -6b \end{cases}$

260. $\begin{cases} 3cx + y = 7 \\ -x + dy = -8 \end{cases}$

Resuelve cada problema aplicando el método de igualación.

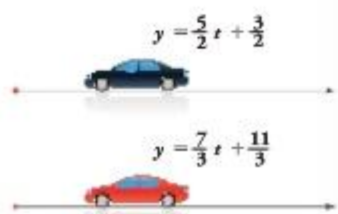
261. Una empresa ofrece productos de aseo. La oferta y la demanda de uno de sus productos están determinadas por las siguientes ecuaciones:

Oferta: $y = 3x + 25$.

Demanda: $y = -4x + 60$.

Donde x es el precio en miles de pesos y y es la cantidad de productos. ¿Cuántos productos debe haber y cuál debe ser el precio para que la oferta y la demanda sean iguales?

262. Dos automóviles parten de dos ciudades diferentes. Los automóviles describen su movimiento como se muestra en la figura, donde y es la distancia que llevan los automóviles, t es el tiempo en que transcurre el movimiento. ¿En qué momento los dos automóviles han recorrido la misma distancia?



263. Un hombre navega trabajosamente río arriba en un kayak, recorriendo 28 km en siete horas. Cuando llega al lugar indicado, da la vuelta y recorre el mismo trecho, ahora, río abajo, en apenas una hora. Determina la velocidad de la corriente del río.

Método de reducción

Ampliación multimedia

En el **método de reducción** se combinan las ecuaciones del sistema con el fin de reducir las dos ecuaciones del sistema a una sola, realizando los siguientes pasos:

- **Primero,** se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por números reales, de tal manera que los coeficientes de una de las variables en las dos ecuaciones, se diferencie únicamente en el signo.
- **Segundo,** se suman las ecuaciones transformadas de tal manera que se elimina una variable y se despeja la otra variable.
- **Finalmente,** se calcula el valor de la incógnita que falta sustituyendo en una de las ecuaciones originales.

Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción se pueden presentar los siguientes casos:

- **Caso 1.** Si al sumar las dos ecuaciones para eliminar una variable, se eliminan las dos variables, es decir, aparece la ecuación $0 = c$, donde c es una constante diferente de 0, el sistema no tiene solución, es decir, es inconsistente.
- **Caso 2.** Si al sumar las dos ecuaciones resulta la expresión $0 = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones, esto es, dependiente o indeterminado.
- **Caso 3.** Si al sumar las ecuaciones se obtiene una expresión de la forma $x = a$, con a número real, el sistema tiene una solución.

Recuerda que...

Si se multiplican o dividen todos los términos de una ecuación por un mismo número diferente de 0 se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO

Los dos últimos fines de semana Sofía llevó a sus nietos al cine. La primera vez pagó \$23.500 por dos adultos y un niño, y la segunda vez pagó \$25.500 por un adulto y tres niños. ¿Cuánto pagó Sofía por cada entrada de adulto y de niño?

Primero, se asignan las variables para cada incógnita.

a: Precio de una entrada de adulto.

n: Precio de una entrada de niño.

Segundo, se plantea un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a + n + 23.500 & (1) \\ a + 3n = 25.500 & (2) \end{cases}$$

Tercero, se resuelve el sistema de ecuaciones por reducción.

Para eliminar a se observa que la ecuación 1 tiene coeficiente 2, entonces, se busca que la ecuación 2 tenga el coeficiente opuesto al de la ecuación 1.

Se multiplica la ecuación 1 por 1.

$2a + n = 23.500$

$2a + n = 23.500$

Se multiplica la ecuación 2 por -2.

$a + 3n = 25.500 \qquad -2a - 6n = -51.000$

Se suman las ecuaciones transformadas para eliminar a.

$$\begin{cases} 2a + n = 23.500 \\ -2a - 6n = -51.000 \end{cases}$$

$0 - 5n = -27.500$

$-5n = -27.500$ Se realizan las operaciones.

$n = 5.500$ Se despeja n.

Luego, se remplaza el valor de n en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales.

$2a + 5.500 = 23.500$ Se remplaza el valor de n en (1).

$2a = 23.500 - 5.500$ Se resta 5.600 a ambos lados.

$a = 9.000$ Se despeja a.

Finalmente, se escribe la respuesta del problema.

El precio de una boleta para adulto es de \$9.000 y el de una boleta para niño es de \$5.500.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

264. ¿Cuál es primer paso para determinar la solución por reducción del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ 4x - 3y = -13 \end{cases}$$

265. ¿Cómo sabes cuándo un sistema de ecuaciones es inconsistente, al resolverlo por reducción?

Determina si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

266. $(-1, 3)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}. \qquad (\quad)$$

267. Los valores de a y b deben ser iguales para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 2x - ay = 3 \\ 3x + by = 2 \end{cases} \qquad (\quad)$$

Escribe frente a cada ecuación el número por el cual debe ser multiplicada para eliminar la variable indicada al sumar las ecuaciones.

268. $\begin{cases} 4m - 2n = 5 \\ -3m + 3n = -2 \end{cases}$, variable n.

269. $\begin{cases} -3x - 6y = 9 \\ -2x - 3y = 6 \end{cases}$, variable y.

270. $\begin{cases} \frac{3}{2}v + 3w = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w = \frac{3}{2} \end{cases}$, variable v.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones 2×2 por el método de reducción.

271. $\begin{cases} 2x = 3y + 6 \\ 4x = 2 + 6y \end{cases}$

272. $\begin{cases} 3m - 2n = -2 \\ 6m + 4n = -20 \end{cases}$

273. $\begin{cases} 5p = -6q + 25 \\ 3p - 4q = -13 \end{cases}$

274. $\begin{cases} \frac{2m + 3n}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{-2m - 3n}{-3} = \frac{5}{3} \end{cases}$

275. $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -1 \end{cases}$

276. $\begin{cases} \frac{3(3x - 1)}{2} = \frac{y}{6} \\ \frac{y - 5x}{2} = \frac{6}{5} \end{cases}$

Determina los valores de A y B para que el par ordenado sea solución del sistema de ecuaciones lineales.

277. $\begin{cases} Ax + By = -8 \\ 3Ax - 5By = 8 \end{cases} \quad (-2, -1)$

278. $\begin{cases} Ax + By = 24 \\ -Ax + 7By = 30 \end{cases} \quad (3, 2)$

279. $\begin{cases} 5Ax + 2By = -66 \\ 2Ax + 5By = 24 \end{cases} \quad (-6, 3)$

Resuelve los siguientes problemas utilizando el método de reducción.

280. Entre Dora y Martín tienen \$150.000. Si Dora tiene el triple de lo que tiene Martín, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

281. Las edades de Juan y César suman 35 años. Si el doble de la edad de Juan más el triple de la edad de César es 90, ¿cuáles son las edades de Juan y César?

282. Para la obra de teatro del grado 9.º A asistieron 90 personas. La entrada para adultos se pagó a \$8.000 y para niños a \$5.000. Si se recaudaron \$570.000, ¿cuántos adultos y cuántos niños entraron a la obra?

283. La base de un rectángulo es el doble de su altura y su perímetro mide 30 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

284. Ana María ahorró \$115.000 en billetes de \$2.000 y de \$5.000. Si tiene 32 billetes en total, ¿cuántos billetes tiene Ana María de cada denominación?

285. La suma de dos números es 61 y su diferencia es 5. ¿Cuáles son los números?

286. En una fábrica se mezcla vinagre de \$3.000 el litro con vinagre de \$5.000 el litro y se obtiene una combinación que se puede vender a \$4.200 el litro. ¿Cuántos litros de cada tipo de vinagre se deben mezclar para obtener 500 litros de la combinación?

Resuelve.

287. Plantea un sistema de ecuaciones 2×2, de tal manera que tenga como solución a $x = 1$ y $y = 3$.

Método por determinantes

Recurso imprimible Actividad

Un **determinante** es un número asociado a un arreglo de números reales en igual cantidad de filas y de columnas.

La notación $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ corresponde a un determinante 2×2 o de orden dos, asociado a un arreglo de dos filas y dos columnas.

En el determinante, a y d forman la diagonal principal y c y b forman la diagonal secundaria.

El valor del determinante equivale a la diferencia entre el producto de los números de la diagonal principal y el producto de los números de la diagonal secundaria. Esto es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Regla de Cramer

Es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando determinantes mediante un método llamado **Regla de Cramer.**

A partir del sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ se pueden formar tres determinantes así:

Determinante del sistema

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$, formado por los coeficientes de x y de y.

Determinante para x

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$, formado por los términos independientes y los coeficientes de y.

Determinante para y

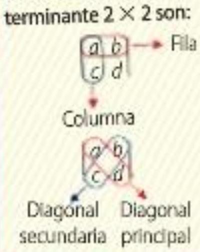
$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$, formado por los coeficientes de x y los términos independientes.

Para solucionar sistemas 2×2 se utilizan los anteriores determinantes, aplicando la regla de Cramer, así,

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ y } y = \frac{D_y}{D},\ D \neq 0$$

Recuerda que...

Los elementos del determinante 2×2 son:



Matemáticamente

¿Qué tipo de solución se obtiene si el determinante del sistema de ecuaciones es igual a cero?

EJEMPLOS

1. Encontrar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$.

Primero, se halla el producto de las diagonales y luego, se calcula la diferencia entre esos productos.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 4(-7) - 5(-3)$$
$$= -28 + 15 = -13$$

Luego, el valor del determinante $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$ es -13.

2. Determinar el valor de x de tal manera que el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$ sea 20.

Primero, se resuelve el determinante.

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 6x - 16$$

Segundo, se plantea la ecuación utilizando el valor dado.

$$6x - 16 = 20 \;\rightarrow\; 6x = 20 + 16 \;\rightarrow\; x = 6$$

El valor de x debe ser 6 para que el determinante sea igual a 20.

3. Resolver el siguiente problema.

Antonio compró un cuadro en forma de rectángulo. Si el perímetro del cuadro es 60 cm y la diferencia entre el triple del largo y el triple del ancho equivale a 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del cuadro que compró Antonio?

Primero, se asignan variables a las incógnitas del problema.

x: Medida del largo. y: Medida del ancho.

Segundo, se plantea el sistema de ecuaciones siguiendo el enunciado del problema.

El perímetro de un rectángulo es la suma de todos los lados, es decir, $x + y + x + y = 2x + 2y$

Entonces, la ecuación para la primera parte es

$$2x + 2y = 60.$$

La palabra diferencia se refiere a la operación resta, entonces, el triple del largo menos el triple del ancho es $3x - 3y$. Así, la ecuación es $3x - 3y = 18$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}.$$

Luego, se resuelve el sistema utilizando la regla de Cramer.

Se calculan los determinantes del sistema.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 60 & 2 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -180 - 36 = -216$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 60 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 180 = -144$$

Se aplica la regla de Cramer,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-216}{-12} = 18$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-144}{-12} = 12$$

Finalmente, las dimensiones del cuadro de Antonio son 18 cm de largo por 12 centímetros de ancho.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina si el siguiente sistema de ecuaciones se puede resolver utilizando la regla de Cramer.

288. $\begin{cases} 7x + 4y = 3 \\ 14x = 6 - 8y \end{cases}$

Calcula el valor de los siguientes determinantes.

289. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$

290. $\begin{vmatrix} \frac{-3}{5} & 0 \\ 4 & -\frac{2}{7} \end{vmatrix}$

291. $\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

292. $\begin{vmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{2} \end{vmatrix}$

Encuentra el valor de x dado el valor de cada determinante.

293. $\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 12 & x \end{vmatrix} = -15$

294. $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 11$

295. $\begin{vmatrix} 2 & x \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12$

296. $\begin{vmatrix} 15 & -3 \\ x & -3 \end{vmatrix} = 30$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando la regla de Cramer si es posible.

297. $\begin{cases} 2x - 4y = 14 \\ 5x + 2y = -25 \end{cases}$

298. $\begin{cases} 4x = 3y + 1 \\ 3x - 6y = 6 \end{cases}$

Responde.

299. ¿Cuál es el valor de un determinante que tiene dos filas iguales? Explica tu respuesta.

300. Si un determinante tiene un cero en alguna posición, ¿cuál es su valor? Explica tu respuesta.

Resuelve los siguientes problemas mediante el uso de la regla de Cramer.

301. En Colombia existen 84 grupos indígenas que se pueden clasificar en dos subgrupos. Aquellos que hablan sus lenguas aborígenes y aquellos que no.

La cantidad de grupos que hablan lenguas aborígenes es tres veces la que no las hablan aumentado en 4. ¿Cuántos grupos hablan lenguas aborígenes y cuántos no las hablan?

302. La mitad de los pisos del edificio Colpatria más la tercera parte de los pisos del edificio Avianca es 39. Si el doble de los pisos de la torre Colpatria excede en 16 al doble de los pisos de Avianca, ¿cuántos pisos tiene la torre Colpatria y cuántos el edificio Avianca?

Problemas de aplicación

Recurso imprimible

Existen problemas que se pueden solucionar a partir del planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales. Para su solución se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- **Primero,** se lee con atención el problema en forma general y luego se determinan las incógnitas o variables del problema.
- **Segundo,** se plantea el sistema de ecuaciones.
- **Luego,** se resuelve el sistema de ecuaciones por alguno de los métodos estudiados.
- **Finalmente,** se verifican las soluciones y se responde el problema.

EJEMPLO

Para producir un jugo concentrado se mezclan dos tipos de jugos, uno al 30% de fruta sólida y el otro al 60% de fruta sólida. ¿Cuántos litros de cada tipo de jugo se necesitan para producir 100 L de jugo concentrado al 48% de fruta sólida?

Primero, se determinan las incógnitas,

x: Litros de jugo al 30% de fruta sólida.

y: Litros de jugo al 60% de fruta sólida.

Segundo, se plantean las ecuaciones.

$x + y = 100$ Cantidad de jugo concentrado.

$0{,}3x + 0{,}6y = 0{,}48(100)$ Mezcla de los dos jugos.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 100 & (1) \\ 0{,}3x + 0{,}6y = 48 & (2) \end{cases}$$

Se transforma la ecuación 2 de tal manera que se obtengan coeficientes enteros.

$(0{,}3x) \cdot 10 + (0{,}6y) \cdot 10 = (48) \cdot 10$ Se multiplica por 10.

$3x + 6y = 480$ Se realizan operaciones.

Tercero, se resuelve el sistema de ecuaciones por uno de los métodos, puede ser por el método de reducción.

$$\begin{cases} x + y = 100 & (1) \\ 3x + 6y = 480 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y = -300 \\ 3x + 6y = 480 \end{cases}$$ Se multiplica la ecuación (1) por -3.

$$\begin{array}{r} -3x - 3y = -300 \\ 3x + 6y = 480 \\ \hline 0 + 3y = 180 \end{array}$$ Se suman las ecuaciones.

$y = 60$ Se despeja y.

Se determina el valor x, teniendo el valor de y.

$x + 60 = 100$ Se remplaza el valor de y en (1).

$x = 40$ Se despeja x.

Entonces, se requieren 40 L de jugo al 30% de fruta sólida y 60 L de jugo al 60% de fruta, para producir 100 L de jugo concentrado al 48% de fruta sólida.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Relaciona cada enunciado con la expresión algebraica que le corresponde.

303. El doble de un número más el doble de otro es 80.

304. La diferencia del triple de un número y el doble de otro es 25.

305. La mitad de un número más otro número es 26.

306. La tercera parte de la diferencia de dos números es equivalente a la mitad de su suma.

a. $\frac{m-n}{3} = \frac{m+n}{2}$

b. $2x + 2y = 80$

c. $3x - 2y = 25$

d. $\frac{p}{2} + q = 26$

Determina para qué valores de k, el sistema dado cumple la condición en cada caso. Justifica tu respuesta.

$$\begin{aligned} kx + y &= 1 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}$$

307. No tiene solución.

308. Tiene única solución.

309. Tiene infinitas soluciones.

310. Escribe un problema que tenga sentido y que se pueda resolver con el siguiente sistema de ecuaciones. Luego, resuélvelo.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 10y + x = 35 \end{cases}$$

Plantea un sistema de ecuaciones para resolver los problemas.

311. La diferencia de dos números es 85 y uno de ellos es 20 unidades más que el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

312. La suma de los ángulos de un paralelogramo es 360°. Si la diferencia de los ángulos consecutivos es 20°, determina el valor de cada ángulo.

313. Las edades de Andrés y Luisa suman 61 años. La edad de Luisa es 11 años más que la de Andrés. ¿Cuáles son las edades de cada uno?

314. Julián y Sebastián tienen ahorrados \$250.000 entre los dos. Si Julián ha ahorrado \$70.000 más que Sebastián, ¿cuánto ha ahorrado cada uno?

315. Las familias Parrado y Gutiérrez ingresan a un cinema y pagan boletas para funciones en 3D y 2D. Si la familia Parrado pagó \$63.000 por dos boletas para 3D y tres para 2D, y la familia Gutiérrez pagó \$73.000 por dos boletas en 3D y cuatro boletas en 2D, ¿cuál es el valor de la boleta para cada una de las funciones?

316. En un condominio hay 104 apartamentos repartidos en dos edificios. Si en el primer edificio hay 8 apartamentos más que en el segundo, ¿cuántos apartamentos hay en cada edificio?

Lee y resuelve los siguientes problemas.

317. *Por presumir de certero*
un tirador atrevido
se encontró comprometido
en el lance que os refiero:

Y fue, que ante una caseta
de la feria del lugar
presumió de no fallar
ni un tiro con la escopeta,

y el feriante alzando el gallo
un duro ofreció pagarle
por cada acierto y cobrarle
a tres pesetas el fallo.

Dieciséis veces tiró
el tirador afamado
al fin dijo, despechado
por los tiros que falló:

"Mala escopeta fue el cebo
y la causa de mi afrenta
pero ajustada la cuenta
ni me debes ni te debo".

Y todo el que atentamente
este relato siguió
podrá decir fácilmente
cuántos tiros acertó.

Tomado de *Enjambre matemático*
por Rafael Rodríguez Vidal.

318. Un recipiente A contiene nueve litros de zumo de jugo y tres litros de agua; el recipiente B contiene 12 litros de zumo de jugo y 18 litros de agua. ¿Cuántos litros se deben sacar de cada recipiente para obtener una mezcla de 7 litros de agua y 7 litros de zumo de jugo?

3.2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones 3×3

Un **sistema de ecuaciones 3×3** es un conjunto formado por tres ecuaciones con tres incógnitas. Se puede expresar como

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$$

Matemáticamente

Si dos ecuaciones de un sistema 3×3 son equivalentes, ¿cómo es la solución del sistema de ecuaciones?

Método de reducción

Para resolver un sistema de ecuaciones 3×3 por el método de reducción se realiza lo siguiente:

- **Primero,** se toman dos ecuaciones cualesquiera del sistema y se elimina una variable por el método de reducción, de tal manera que se obtenga una ecuación lineal con dos incógnitas.
- **Segundo,** se repite el proceso anterior utilizando una de las ecuaciones del primer paso y la ecuación restante para eliminar la misma variable que en el primer paso.
- **Luego,** se forma un sistema 2×2, con las ecuaciones obtenidas en los dos pasos anteriores y se resuelve el nuevo sistema de ecuaciones 2×2.
- **Finalmente,** se remplazan los valores encontrados al solucionar el sistema 2×2, en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se halla el valor de la tercera incógnita.

Recuerda que...

La solución de un sistema de ecuaciones 3×3, si existe, es un punto de la forma (x, y, z) que satisface las tres ecuaciones del sistema simultáneamente.

EJEMPLO

Una empresa de construcción tiene tres sucursales en Bogotá, Medellín y Barranquilla. El número total de ejecutivos de las tres sucursales es 31, de tal forma que el número de ejecutivos radicados en Medellín es 3 menos que el número de ejecutivos que hay en Bogotá. Además, el número de ejecutivos en Bogotá excede en 1 al de los ejecutivos ubicados en Barranquilla y Medellín juntos. ¿Cuántos ejecutivos están radicados en cada ciudad?

Primero, se identifican las incógnitas del problema.

x: Número de ejecutivos en Bogotá.
y: Número de ejecutivos en Medellín.
z: Número de ejecutivos en Barranquilla.

Segundo, se plantea un sistema de ecuaciones 3×3.

$$\begin{cases} x + y + z = 31 & (1) \\ x - 3 = y & (2) \\ y + z + 1 = x & (3) \end{cases}$$

Tercero, se plantea un sistema equivalente al anterior.

$$\begin{cases} x + y + z = 31 & (1) \\ x - y = 3 & (2) \\ -x + y + z = -1 & (3) \end{cases}$$

Cuarto, se realiza la suma de las ecuaciones 2 y 3.

$$\begin{array}{r} x - y \qquad = 3 \\ \underline{-x + y + z = -1} \\ z = 2 \end{array}$$

En este caso se eliminaron x y y.

Quinto, se suman las ecuaciones 1 y 2.

$$\begin{array}{l} x + y + z = 31 \\ \underline{x - y \qquad = 3} \\ 2x \qquad + z = 34 \end{array}$$

Sexto, se remplaza $z = 2$ en la última ecuación obtenida y se despeja x:

$$\begin{aligned} 2x + z &= 34 \\ 2x + 2 &= 34 \\ 2x &= 34 - 2 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Luego, se remplaza $x = 16$ en la ecuación 2 para hallar el valor de y.

$$\begin{aligned} x - 3 &= y \\ 16 - 3 &= y \\ y &= 13 \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que hay 16 ejecutivos en Bogotá, 13 ejecutivos en Medellín y 2 en Barranquilla.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

319. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la solución (x, y, z) de un sistema de ecuaciones 3×3?

320. ¿Cuál es la representación gráfica de la ecuación lineal $ax + by + cz = 0$?

321. ¿Cuál es el método utilizado en la solución de un sistema de ecuaciones lineales de 3×3? Explica tu respuesta.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. Luego, relaciona cada sistema con su respectiva solución.

322. $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y - z = -3 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$ **a.** $(0, 7, 4)$

323. $\begin{cases} x - 6y - 2z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \\ -x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$ **b.** $(-3, -2, 4)$

324. $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = -8 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$ **c.** $(-1, -2, 0)$

325. $\begin{cases} -2x + 3y + 3z = -4 \\ 5x - 4y - 2z = 3 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **d.** $(1, 2, -1)$

326. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 13 \\ 5x - 2y + 2z = 24 \\ -3x + y - z = -14 \end{cases}$ **e.** $(4, 1, 3)$

327. $\begin{cases} 8x - 5y + 6z = 10 \\ 7x - 2y + 5z = 3 \\ 3x + 7y + 3z = -11 \end{cases}$ **f.** $(3, 1, -2)$

Responde y explica tu respuesta en cada caso.

328. Si $(4, -8, 3)$ es solución de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, entonces, ¿$(3, -8, 4)$ es también solución del mismo sistema?

329. Si un sistema de ecuaciones lineales de 3×3 no tiene solución, ¿cuál es su interpretación geométrica?

330. Si un sistema de ecuaciones lineales de 3×3 tiene infinitas soluciones, ¿cuál es su interpretación geométrica?

331. Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones, realizando un cambio de variable.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 7 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = 6 \end{cases}$$

Determina los valores de *a*, *b* y *c* en los siguientes sistemas de ecuaciones, dada la solución.

332. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = a \\ 3x + y - 3z = b \\ 4x + 2y - z = c \end{cases}$ $(2, 3, 2)$

333. $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = a \\ bx - 3y + 4z = 1 \\ x - 2y - 2z = c \end{cases}$ $(1, 2, -1)$

334. Inventa una situación cuya simbolización algebraica se represente mediante el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Luego, resuélvelo.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y + 3z = 11 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$$

335. Resuelve.

La empresa de entretenimiento Jazz tiene tres proveedores de alimentos y desea realizar un evento donde se ofrecerán tres platos de comida: entrada, plato fuerte y postre.

Se decide contratar los servicios de los tres proveedores. La siguiente tabla muestra los productos adquiridos con cada proveedor:

	Entrada	Plato fuerte	Postre
Proveedor A	15	25	20
Proveedor B	25	20	5
Proveedor C	20	15	35

Si la empresa pagó al proveedor A 345 mil pesos; al proveedor B, 260 mil pesos, y al proveedor C, 355 mil pesos, ¿a qué precio compró cada plato?

Método de determinantes

Ampliación multimedia

Un determinante formado por tres filas y tres columnas se llama **determinante de tercer orden** o **de orden 3** como se observa en la figura 8.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Figura 8

Para hallar el valor del determinante de tercer orden, se aplica un método conocido como la **Regla de Sarrus.**

En forma general, la regla de Sarrus se aplica así,

- **Primero,** se repiten las dos primeras filas en el determinante inicial.
- **Luego,** se realiza la suma de los productos de las diagonales, $aei + dhc + gbf$ y, luego, se suman los productos de las otras diagonales, $ceg + fha + ibd$.
- **Finalmente,** se restan las sumas obtenidas.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

Regla de Cramer

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de determinantes se aplica la **regla de Cramer**.

Para resolver el sistema $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$ con la regla de Cramer, se tiene que:

$$x = \frac{D_x}{D};\ D \neq 0 \qquad y = \frac{D_y}{D};\ D \neq 0 \qquad z = \frac{D_z}{D};\ D \neq 0$$

Donde, D es el determinante general, D_x el determinante de x, D_y el determinante de y y D_z la determinante de z.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}$$

EJEMPLO

Hallar el valor del determinante $D = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$.

Primero, se repiten las dos primeras filas.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Luego, se realiza la suma de los productos de las diagonales, así:

$(-3)(-1) \cdot 2 + 4 \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 6 = 158$

$5(-1) \cdot 1 + 6 \cdot 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 4 = -115$

Ahora, el valor del determinante se obtiene al restar las anteriores sumas.

$$D = 158 - (-115) = 273$$

Por tanto, el valor del determinante es 273.

Problemas de aplicación

Para resolver problemas que conducen al planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales 3×3, se siguen los mismos pasos explicados para sistemas de ecuaciones lineales 2×2.

EJEMPLOS

1. Tres materiales contienen porcentajes de diferentes elementos, carbón, cromo y hierro, como se muestra en la tabla. El material A es un tipo de hierro forjado, el material B es un tipo de acero inoxidable y el material C es un tipo de hierro fundido. ¿Cuánto material de cada tipo se puede formar con 20 toneladas de carbono, 45 toneladas de cromo y 600 toneladas de hierro?

	Material A	Material B	Material C
Hierro	99%	84%	93%
Carbón	1%	1%	4%
Cromo	0%	15%	3%

Primero, se identifican las variables.

x: Cantidad de material A. z: Cantidad de material C.

y: Cantidad de material B.

Luego, se plantean las ecuaciones.

$0,99x + 0,84y + 0,93z = 600$ Uso de hierro.

$0,01x + 0,01y + 0,04z = 20$ Uso de carbón.

$0,15y + 0,03z = 45$ Uso de cromo.

Ahora, se calcula los determinantes D, D_x, D_y, D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 0,99 & 0,84 & 0,93 \\ 0,01 & 0,01 & 0,04 \\ 0 & 0,15 & 0,03 \end{vmatrix} = -0,0045$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 600 & 0,84 & 0,93 \\ 20 & 0,01 & 0,04 \\ 45 & 0,15 & 0,03 \end{vmatrix} = -0,0405$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0,99 & 600 & 0,93 \\ 0,01 & 20 & 0,04 \\ 0 & 45 & 0,03 \end{vmatrix} = -0,9495$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 0,99 & 0,84 & 600 \\ 0,01 & 0,01 & 20 \\ 0 & 0,15 & 45 \end{vmatrix} = -2,0025$$

Luego, se determina el valor de cada incógnita.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-0,0405}{-0,0045} = 9$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-0,9495}{-0,0045} = 211$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2,0025}{-0,0045} = 445$$

Por tanto, la cantidad que se produce del material A es 9 toneladas, del material B es 211 toneladas y del material C 445 toneladas.

2. Tres familias asisten a una función de teatro. La familia Romero compra 3 entradas para adultos, 2 para adolescentes, 1 para niños y paga en total 52.000 pesos. La familia Gómez compra 2 entradas para adultos, 2 para adolescentes, 4 para niños y paga en total 60.000 pesos. La familia Pérez compra 2 entradas para adulto, 3 para adolescentes, 3 para niños y paga en total 62.000 pesos.

¿Cuál es el precio de entrada para un adulto, un adolescente y un niño por separado?

Primero, se eligen las variables del problema:

x: Valor de la entrada de un adulto.

y: Valor de la entrada de un adolescente.

z: Valor de la entrada de un niño.

Luego, se plantea el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 52.000 & \text{Familia Romero} \\ 2x + 2y + 4z = 60.000 & \text{Familia Gómez} \\ 2x + 3y + 3z = 62.000 & \text{Familia Pérez} \end{cases}$$

Se plantean los determinantes y se resuelven.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 52.000 & 2 & 1 \\ 60.000 & 2 & 4 \\ 62.000 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 52.000 & 1 \\ 2 & 60.000 & 4 \\ 2 & 62.000 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 52.000 \\ 2 & 2 & 60.000 \\ 2 & 3 & 62.000 \end{vmatrix}$$

Se aplica la regla de Cramer para encontrar el valor de las incógnitas.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-120.000}{-12} = 10.000$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-96.000}{-12} = 8.000$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-72.000}{-12} = 6.000$$

Por tanto, el valor de la entrada para adultos es de 10.000 pesos, para adolescentes es 8.000 pesos y para niños, 6.000 pesos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Explica mediante un ejemplo cada regla.

336. Regla de Sarrus.

337. Regla de Cramer.

Responde y explica tu respuesta.

338. ¿Cuál será el valor de un determinante 3×3 que tiene dos filas iguales?

339. ¿Cuál es la solución de un sistema de ecuaciones 3×3 cuando el determinante general es cero?

Encuentra el valor de los siguientes determinantes.

340. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

341. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

342. $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

343. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

344. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

345. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con la regla de Cramer.

346. $\begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ 4x - y + 2z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = 4 \end{cases}$

347. $\begin{cases} 5x - 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = -2 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$

348. $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = -2 \\ -3x + y + z = 3 \end{cases}$

349. Inventa una situación de inversión de capital cuya solución se represente mediante los siguientes determinantes. Luego, resuélvela.

$$D = \begin{vmatrix} 0,07 & 0,09 & 0,15 \\ 0,05 & 0,08 & 0,19 \\ 0,08 & 0,11 & 0,09 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 39.900.000 & 0,09 & 0,15 \\ 42.500.000 & 0,08 & 0,19 \\ 34.100.000 & 0,11 & 0,09 \end{vmatrix}$$

Resuelve cada situación.

350. Algunos alimentos proporcionan minerales y vitaminas necesarias para un óptimo estado de salud. La siguiente tabla muestra el contenido, por porción, de calcio, fósforo y vitamina C de tres frutas.

Frutas	Calcio (g)	Fósforo (g)	Vitamina C (g)
Fresa	0,22	0,23	0,7
Guayaba	0,2	0,35	0,75
Naranja	0,4	0,2	0,55

Si una dieta nutricional recomienda consumir 3,26 g de calcio, 3,24 g de fósforo y 8,05 g de vitamina C, entre otros minerales y vitaminas, ¿cuántas porciones de cada fruta se deben consumir, para cumplir la dieta propuesta?

351. La compañía de accesorios M&R distribuye a tres almacenes pulseras, sombreros y bolsos. El almacén A recibe 80 pulseras, 50 sombreros y 25 bolsos y paga a la compañía 641.000 pesos; el almacén B adquiere 55 pulseras, 35 sombreros y 40 bolsos por un total de 716.000 pesos, y el almacén C, adquiere 60 pulseras, 40 sombreros y 30 bolsos pagando a la compañía un total de 630.000 pesos. ¿Cuál es el valor de cada artículo?

352. Para una feria escolar, los estudiantes de grado noveno realizaron la venta de cuadernos, marcadores y bolígrafos. El grado 9.°A vendió 30 cuadernos, 10 marcadores y 25 bolígrafos, y recolectó un total de 69.000 pesos. Los estudiantes del grado 9.°B vendieron 40 cuadernos, 5 marcadores y 20 bolígrafos y recolectaron un total de 72.000 pesos. En el grado 9.°C vendieron 20 cuadernos, 6 marcadores y 30 bolígrafos, y recolectaron 58.800 pesos. ¿Cuál fue el precio de cada cuaderno, marcador y bolígrafo vendidos?

Funciones

Establece cuáles de las siguientes relaciones son funciones. Justifica tu respuesta.

353. $R_1 = \{(-5, 3), (-4, 3), (-3, 3), (-2, 3), (-1, 3), (0, 3)\}$

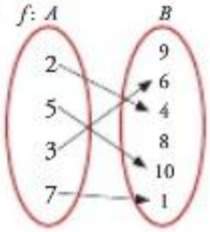
354. $R_2 = \{(-3, -6), (-3, 6), (-2, 2), (-2, -2)\}$

355. $R_3 = \{(-4, 2), (-4, 6), (-4, 8), (-4, 10)\}$

356. $R_4 = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

Identifica el dominio y el rango de las siguientes funciones.

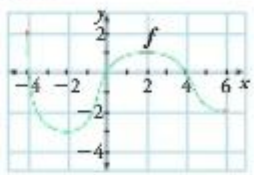
357. $f: A \to B$



Dom f = ________

Ran f = ________

358.



Dom f = ________

Ran f = ________

359. Realiza la gráfica de la siguiente función de variable real.

$y = -3x^2$

Ahora, realiza la gráfica de las siguientes funciones en tu cuaderno.

360. $g(x) = x - 4$

361. $y = 2x^3$

Completa.

362. Si el dominio de $f(x) = 1 - x$ es $[-2, 4]$, entonces, el rango de la función es ________.

363. Si $g(x) = ax + b$ y $\{(-2, 4), (2, -2), (4, c)\}$ es un subconjunto de g, entonces, el valor de la expresión $a^2 + 4b - 2c$ es igual a ________.

Línea recta

364. Determina los cortes con los ejes coordenados de la siguiente función. Luego, realiza su gráfica.

$y = 2x + 5$

Grafica las siguientes funciones en tu cuaderno y determina los puntos de corte con los ejes.

365. $y = 4 - \frac{2}{3}x$

366. $y = -\frac{1}{3}x - 4$

367. $2x - \frac{1}{5}y + 1 = 0$

368. $\frac{3}{2}x + 1 + 4y = 0$

Escribe la ecuación de la recta de acuerdo con las condiciones dadas.

369. Pasa por $(4, -3)$ y tiene pendiente $\frac{4}{3}$.

____

370. Pasa por los puntos $(5, 1)$ y $(-3, -2)$.

____

371. Es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$ y pasa por $(-1, 1)$.

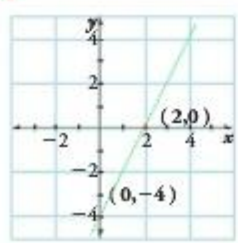
____

372. Es perpendicular a la recta $x - 2y = 4$ y pasa por $(-3, 0)$.

____

Observa la gráfica de cada recta. Luego, completa.

373.

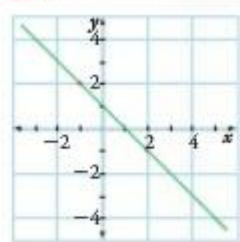


Interceptos con los ejes: ________

Pendiente: ________

Ecuación: ________

374.



Interceptos con los ejes: ________

Pendiente: ________

Ecuación: ________

375. Grafica las funciones

$$f(x) = 3 - x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 5$$

en el mismo plano cartesiano. Luego, determina en qué punto se cortan.

Resuelve.

376. La función lineal $f(x) = ax + b$ interseca al eje x en -2 y al eje y, en 4. Calcula el valor de $a^2 + b^2$.

377. Calcula el área del triángulo rectángulo determinado por los ejes de coordenadas y la recta de ecuación $4x - 3y - 12 = 0$.

378. Halla la ecuación general de la recta mediatriz del segmento AB, teniendo en cuenta que $A(-4, -3)$ y $B(3, 2)$.

Sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve por el método que se solicita. Luego, escribe la sílaba correspondiente en cada casilla para descubrir el lugar que alberga dos de los cuatro fósiles de cronosaurios del mundo.

	Sistema	Método	Sílaba
379.	$\begin{cases} 2x - 2y = -4 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$	Igualación	VA
380.	$\begin{cases} 5y - 3x = -1 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$	Sustitución	LEY
381.	$\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$	Reducción	VI
382.	$\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$	Regla de Cramer	DE
383.	$\begin{cases} 6x + 3y = -15 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$	Igualación	LLA

(2, −1)	(−2, −1)	(3, 1)	(17, 10)	(4, 6)

Resuelve.

384. La edad de Sandra es el doble de la de Patricia disminuida en 5. Si las dos edades suman 40 años, ¿cuál es la edad de cada una?

385. El doble de la suma de dos números es 72 y su diferencia es 8. ¿Cuáles son los números?

Resuelve cada sistema de ecuaciones. Luego, completa.

386. $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + z = 12 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$ El producto xyz es ________.

387. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \\ 3x + 2y - 5z = 11 \end{cases}$ El valor de zx^y es ________.

388. Resuelve el siguiente sistema aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} m + n + p = 11 \\ m - n + 3p = 13 \\ 2m + 2n - p = 7 \end{cases}$$

389. Halla el valor de cada figura para que se cumpla la suma de cada fila, columna y diagonal.

■	◆	★	6
☾	☾	☾	15
★	◆	✹	13
10	7	17	16

■ = ____

◆ = ____

☾ = ____

✹ = ____

390. La suma de las tres cifras de un número es 18. La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en 10 a la cifra de las unidades, y la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las unidades excede en 2 a la cifra de las decenas. ¿Cuál es el número?

PROBLEMAS PARA REPASAR

Dos ciudades A y B distan 1.440 km una de otra, y B se ubica al este de A. Un avión vuela de A a B en 1,8 horas y luego regresa en 2 horas.

Si el viento sopla con velocidad constante de oeste a este, calcula la velocidad del viento, la del avión sin viento y el tiempo que tardaría en realizar el recorrido de A a B en un día sin viento.

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la velocidad del viento? ¿Cuál es la velocidad del avión sin viento? ¿Cuánto tiempo gastaría el avión en realizar el recorrido de la ciudad A a la B en un día sin viento?

¿Cuáles son los datos del problema?

Las ciudades A y B distan 1.440 km. La ciudad B se ubica al este de la ciudad A.

Un avión vuela de A a B en 1,8 horas y luego regresa en 2 horas. El viento sopla con velocidad constante de oeste a este.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se identifican las variables y se realiza un dibujo con los datos, que sirva como guía para resolver el problema.

v: Velocidad del avión sin viento. v': Velocidad del viento.

Segundo, se plantean las relaciones y las ecuaciones.

$v + v'$: Velocidad de ida, cuando el avión va a favor del viento.

$v - v'$: Velocidad de vuelta, cuando el avión va en contra del viento.

$\dfrac{1.440}{v + v'} = 1{,}8$ Ecuación del tiempo de ida. $\dfrac{1.440}{v - v'} = 2$ Ecuación del tiempo de vuelta.

Tercero, se aplican los procedimientos algebraicos relacionados con sistemas de ecuaciones.

Luego, el sistema resultante es: $\begin{cases} v + v' = 800 \\ v - v' = 720 \end{cases}$

Se resuelve el sistema por reducción. Es decir, sumando las dos ecuaciones, así:

$v + v' = 800$	Ecuaciones.	$v + v' = 800$	Ecuación.
$v - v' = 720$		$760 + v' = 800$	Se remplaza v por 760.
$2v = 1.520$	Se suman las ecuaciones.	$v' = 40$	Se despeja v'.
$v = 760$	Se despeja v.		

Ahora, el tiempo que tardaría el avión con viento en calma es:

$\dfrac{1.440}{760} \approx 1{,}895 \approx 1 \text{ h } 54 \text{ min}$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las soluciones sean correctas. Luego, se tiene que la velocidad del viento es 40 km/h, la velocidad del avión sin viento es 760 km/h y el tiempo que gastaría el avión sin viento es aproximadamente de 1 hora y 54 minutos.

Resuelve las preguntas 391 y 392, de acuerdo con la siguiente información.

El concesionario "La fórmula" desea adquirir dos tipos de automóviles A y B último modelo y cuenta con un presupuesto de 670 millones de pesos.

391. Si el concesionario compra en total 25 automóviles, donde cada auto A tiene un costo de 40 millones de pesos y cada auto B un costo de 25 millones, ¿cuántos automóviles se compra de cada tipo?

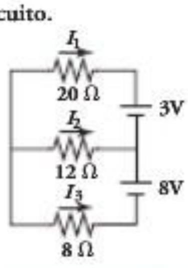
392. Como las ventas de estos automóviles fueron un éxito, la compañía decide adquirir 10 autos más del tipo A y 20 autos del tipo B. ¿Cuál es la inversión que debe hacer la compañía?

Después de dos horas de iniciada una fiesta, se retiran 10 mujeres y se observa que el número de hombres es el doble que el de mujeres. Luego, se retiran 45 hombres y se observa que el número de mujeres es el doble que el de hombres.

393. ¿Cuántas personas asistieron a la fiesta?

En electricidad se aplican las leyes de Kirchhoff para determinar las corrientes de un circuito. El siguiente sistema de ecuaciones lineales muestra la relación entre las corrientes que aparecen en el circuito.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$20I_1 - 12I_2 = 3$$
$$12I_2 + 8I_3 = 5$$



394. Encuentra el valor de cada una de las corrientes I_1, I_2 y I_3.

Para producir leche semidescremada que conserve el 40% de su grasa, se mezclan dos tipos de leche: una con 20% de grasa y otra con 70% de grasa.

395. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche se necesitan para producir 200 litros de leche con el 40% de grasa?

Un nutricionista recomienda consumir diariamente al menos 544 mg de calcio, 26 mg de hierro y 370 mg de vitamina C. La siguiente tabla muestra los componentes de algunos alimentos:

Alimento	Calcio mg	Hierro mg	Vitamina C mg
A	24	1	25
B	20	2	10
C	80	3	45

396. ¿Cuántas unidades de cada alimento se deben consumir para cada uno de los componentes de la dieta?

Para la fabricación de tres muebles se cuenta con tres departamentos de producción. El departamento A que produce 150 muebles al mes, el departamento B que produce 200 muebles y el departamento C que produce 175 muebles. Cada departamento fabrica sillas, mesas y libreros. La siguiente tabla registra el número de personas que trabaja en cada departamento según el mueble que se va a fabricar:

Departamento	Sillas	Mesas	Libreros
A	2	3	2
B	2	1	5
C	3	2	3

397. ¿Cuántas sillas, mesas y libreros se fabrican mensualmente?

398. Sean n un número natural y m el que resulta de escribir en orden inverso las cifras de n.

Determina si existen números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

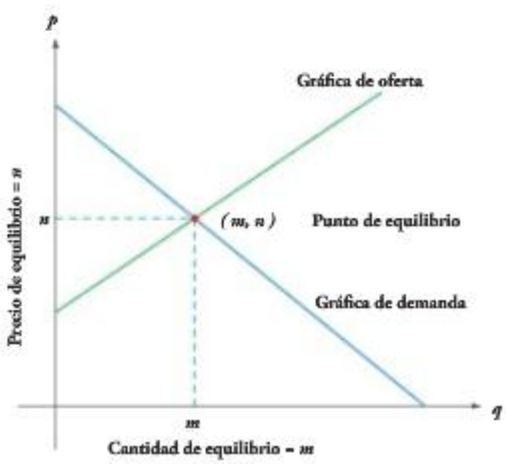
Galería de imágenes

...Para entender la oferta, la demanda y el equilibrio de mercado en economía.

El mercado está constituido por vendedores y compradores. Cada uno de ellos tiene sus expectativas de producción, es decir, la cantidad de bienes o servicios que los vendedores están dispuestos a ofrecer (oferta) y la cantidad de bienes o servicios que los compradores están dispuestos a adquirir (demanda). Estas expectativas generan las funciones de oferta y demanda, que en algunos casos están representadas por gráficas lineales o cuadráticas.

El modelo de oferta y demanda establece que, en condiciones de libre mercado, el precio de un bien determina la cantidad de productos ofrecidos por los productores y la cantidad de productos requeridos por los consumidores. La ley de la oferta indica que, a mayor precio de un bien, mayor será la cantidad que ofrecerán a la venta los productores. Por el contrario, la ley de la demanda establece que cuanto más alto sea el precio, los consumidores estarán menos dispuestos a comprar. De esta manera, vendedores y compradores interactúan para determinar el precio final de un bien, es decir, el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda.

El punto donde se cruzan las gráficas de los modelos de oferta y demanda corresponde al punto de equilibrio del mercado.



Esto significa que la cantidad ofrecida y la cantidad demandada de un bien o producto es la misma, por lo que el precio correspondiente a ese punto es llamado precio de equilibrio. El punto (m, n) en el que se intersecan las dos ecuaciones se denomina punto de equilibrio.

El precio de equilibrio n es el precio con el cual los consumidores adquirirán la misma cantidad del producto que los fabricantes estarían dispuestos a producir.

Para encontrar esta coordenada (m, n) se debe conocer las ecuaciones de oferta y demanda para un producto y resolver el sistema de ecuaciones, así se encuentran los valores de equilibrio para la demanda y la oferta.

1. **¿Qué factores pueden hacer variar la demanda? ¿Y la oferta?**

3. **Si el precio baja, ¿qué sucede con la demanda? ¿Y si el precio sube?**

4. **¿Cómo se estima la demanda de juguetes en Navidad?**

5. **En una fábrica de *jeans* las ecuaciones de demanda y oferta para el producto son: $p = -200c + 180.000$ y $p = 40c + 60.000$, respectivamente.**

   a. Determina el punto de equilibrio.

   b. ¿Qué significan los valores encontrados?

   c. Halla el punto de equilibrio gráficamente.

6. **Determina el precio unitario de equilibrio que necesita un comerciante después de que al producto que vende se le incrementa \$20,35 por unidad, si las ecuaciones de oferta y demanda, respectivamente, son:**

   $19{,}98p + 9c - 138.900 = 0$ **y**

   $-15{,}90p + 8{,}72c - 131.220 = 0,$

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: analizar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y de 3×3.

Descripción: identificar y representar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en el programa Matemáticas de Microsoft.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math

1. Haz clic en Microsoft Mathematics.

2. Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona la opción **Herramientas** y haz clic en **x = ? Solver de ecuaciones**, como se muestra en la ilustración.

3. Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona **Resolver un sistema de 2 ecuaciones**, para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas. Para solucionar las ecuaciones, haz clic en el cuadro denominado **Ecuación 1** y escribe la primera ecuación. A continuación, haz clic en el cuadro denominado **Ecuación 2**, escribe la segunda ecuación, como se muestra en la figura.

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4x + y = 5 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

Ingresa cada ecuación en el cuadro respectivo. Luego, para determinar el valor de x y y, haz clic en **Resolver**, como se muestra en la figura.

5. Observa la solución en la **Hoja de cálculo**. Luego, selecciona **Pasos de solución mediante sustitución**, para estudiar el método de sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, como se muestra en la figura.

6. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 17 \\ 2x - y - 3z = -1 \\ 2x - y + z = -9 \end{cases}$$

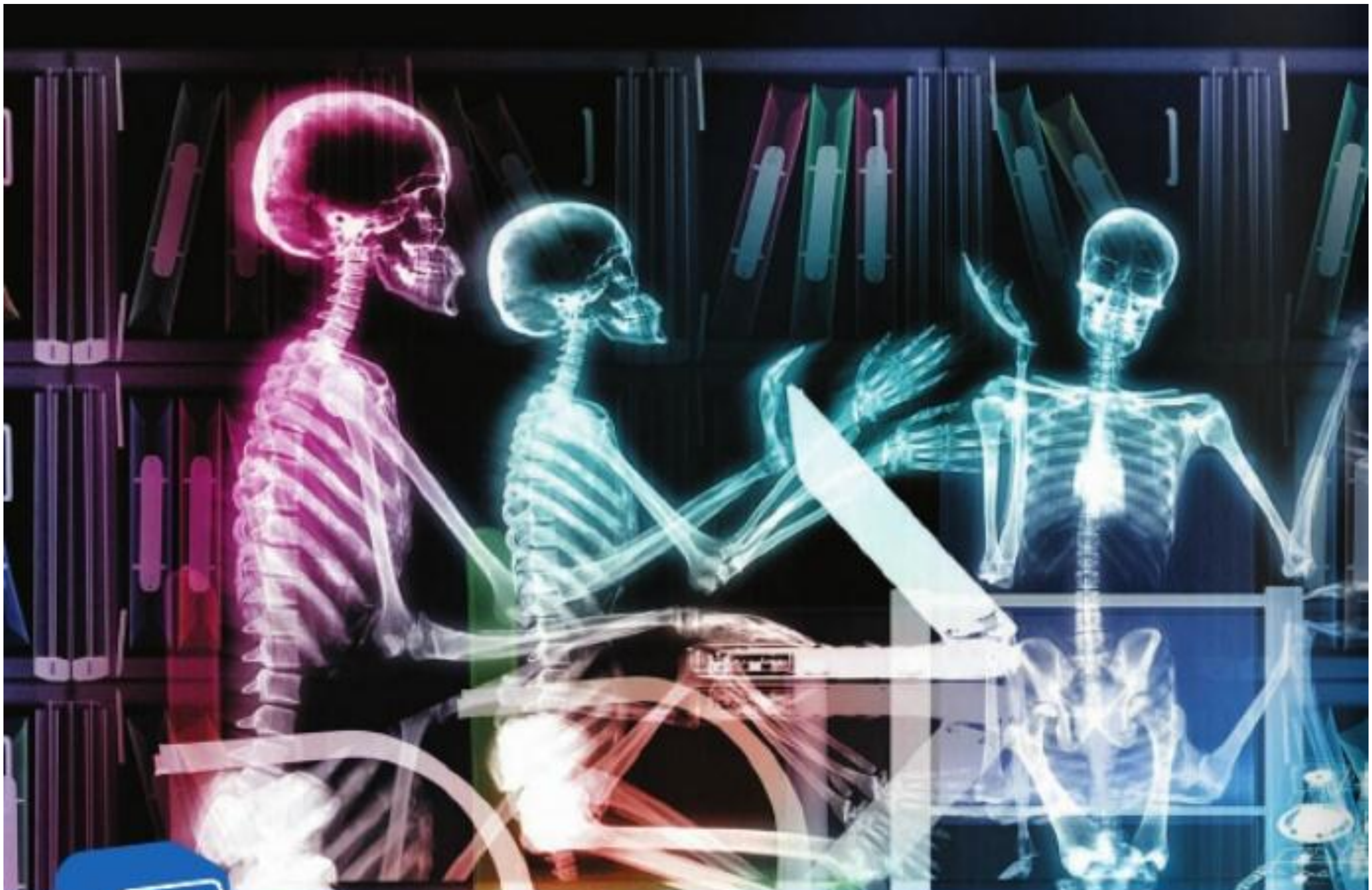
Para ello, ingresa cada ecuación, en el cuadro respectivo. Luego, para determinar el valor de x, y y z, haz clic en **Resolver**, como se muestra en la figura.

7. Utiliza Microsoft Mathematics para solucionar cada sistema de ecuaciones:

a. $2x - y = -1, 2x - y = 3$

b. $5x + y = 6, 10x + 2y = 24$

c. $-x + y = 10, x + 2y = 4$



5 Función y ecuación cuadrática

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender las características de la **función cuadrática** y su representación gráfica.
- Resolver **ecuaciones cuadráticas** y aplicarlas a la solución de problemas.
- Conocer las **ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas** y resolverlas por diferentes métodos.
- Solucionar **problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas** en diferentes contextos.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

- **3** Multimedia
- **1** Audios
- **1** Galerías
- **4** Imprimibles
- **5** Actividades
- **3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Determina cuál de las siguientes parejas ordenadas pertenece a la función $g(x) = \frac{1}{3}x - 7$.

a. $(0, 7)$ **b.** $(3, 26)$ **c.** $\left(1, -\frac{20}{3}\right)$

2. Escribe la tabla de valores que corresponde a la función $y = 4x - 5$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $5m - 3 = 2$ **b.** $6x + 7 = 3x$ **c.** $\frac{1}{2}y = 3$

4. Halla el valor de y en la expresión $y = 2x^2 - 7x + 1$ a partir de los siguientes valores de x.

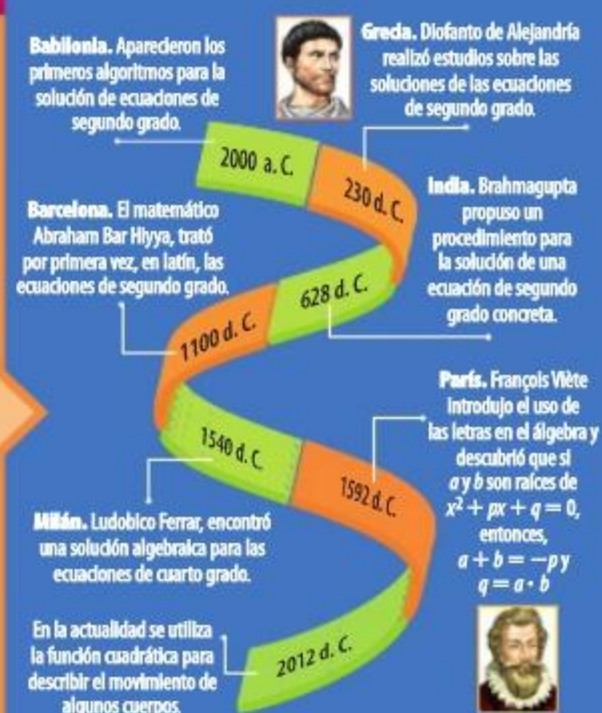
a. $x = 0$ **b.** $x = -2$ **c.** $x = -3$ **d.** $x = 5$

5. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

a. $x^2 - 4$ **c.** $9x^2 + 6x + 1$

b. $x^2 - 10x + 25$ **d.** $2x^2 - 11x - 6$

Cronología de la función cuádratica



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber cómo se genera una radiografía.

Una radiografía, es una imagen que se toma del cuerpo humano, se registra en una placa fotográfica o de forma digital y sirve para analizar partes del sistema óseo del cuerpo especialmente. Esta imagen se genera cuando se expone al receptor de imagen radiográfica a una fuente de radiación de alta energía procedente de isótopos radiactivos. Las sustancias radiactivas que se necesitan para tomar una radiografía se producen con un dispositivo denominado ciclotrón.

Lee más acerca de este tema en la página 158.

1. Función cuadrática

Recurso imprimible

El estudio de las funciones cuadráticas se aplica en la ingeniería civil para resolver problemas específicos como la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres. Por su parte, los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar efectos nutricionales de los organismos.

Una **función cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

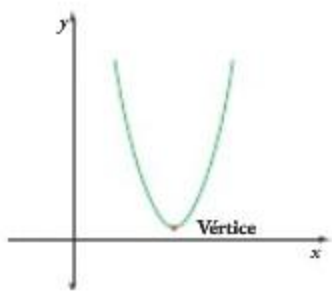
Por ejemplo, las funciones $g(x) = 7x^2 + 3x + 1$, $f(x) = -3x^2 + 8$ y $h(x) = -4x^2$ son funciones cuadráticas. A las funciones cuadráticas también se les denomina funciones de segundo grado porque el exponente del término ax^2 es 2.

1.1 Gráfica de una función cuadrática

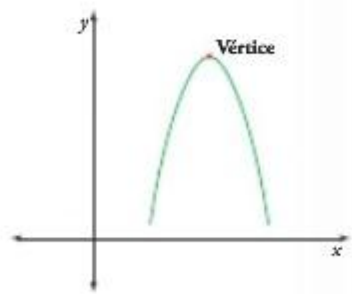
La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola, la cual puede abrir hacia arriba o hacia abajo.

Si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se cumple que $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. En cambio, si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se cumple que $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Cuando una parábola abre hacia arriba el punto mínimo es el **vértice**.



Cuando una parábola abre hacia abajo el punto máximo es el **vértice**.

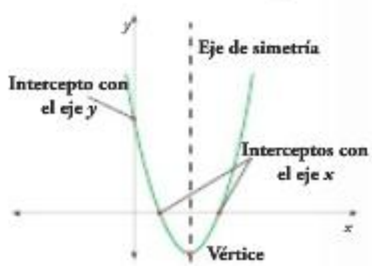


Las coordenadas del vértice V se representan (h, k) y se determinan mediante las expresiones $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

El **dominio** de una función cuadrática es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y el rango es el intervalo $[k, +\infty)$ si la parábola abre hacia arriba o es $(-\infty, k]$ si la parábola abre hacia abajo.

La recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, se denomina **eje de simetría**.

Para hallar el intercepto de la parábola con en el eje y, se remplaza $x = 0$ en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, y para hallar los interceptos con el eje x se remplaza $y = 0$.



Historia de las matemáticas

La función cuadrática y la parábola

Históricamente la parábola surgió en forma independiente al concepto de función cuadrática. El matemático griego Apolonio de Perga (262-190 a. C.) fue quien propuso el nombre de parábola en su libro *Sobre las secciones cónicas*.

Sin embargo, solo fue en el siglo XVII cuando Galileo Galilei (1564-1642) relacionó la parábola con la trayectoria de proyectiles, dando origen a lo que hoy se conoce como movimiento parabólico.

Recuerda que...

El **intercepto** es el punto de corte entre dos gráficas.

1.2 Tipos de gráficas de funciones cuadráticas

Actividad

Según los valores de a, b y c en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, hay cuatro casos que se deben tener en cuenta para graficar una función cuadrática:

- $f(x) = ax^2$
- $f(x) = ax^2 + c$
- $f(x) = ax^2 + bx$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$

Caso 1. $f(x) = ax^2$, donde $b = 0$ y $c = 0$.

En este caso las parábolas tienen como vértice el punto (0, 0) y como eje de simetría el eje y. Además se cumple que:

- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.
- Si $|a| > 1$, la parábola es más estrecha que la parábola que representa a la función $y = x^2$, en donde a es igual a 1.
- Si $0 < |a| < 1$, la parábola es más ancha que la parábola $y = x^2$.

Matemáticamente

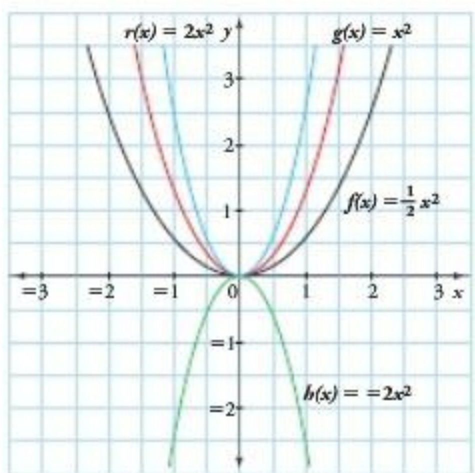
¿Puede la gráfica de una función cuadrática abrir hacia la izquierda o hacia la derecha? ¿Por qué?

EJEMPLO

Graficar las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = x^2$, $r(x) = 2x^2$ y $h(x) = -2x^2$ en el mismo plano cartesiano. Luego, compararlas.

Primero, se realiza la tabla de valores, remplazando los valores de x en cada una de las funciones y calculando los valores correspondientes.

x	-1	-2	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	2
$g(x)$	1	4	0	1	4
$r(x)$	2	8	0	2	8
$h(x)$	-2	-8	0	-2	-8



Luego, se ubican los puntos en el plano cartesiano y se traza cada parábola.

Finalmente, se comparan las parábolas con respecto a la función $g(x) = x^2$.

La función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ es más ancha y la función $r(x) = 2x^2$ es más angosta. Esto se puede observar en las gráficas de color negro y color azul.

La función $h(x) = -2x^2$ es igual de ancha que la función $r(x)$, pero abre hacia abajo. Esto se puede observar en las gráficas de color verde y color azul.

Caso 2. $f(x) = ax^2 + c$, donde $b = 0$.

La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + c$ se obtiene trasladando c unidades la gráfica de $f(x) = ax^2$. Si $c > 0$, la traslación es hacia arriba. En cambio, si $c < 0$, la traslación es hacia abajo.

En este caso el eje de simetría de la parábola es el eje y y las coordenadas del vértice son $(0, c)$.

Caso 3. $f(x) = ax^2 + bx$, donde $c = 0$.

En este caso las coordenadas del vértice (h, k) se pueden hallar por medio de las expresiones $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. El eje de simetría es una recta paralela al eje y cuya expresión algebraica es $x = -\frac{b}{2a}$.

EJEMPLOS

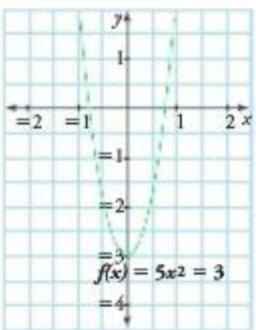


Figura 1

1. Graficar la función $f(x) = 5x^2 - 3$.

Primero, se establece qué caso es. Como $b = 0$, la función corresponde al caso 2 y, por tanto, es de la forma $f(x) = ax^2 + c$, donde $a = 5$ y $c = -3$. En este caso, el eje de simetría es el eje y y el vértice es $(0, -3)$.

Luego, se realiza una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	17	2	-3	2	17

Finalmente, se ubica el vértice y las otras parejas ordenadas de la tabla, y se traza la parábola como se muestra en la figura 1.

2. Graficar la función $f(x) = -2x^2 + x$.

Como $c = 0$, la función es de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, que corresponde al caso 3. Por tanto, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se determinan las coordenadas del vértice (h, k) así:

$a = -2$ y $b = 1$ — Se identifican los valores de a y de b.

$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-2)} = \frac{1}{4}$ — Se determina la coordenada en x del vértice.

$k - f\left(\frac{1}{4}\right) - +2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}$ — Se determina la coordenada en y del vértice.

De donde se tiene que el vértice de la parábola es $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

Luego, se realiza una tabla de valores.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-21	-10	-3	0	-1	-6	-15

Finalmente, se ubican los puntos y se traza la parábola teniendo en cuenta que el eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{4}$. La parábola se muestra en la figura 2.

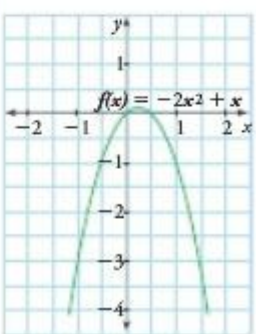


Figura 2

Caso 4. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

En este caso la gráfica de la función se obtiene trasladando c unidades la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$. Cuando $c > 0$, la traslación es hacia arriba y cuando $c < 0$ la traslación es hacia abajo.

EJEMPLO

Graficar la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Primero, se determinan las coordenadas del vértice (h, k).

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(1)} = 1 \quad \text{y} \quad k = f(1) = 1^2 - 2(1) + 3 = 2$$

De donde obtenemos que el vértice es $(1, 2)$ y el eje de simetría es la recta $x = 1$.

Luego, se realiza una tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	11	6	3	2	3

Finalmente, se traza la parábola ubicando el vértice y los otros puntos de la tabla de valores. La gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ se obtiene al trasladar la gráfica de $g(x) = x^2 - 2x$ tres unidades hacia arriba, como se muestra en la figura 3.

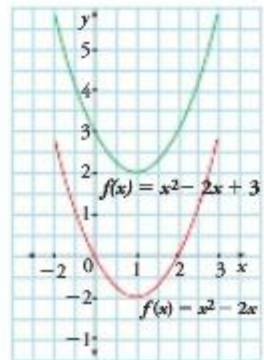


Figura 3

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Modelo

Identifica cuáles de las expresiones representan funciones cuadráticas. Justifica tu respuesta.

1. $h(x) = x^2$
2. $n(t) = 2t$
3. $p(r) = \frac{2}{4}r^2$
4. $q(y) = 2y^3$
5. $w(x) = 3x + 4$
6. $t(y) = 5y^3 + \frac{7}{4}y^2$
7. $m(x) = x + \frac{7}{4}x^2$
8. $t(x) = \sqrt{2} + x^2 - x$

Completa la expresión con el término que falta para que la parábola cumpla con la condición dada.

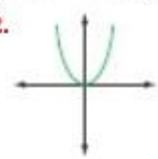
9. $t(x) = \square + x - 1$, abre hacia arriba.
10. $m(x) = x^2 + \square$, tiene vértice $(0, 0)$.
11. $h(x) = \square\, x^2 - \frac{1}{2}$, abre hacia abajo.
12. $t(x) = x^2 + \square$, su intercepto con el eje y es 1.
13. $n(x) = \square + \frac{3}{4}$, abre hacia abajo.
14. $s(x) = x^2 + \square - 5$, su intercepto con el eje x es $(1, 0)$.
15. $n(x) = \square - 4x - 3$, tiene vértice $(1, -5)$.

Determina el vértice de cada parábola.

16. $h(x) = -5x^2$
17. $q(x) = -\frac{1}{4}x^2$
18. $m(x) = -x^2 + 2$
19. $t(x) = -2x + \frac{1}{3}x^2$
20. $w(x) = x^2 + x + 1$
21. $m(x) = -x^2 + \frac{2}{3}$

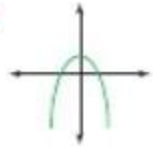
Determina el signo del coeficiente a en la expresión que define cada parábola.

22.

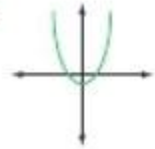


24.

23.

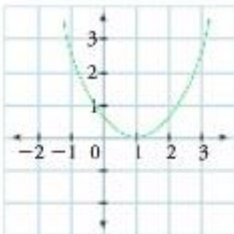


25.

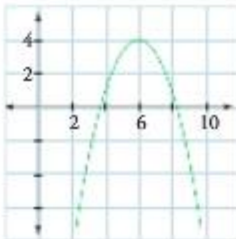


E Relaciona cada gráfica con la función que describe su eje de simetría.

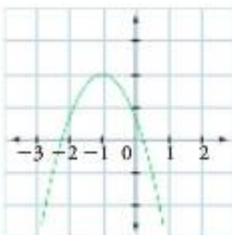
26.



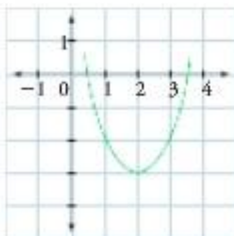
29.



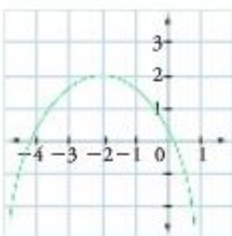
27.



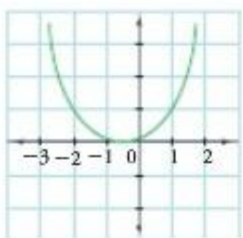
30.



28.



31.



a. $x = -2$

b. $x = 2$

c. $x = 6$

d. $x = -1$

e. $x = -\frac{1}{2}$

f. $x = 1$

E Grafica las siguientes funciones cuadráticas.

32. $y = x^2$

33. $y = -x^2$

34. $y = 2x^2$

35. $y = x^2 - 1$

36. $y = x^2 + 1$

37. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

38. $y = x^2 + 7x + 1$

39. $y = -x^2 - 1$

40. $y = -x^2 + 1$

41. $y = x^2 - x$

42. $y = x^2 + x$

43. $y = -x^2 + x$

44. $y = \frac{3}{4}x^2 - x$

45. $y = -x^2 + 5x + 2$

R Utiliza GeoGebra o una calculadora para graficar las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano. Luego, analiza la relación que existe entre cada grupo de funciones.

46. $y = x^2, y = -x^2, y = x^2 + 1, y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

47. $y = 2x^2, y = -2x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = -\frac{1}{2}x^2$

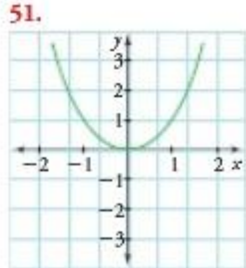
48. $y = -4x^2, y = 4x^2, y = -\frac{1}{4}x^2, y = \frac{1}{4}x^2$

49. $y = x^2, y = (x - 1)^2, y = (x - 1)^2 + 1$

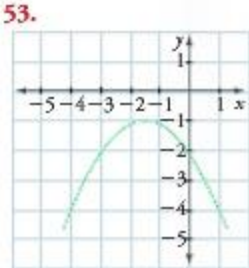
50. $y = x^2, y = -x^2 - x, y = -x^2 - x - 1$

M Escribe la ecuación que modela la gráfica de cada función.

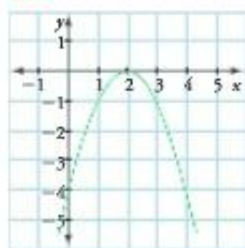
51.



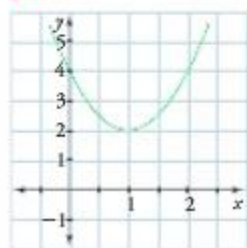
53.



52.



54.



55. **Explica el error que se encuentra en el planteamiento de la siguiente situación.**

Un jugador de béisbol batea un *hit* hacia el jardín. La expresión que permite calcular la altura $h(t)$ de la bola respecto al suelo se puede expresar mediante $h(t) = 52t - 16t^2 + 3$.

56. **Escribe dos funciones cuadráticas que cumplan la condición $f(x)$ y $g(x)$ nunca se interceptan.**

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás los ceros de la función cuadrática, investiga cómo se representan los ceros en la gráfica de una función cuadrática.

1.3 Ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática

Enlace web

Los ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática son los puntos de corte de la parábola con el eje x.

Dependiendo de que los puntos de corte existan o no existan, se presentan tres casos:

Caso 1. La parábola corta el eje x en un solo punto.

En este caso, el vértice de la parábola está sobre el eje x y por esto la función tiene una única solución real.

Caso 2. La parábola corta el eje x en dos puntos.

En este caso la función tiene dos raíces reales diferentes.

Caso 3. La parábola no corta el eje x.

En este caso la función no tiene solución en los números reales.

Recuerda que...

Cuando una función cuadrática no tiene soluciones en los números reales es porque sus raíces o ceros son números complejos.

EJEMPLOS

1. Graficar la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Luego, determinar las soluciones reales, si es posible.

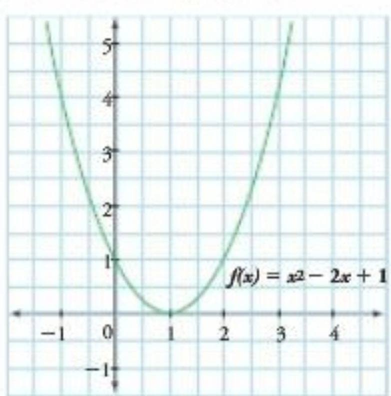
Primero, se determina el vértice (h, k) de la parábola.

$$h = -\frac{-2}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$k = f(1) = 1^2 - 2(1) + 1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4

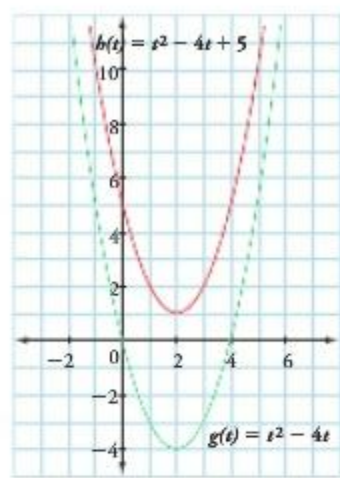
Luego, se realiza una tabla de valores.



Finalmente, se traza la parábola.

Como el vértice de la parábola $(1, 0)$ está sobre el eje x, la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene una única solución real que es $x = 1$.

2. Determinar, a partir de las siguientes gráficas, si las funciones $g(t) = t^2 - 4t$ y $h(t) = t^2 - 4t + 5$ tienen raíces reales.



La función $g(t) = t^2 - 4t$ tiene dos raíces reales $t = 0$ y $t = 4$. En cambio, la función $h(t) = t^2 - 4t + 5$ no tiene raíces reales porque la parábola que la representa no se interseca con el eje t.

Como la gráfica de $h(t)$ se obtiene al trasladar la gráfica de $g(t)$ cinco unidades hacia arriba, el vértice queda por encima del eje t, de modo que la parábola no lo interseca.

En este caso, si la gráfica de $g(t)$ se trasladara cuatro unidades hacia arriba la función tendría una única solución real.

2. Ecuación cuadrática

Recurso imprimible

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Dependiendo de los valores de las constantes b y c, las ecuaciones cuadráticas se clasifican en incompletas y completas.

Ecuaciones incompletas: son aquellas ecuaciones cuadráticas en las que $b = 0$, $c = 0$ o que $b = 0$ y $c = 0$. Por ejemplo, las ecuaciones $5x^2 - 1 = 0$, $-3x^2 = 0$ y $x^2 + 6x = 0$ son ecuaciones cuadráticas incompletas.

Ecuaciones completas: son aquellas ecuaciones cuadráticas en las que el valor de las constantes b y c es diferente de cero. Por ejemplo, las ecuaciones $5x^2 - 3x + 1 = 0$ y $x^2 - 2x + 1 = 0$ son ecuaciones cuadráticas completas.

Resolver una ecuación cuadrática significa hallar el valor o los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.

Gráficamente, las soluciones reales de una ecuación cuadrática corresponden a los puntos de corte de la parábola con el eje x.

2.1 Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Las ecuaciones cuadráticas incompletas se resuelven según su forma.

Ecuaciones de la forma $ax^2 = 0$

Este tipo de ecuaciones se resuelven así:

$ax^2 = 0$

$x^2 = 0$ Se divide entre a en ambos lados de la igualdad.

$x = 0$ Se extrae la raíz cuadrada.

Luego, todas las ecuaciones cuadráticas de esta forma tienen como única solución $x = 0$.

Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

Para resolver ecuaciones cuadráticas que tengan esta forma se realizan los siguientes pasos:

$ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$ Se factoriza x.

$x = 0$ o $ax + b = 0$ Se iguala a cero cada factor.

$x = 0$ o $x = -\dfrac{b}{2a}$ Se resuelve cada ecuación.

Por tanto, las ecuaciones de esta forma tienen dos soluciones reales diferentes $x_1 = 0$ y $x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Matemática*mente*

¿Es $x = -5$ una solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - 5 = 0$?

Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

Para resolver las ecuaciones cuadráticas que tienen esta forma, se realizan los siguientes pasos:

$ax^2 + c = 0$

$ax^2 = -c$ Se resta c en ambos lados de la igualdad.

$x^2 = -\frac{c}{a}$ Se divide entre a en ambos lados de la igualdad.

$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ Se extrae raíz cuadrada.

Por tanto, las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ tienen dos soluciones:

$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

EJEMPLOS

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $5x^2 - 10 = 0$

Se realizan los siguientes pasos:

$5x^2 = 10$ Se suma 10 en ambos lados.

$x^2 = 2$ Se divide entre 2.

$x = \pm\sqrt{2}$ Se extrae la raíz cuadrada.

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = +\sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

b. $4x^2 + 64x = 0$

Se realizan los siguientes pasos:

$4x^2 + 64x = 0$

$4x(x + 16) = 0$ Se factoriza.

$4x = 0$ o $x + 16 = 0$ Se iguala a 0 cada factor.

$x = 0$ o $x = -16$ Se resuelve cada ecuación.

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = -16$.

Afianzo COMPETENCIAS

E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

E Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

57. $2x^2 = 0$

58. $-7x^2 = 0$

59. $-2x^2 + 4x = 0$

60. $8x^2 + x = 0$

61. $-x^2 + 5 = 0$

62. $45x^2 + 5 = 0$

63. $-6x^2 - 3 = 0$

64. $625x^2 - 25x = 0$

65. $x^2 + 3x = 0$

66. $-3x^2 = 48$

67. $16x^2 = 2x$

68. $729 = 9x^2$

69. $-15x = 45x^2$

70. $72x^2 = 8x$

71. $196x^2 = -588x$

72. $\frac{1}{64}x^2 - 4x = 0$

73. $-\frac{1}{11}x^2 + 11 = 0$

74. $-x^2 + \frac{1}{144} = 0$

R Escribe ejemplos de los valores de a y de b en la ecuación $ax^2 + bx = 0$, que cumplan:

75. Que una de las soluciones sea igual a 1.

76. Que una de las soluciones sea menor que 21 y mayor que 0.

77. Que una de las soluciones sea mayor que 10 y menor que 16.

S Resuelve.

78. La expresión para calcular la distancia que recorre un objeto cuando se deja caer a una determinada altura es $d(t) = 4{,}9t^2$, donde $d(t)$ es la distancia en metros y t es el tiempo en segundos. Si se deja caer una piedra a una altura de 49 m, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

79. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^2 + 4 = 0$?

2.2 Solución de ecuaciones cuadráticas completas

Una ecuación cuadrática completa, es decir, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $b, c \neq 0$, se puede resolver utilizando tres métodos: solución por factorización, solución completando cuadrados y solución por fórmula general.

Solución por factorización

Para resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se factoriza, si es posible, el trinomio $ax^2 + bx + c$ y se iguala cada factor a cero. Luego, se resuelve cada ecuación lineal para hallar las soluciones.

Solución completando cuadrados

Este método se utiliza cuando el trinomio $ax^2 + bx + c$ no es factorizable. Para resolver una ecuación cuadrática completando cuadrados se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se resta c en ambos lados de la igualdad $ax^2 + bx + c = 0$, con lo cual se obtiene la expresión $ax^2 + bx = 2c$.
- Segundo, se dividen entre a ambos lados de la igualdad.
- Luego, se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos lados de la igualdad y se factoriza el trinomio cuyo término es x^2.
- Finalmente, se extrae la raíz cuadrada y se despeja x.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $\frac{3}{4}x^2 + \frac{25}{4}x + 2 = 0$ factorizando.

Se realizan los siguientes pasos:

$\frac{3}{4}x^2 + \frac{25}{4}x + 2 = 0$

$\frac{1}{4}(3x^2 + 25x + 8) = 0$ Se factoriza $\frac{1}{4}$.

$3x^2 + 25x + 8 = 0$ Se multiplica por 4.

$(3x + 1)(x + 8) = 0$ Se factoriza el trinomio.

$3x + 1 = 0$ o $x + 8 = 0$ Se iguala a cero cada factor.

$x = -\frac{1}{3}$ o $x = -8$ Se resuelve cada ecuación lineal.

Por tanto, las soluciones de la ecuación

$\frac{3}{4}x^2 = \frac{25}{4}x = 2 = 0$ son $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = -8$.

Estas soluciones se pueden comprobar remplazando los valores de x_1 o x_2 en la ecuación $\frac{3}{4}x^2 = \frac{25}{4}x = 2 = 0$ y verificando que se cumpla la igualdad que se indica en la ecuación.

2. Resolver la ecuación $5x^2 - 60x + 3 = 0$, completando cuadrados.

Se realizan los siguientes pasos:

$5x^2 - 60x + 3 = 0$

$5x^2 - 60x = -3$ Se resta 3.

$x^2 - 12x = -\frac{3}{5}$ Se divide entre 5.

$x^2 - 12x + \left(\frac{-12}{2}\right)^2 = -\frac{3}{5} + \left(\frac{-12}{2}\right)^2$ Se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$(x - 6)^2 = \frac{177}{5}$ Se factoriza y se suma.

$x = \pm\sqrt{\frac{177}{5}} + 6$ Se extrae la raíz y se despeja x.

Por tanto, las soluciones de la ecuación

$5x^2 - 60x + 3 = 0$, son

$$x_1 = +\sqrt{\frac{177}{5}} + 6 \text{ y}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{177}{5}} + 6.$$

Solución por fórmula general

Ampliaciones multimedia

Completando cuadrados se puede deducir una **fórmula general** para hallar las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Esta fórmula general o **fórmula cuadrática** se deduce de la siguiente manera:

Sea $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c diferentes de cero.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$
Se resta c en ambos lados de la igualdad.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
Se divide entre a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
Se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
Se factoriza el trinomio.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$
Se extrae la raíz cuadrada.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
Se efectúan las operaciones en el radicando.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Se extrae la raíz cuadrada del denominador.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Se suma $-\frac{b}{2a}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Se suman las fracciones.

Por tanto, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, para resolver la ecuación $5x^2 - 9x - 2 = 0$, se remplazan los valores de a, b y c en la fórmula general, teniendo en cuenta que $a = 5$, $b = -9$ y $c = -2$.

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(5)(-2)}}{2(5)}$$

Luego, se simplifica $x = \frac{9 \pm 11}{10}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación $5x^2 - 9x - 2 = 0$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{1}{5}$.

Recurso imprimible

Historia de las matemáticas

La ecuación cuadrática

Las primeras soluciones de una ecuación cuadrática fueron deducidas por los babilonios como parte de la solución de problemas geométricos. Tiempo después, Diofanto de Alejandría definió por primera vez una ecuación cuadrática. Sin embargo, las soluciones que propuso se basaban en casos particulares. Solo hasta el siglo XVI, el matemático francés François Viète representó los términos conocidos de una ecuación con vocales, lo que permitió establecer la fórmula cuadrática como se conoce actualmente.

Enlace web

EJEMPLOS

1. Simplificar la siguiente expresión. Luego, resolver la ecuación aplicando la ecuación cuadrática.

$$\frac{x^2-1}{3}-\frac{6-8x}{4}+\frac{33}{12}=0$$

Se realizan los siguientes pasos:

$\frac{x^2-1}{3}-\frac{6-8x}{4}+\frac{33}{12}=0$

$\frac{4x^2-4}{12}-\frac{18-24x}{12}+\frac{33}{12}=0$ Se complifican las fracciones.

$\frac{4x^2+24x+11}{12}=0$ Se restan las fracciones.

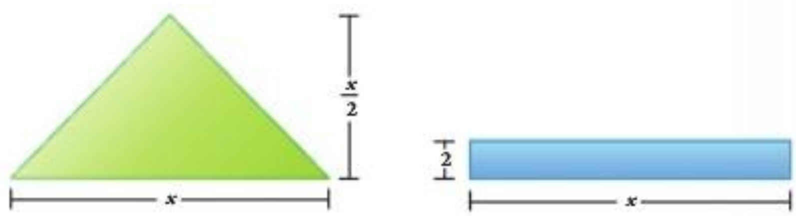
$4x^2+24x+11=0$ Se multiplican ambos lados de la igualdad por 12.

$x=\frac{-24\pm\sqrt{(24)^2-4(4)(11)}}{2(4)}$ Se aplica la fórmula general.

$x=\frac{-24\pm 20}{8}$ Se resuelven las operaciones y se extrae la raíz.

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{11}{2}$.

2. Hallar el valor de x si la diferencia entre el área del triángulo y el área del rectángulo es 2,25 cm².



Para hallar el valor de x se realizan los siguientes pasos:

$\frac{x^2}{4}-2x=2,25$ Se plantea la ecuación.

$x^2-8x=9$ Se complifica por 4.

$x^2-8x-9=0$ Se resta 9 en ambos lados de la igualdad.

$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(-9)}}{2(1)}$ Se aplica la fórmula general y se simplifica.

$x=\frac{8\pm 10}{2}$ Se simplifica.

$x_1=\frac{8+10}{2}=9$ Se hallan las dos soluciones.

$x_2=\frac{8-10}{2}=-1$

Por tanto, las raíces de la ecuación son $x_1=9$ y $x_2=-1$. Como la longitud debe ser positiva, la única respuesta válida es $x=9$.

Recuerda que...

El área de un triángulo de base (b) y de altura (h) está dada por la expresión:

$$A=\frac{bh}{2}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

80. ¿Cuántas raíces reales puede tener una ecuación cuadrática?

81. ¿Cuándo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación cuadrática completa?

82. ¿Cuál es la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática?

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas factorizando.

83. $x^2 + 4x + 3 = 0$

84. $3x^2 - x - 2 = 0$

85. $-6x^2 + 103x - 17 = 0$

86. $11x = x^2 + 28$

87. $x^2 - 2x - 168 = 0$

88. $-7x^2 + 17x + 12 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

89. $x^2 + 20x + 12 = 0$

90. $2x^2 + 9x - 4 = 0$

91. $-8x^2 + 3x - 7 = 0$

92. $5x^2 - 9x - 1 = 0$

93. $-14x^2 + 3x - 2 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general.

94. $x^2 - 12x + 6 = 0$

95. $-2x^2 + x - 4 = 0$

96. $4x^2 - 8x + 3 = 0$

97. $-6x^2 + 8x - 5 = 0$

98. $7x^2 + 4x - 2 = 0$

99. $-x^2 + x - 48 = 0$

100. $8x^2 + 5x - 6 = 0$

101. $64 - 16x = 32x^2$

102. Explica la razón matemática que justifica que la siguiente expresión sea verdadera.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \neq \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

103. Escribe un ejemplo que cumpla con la condición. Una ecuación cuadrática que pueda resolverse mediante formula cuadrática pero no por factorización sobre los números enteros.

Simplifica cada expresión algebraica. Luego, resuelve la ecuación cuadrática.

104. $(x - 3)^2 - 81 = 0$

105. $(5x - 3)^2 - 4 = 0$

106. $\dfrac{x^2 + x}{5} + \dfrac{(x + 2)x}{2} = 0$

107. $\dfrac{x^2 - x}{2} - \dfrac{(x - 4)^2}{3} = 0$

108. $\dfrac{(4x - 3)^2}{5} + \dfrac{(3x - 2)}{25} = 0$

Responde.

109. ¿Qué valores deben tener a y b para que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ sean $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

110. ¿Cuál es el valor de m que hace que la ecuación $x^2 - 5x + m = 0$ tenga como solución $x = 2$?

Resuelve.

111. Patricia tiene 5 años más que Diana. Si la suma de los cuadrados de sus edades es 53, ¿cuáles son las edades de Patricia y de Diana?

112. El largo de una cancha de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho. Si su área es 7.000 m², ¿cuáles son sus dimensiones?

113. La altura h (en metros), que alcanzó un balón al lanzarlo hacia arriba, está dada por la expresión $h(t) = -t^2 + 0,6t + 0,7$, donde t es el tiempo en segundos. ¿A los cuántos segundos el balón se encontró a 0,3 metros de altura?

114. En un auditorio hay el mismo número de filas que de sillas por fila. Luego de una remodelación se quitaron tres filas y una silla por cada fila, con lo cual quedaron 323 sillas. ¿Cuántas sillas tenía el auditorio inicialmente?

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás las propiedades de las raíces, averigua cómo se halla la ecuación cuadrática a partir de sus raíces.

2.3 Naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática

Actividades

Ampliación multimedia

Una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones reales, una única solución real o dos soluciones complejas diferentes. Para determinar qué tipo de soluciones tiene una ecuación cuadrática, se toma la fórmula general o fórmula cuadrática

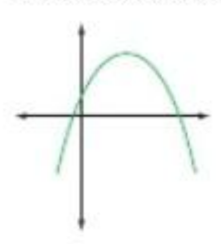
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y se analiza el **discriminante** de la ecuación que corresponde a la expresión $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$.

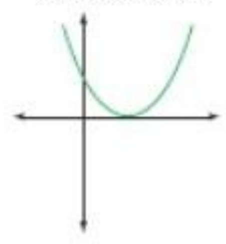
Dependiendo del valor del discriminante, se puede analizar cómo son las soluciones de la ecuación cuadrática según los siguientes tres casos: cuando $b^2 - 4ac > 0$, cuando $b^2 - 4ac = 0$ y cuando $b^2 - 4ac < 0$. Entonces:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes. En este caso la gráfica de la función tiene dos puntos de corte con el eje x.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución que corresponde a un número real. En este caso la gráfica de la función tiene un punto de corte con el eje x, que corresponde al vértice.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas diferentes. En este caso la gráfica de la función no tiene puntos de corte con el eje x.

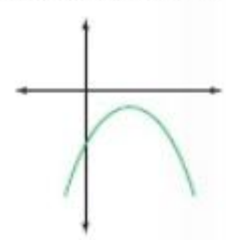
Dos soluciones reales



Una solución real



Dos soluciones complejas



EJEMPLOS

Determinar el tipo de soluciones que tiene cada ecuación, mediante el uso del discriminante.

a. $x^2 - 7x + 12 = 0$

Como $a = 1$, $b = -7$ y $c = 12$, se remplazan estos valores en la expresión del discriminante así:

$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(12)$ Se remplazan las variables por los valores.

$= 49 - 48$ Se realizan operaciones.

$= 1$

Se verifica si el resultado obtenido es mayor, menor o igual a cero, como $1 > 0$, entonces, la ecuación tiene dos soluciones reales y la gráfica de la función asociada a la ecuación interseca al eje x en dos puntos.

b. $x^2 + 9 = 0$

En este caso $a = 1$, $b = 0$ y $c = 9$, entonces, se remplazan estos valores en la expresión del discriminante y se realizan operaciones así:

$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(9) = 0 - 36 = -36$

Como $-36 < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas diferentes.

c. $x^2 + 4x + 4 = 0$

Como $a = 1$, $b = 4$ y $c = 4$, al remplazar la expresión en el discriminante se obtiene lo siguiente:

$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$. Entonces, la ecuación tiene una única solución real y la gráfica interseca al eje x en un punto.

2.4 Análisis de las raíces de la ecuación cuadrática

Para toda ecuación cuadrática se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad 1	Propiedad 2
Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.	Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

EJEMPLOS

1. **Hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$. Luego, verificar que se cumplen las propiedades de sus raíces.**

Primero, se hallan las raíces de la ecuación.

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 3)(x - 2) = 0$ — Se factoriza la ecuación.

$x - 3 = 0$ y $x - 2 = 0$ — Se iguala a cero cada paréntesis.

$x = 3$ y $x = 2$ — Se despejan las ecuaciones.

Luego, se comprueba la propiedad 1 teniendo en cuenta que en la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ y las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$.

La suma de las raíces es $x_1 + x_2 = 3 + 2 = 5$ y el cociente

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

Como los dos resultados son iguales se verifica la propiedad 1.

Finalmente, se comprueba la propiedad 2 con la multiplicación de las raíces así:

$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 2 = 6$

Y se halla el cociente $\frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$.

Como se obtiene el mismo resultado, entonces, se verifica la propiedad 2.

2. **Escribir la ecuación cuadrática para la función cuyas raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ y $a = 1$.**

Primero, se plantean las propiedades con las raíces dadas para determinar los coeficientes de la ecuación.

$x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$, es decir,

$-\frac{b}{a} = 4$ — Propiedad 1.

$b = -4$ y $a = 1$ — Se determinan a y b.

$x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 3 = 3$, es decir, $\frac{c}{a} = 3$. — Propiedad 2.

$c = 3$ y $a = 1$ — Se determinan a y c.

Luego, se escribe la ecuación:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

3. **Escribir la ecuación de la función que corresponde a la siguiente parábola, que pasa por $(-1, 0)$ $(3, 0)$ y $(1, -4)$.**

Primero, se identifican las raíces de la función, en este caso son $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

Segundo, se plantean las propiedades con las raíces dadas para determinar los coeficientes de la ecuación.

$x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2$, es decir,

$-\frac{b}{a} = 2.$ — Propiedad 1.

$b = -2$ y $a = 1$ — Se determinan a y b.

$x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot 3 = -3$, es decir,

$\frac{c}{a} = -3.$ — Propiedad 2.

$c = -3$ y $a = 1$ — Se determinan a y c.

Finalmente, se escribe la función:

$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0.$

4. **Si en la ecuación cuadrática $x^2 - 6ax + 7 = 0$, una de sus raíces es -1, ¿cuál es el valor de la otra raíz?**

Primero, se plantea el producto entre las raíces.

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{7}{1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Luego, se remplaza $x_1 = -1$.

$$\begin{aligned} (-1)(x_2) &= 7 \\ -x_2 &= 7 \\ x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que la otra raíz de la ecuación es $x_2 = -7$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Modelo • Ejercito • Razono

115. **Completa el cuadro sinóptico acerca de la naturaleza de las raíces.**

Naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática

si

$b^2 - 4ac > 0$		
entonces	*entonces*	*entonces*

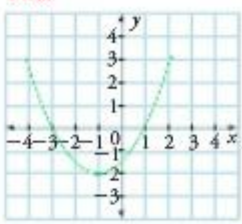
Escribe en palabras el significado de cada expresión.

116. Si x_1 y x_2 son raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

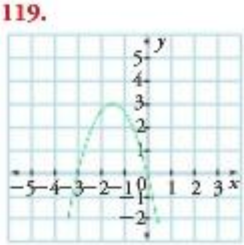
117. Si x_1 y x_2 son raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Escribe el procedimiento que utilizarías para hallar la función cuadrática asociada a cada gráfica, mediante el uso de las raíces.

118.



119.



Marca con una ✗ el valor del discriminante de cada ecuación.

120. $-6x^2 - 5x + 1 = 0$	49	45	56
121. $x^2 - 3x + 6 = 0$	25	-15	16
122. $x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$	-1	1	3
123. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{23}{4}$

Relaciona las raíces con su respectiva ecuación.

124. $16x^2 + 64 = 0$ **a.** $x_1 = -3\sqrt{3}, x_2 = 3\sqrt{3}$

125. $x^2 - 27 = 0$ **b.** $x_1 = 2i, x_2 = -2i$

Usa el discriminante para determinar si la parábola corta al eje x una vez, dos veces o ninguna vez.

126. $y = x^2 - 6x + 9$

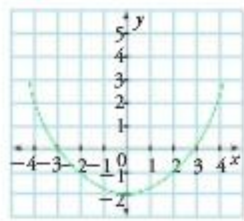
127. $y = 2x^2 + 3x - 2$

128. $y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2}$

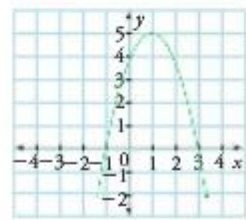
129. $y + 105 - x = 2x^2$

Escribe una ecuación para representar la gráfica de cada parábola.

130.



131.



132. **Determina la función cuadrática cuyas raíces x_1 y x_2 satisfacen la siguiente expresión:**

$$\frac{2}{x_1 + x_2} = 1 \text{ y } \frac{x_1}{3} - \frac{2}{x_2} = 0$$

Determina el valor que debe tener k para que la condición dada se cumpla.

133. La suma de los puntos de corte con el eje x de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + kx - 10$ sea 13.

134. En la ecuación $x^2 - kx + 27 = 0$, una raíz sea el triple de la otra.

135. En la ecuación $2kx^2 - 4kx + 5k = 3x^2 + x - 8$, el producto de sus raíces sea igual al doble de su suma.

136. En la ecuación $x^2 - 3(x - k) - 2 = 0$ una raíz sea igual al doble de la otra menos tres.

Calcula la suma y el producto de las raíces de cada ecuación, sin hallar la solución.

137. $3x(x + 6) = 0$

138. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

139. $5x^2 - 8x + 4 = 0$

140. $8x^2 - 4x = 0$

3. Ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas

En muchas ocasiones se presentan ecuaciones que a simple vista no parecen ecuaciones cuadráticas puesto que no tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En este caso es necesario transformarlas haciendo uso de operaciones algebraicas. Estas ecuaciones son las bicuadráticas y las ecuaciones con radicales de índice dos. Por ejemplo, la ecuación $x^4 + 2x^2 + 1$ es una ecuación bicuadrática y la ecuación $\sqrt{x+1} = -x$ es una ecuación con índice dos. Ambas ecuaciones se pueden convertir en ecuaciones cuadráticas.

3.1 Ecuaciones con radicales de índice dos

En este caso se deja el radical en uno de los miembros de la ecuación, a continuación se elevan al cuadrado ambos miembros y se resuelve la ecuación que aparece. Después de encontrar las soluciones o raíces, se debe verificar que ellas satisfacen la ecuación original; en caso de que alguna de ellas no la satisfaga, se dice que es una *solución extraña*.

EJEMPLOS

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $\sqrt{2x-1} = x$

$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = x^2$ Se eleva al cuadrado a ambos lados de la ecuación.

$2x - 1 = x^2$ Se realiza la potencia.

$x^2 - 2x + 1 = 0$ Se resta $2x - 1$ a ambos lados de la ecuación.

$(x-1)^2 = 0$ Se factoriza el polinomio.

$x - 1 = 0$ Se iguala a cero el paréntesis.

$x = 1$ Se suma 1 a ambos lados de la ecuación.

El valor $x = 1$ es una posible solución.

Se debe verificar para ver si satisface la ecuación.

$\sqrt{2(1)-1} = \sqrt{2-1}$ Se remplaza $x = 1$ en el lado izquierdo de la ecuación.

$1 = 1$ Se remplaza $x = 1$ en el lado derecho de la ecuación.

Cuando se comparan los resultados de los dos lados de la ecuación, se obtiene $1 = 1$, por tanto, se verifica la ecuación.

En la solución de este tipo de ecuaciones se pueden obtener soluciones extrañas cuando se eleva al cuadrado cada lado en una ecuación porque la potenciación puede convertir una expresión falsa en una expresión verdadera. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$.

b. $\sqrt{3x+1} = x - 3$

$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = (x-3)^2$ Se eleva al cuadrado a ambos lados de la ecuación.

$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$ Se desarrolla el cuadrado.

$x^2 - 9x + 8 = 0$ Se resta $3x + 1$ a ambos lados de la ecuación.

$(x-8)(x-1) = 0$ Se factoriza la ecuación.

$x - 8 = 0$ y $x - 1 = 0$ Se igualan a cero los paréntesis.

$x = 8$ o $x = 1$ Se despeja la x en cada ecuación.

Los valores $x = 8$ o $x = 1$ son solamente soluciones potenciales de la ecuación.

Por ello, se debe verificar si las dos son soluciones de la ecuación.

Se remplaza $x = 8$ a los dos lados de la ecuación.

$\sqrt{3 \cdot 8 + 1} = \sqrt{24+1} = 5$ Lado izquierdo de la ecuación.

$x - 3 = 8 - 3 = 5$ Lado derecho de la ecuación.

Como la ecuación se cumple para $x = 8$, entonces, es solución de la ecuación.

Se remplaza $x = 1$ a los dos lados de la ecuación.

$\sqrt{3 \cdot 1 + 1} = \sqrt{3+1} = 2$ Lado izquierdo de la ecuación.

$x - 3 = 1 - 3 = -2$ Lado derecho de la ecuación.

Como la ecuación no se cumple para $x = 1$, entonces, no es solución de la ecuación.

3.2 Ecuaciones bicuadráticas

Enlace web

Una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ recibe el nombre de **ecuación bicuadrática.** Para resolver esta clase de ecuaciones es necesario realizar un cambio de variable; con esto se transforma la ecuación dada en una ecuación cuadrática que se resuelve por alguno de los métodos estudiados. Al finalizar el proceso de solución, se vuelve a realizar el cambio de variable para obtener así, cuatro soluciones o raíces.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Primero, se realiza el cambio de variable z por x^2. Al reescribir la ecuación se expresa como $z^2 - 3z - 4 = 0$, esta es una ecuación de segundo grado que se resuelve así:

$z^2 - 3z - 4 = 0(z + 1)(z - 4) = 0$ Se factoriza la ecuación.

$z + 1 = 0, z - 4 = 0$ Se iguala a cero cada paréntesis.

$z = -1, z = 4$ Se resuelven las ecuaciones.

Como $z = x^2$, se puede deducir que $z > 0$, entonces, se descarta la solución $z = -1$, luego la solución será $z = 4$.

Luego, se realiza nuevamente el cambio de variable $z = x^2$ en la solución $z = 4$, por tanto, $x^2 = 4$. Así, al resolver la ecuación se obtiene $x = 2$ o $x = -2$.

Finalmente, se remplazan las soluciones para verificar si satisfacen la ecuación.

Con $x = 2$; $2^4 - 3 \cdot (2)^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$ Primera solución en la ecuación.

Con $x = -2$; $(-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$ Segunda solución en la ecuación.

En conclusión, como las dos soluciones satisfacen la ecuación, entonces, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son soluciones de la ecuación.

2. Encontrar el valor de k tal que la ecuación $x^4 + kx^2 + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales.

Ya que es una ecuación bicuadrática el discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser igual a cero para que se le pueda hallar raíz cuadrada.

Primero, se remplazan $a = 1$, $b = k$ y $c = 1$ en la expresión del discriminante:

$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$k^2 - 4 = 0 \rightarrow k^2 = 4$ Se realiza la multiplicación y se suma 4 a ambos lados.

$k = \pm 2$ Se halla la raíz cuadrada.

Luego, se toma cada valor de k, se remplaza en la ecuación y se elige cuál valor es correcto.

Si $k = 2$, se tiene $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow (x^2 + 1)^2 = 0$. En este caso no se obtienen soluciones reales.

Si $k = -2$, se tiene $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Así, para que la ecuación $x^4 + kx^2 + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales, k debe ser igual a -2.

Recuerda que...

Para todo número real a, $a^2 \geq 0$.

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Realiza lo que se indica en cada caso.

141. Explica cuál es la razón por la cual se puede elevar al cuadrado a ambos lados de una ecuación que contiene raíces de índice dos.

142. Indica qué caso permite factorizar el trinomio $x^2 - 2x + 1$ que resulta en los procedimientos algebraicos para resolver el literal *a* de la página 145.

143. Explica el procedimiento que utilizarías para resolver la ecuación $4z^4 - 19z^2 + 12 = 0$. Determina la naturaleza de las raíces de esta ecuación.

144. Indica cuántas raíces tiene la ecuación

$$z^4 - 64 = 0.$$

Determina si las soluciones dadas son raíces de cada ecuación. Justifica tu respuesta.

145. $\sqrt{x+2} = x$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

146. $\sqrt{x+5} = 3x$, $x_1 = 12$, $x_2 = 1$.

147. $\sqrt{2-3x} = \sqrt{4x-5}$, $x = 1$.

148. $\sqrt{x} = x - 6$, $x_1 = 9$ y $x_2 = 4$.

Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

149. $z^4 = 6z^2 + 7$

150. $y^4 - 2y^2 - 3 = 0$

151. $m^4 - 5m^2 + 4 = 0$

152. $9n^4 - 10n^2 + 1 = 0$

153. $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

154. $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$

155. $\frac{2}{3}x^4 - 3x^2 + \frac{4}{3} = 0$

156. $x^4 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5} = 0$

157. $3y^4 + 12y^2 + 12 = 0$

158. $2x^4 - 1 = -x^2$

Encuentra los valores de *k* tales que la ecuación $x^4 - kx^2 + 4 = 0$:

159. Tenga dos soluciones reales.

160. Tenga una solución real.

161. No tenga soluciones reales.

Escribe falso o verdadero según corresponda. Justifica la respuesta.

162. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$ son dos raíces reales y dos complejas.

163. Las soluciones de una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, se pueden hallar factorizando con valores enteros.

164. La ecuación $x^6 - x^3 + 5 = 0$ no se puede resolver como una ecuación cuadrática.

165. En la ecuación $x^4 - ax^2 = 0$, una de las soluciones es $x = 0$.

Relaciona cada expresión con su gráfica respectiva (utiliza los ceros de cada función).

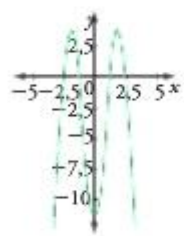
166. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 7$

167. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 12$

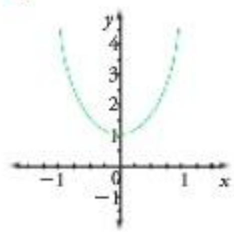
168. $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 2$

169. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

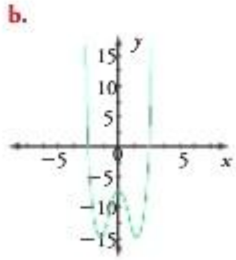
a.



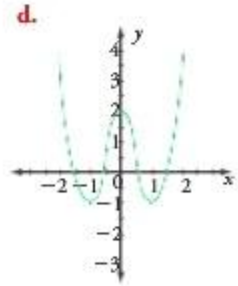
c.



b.



d.



Resuelve la situación en cada caso.

170. ¿La expresión $\sqrt[4]{x}$, siempre es mayor que cero?

171. Halla las soluciones de la ecuación $x^6 - 1 = 0$.

172. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^{2n} - 1 = 0$? Si $n = 1, 2, 3, 4\ldots$

4. Ecuaciones cuadráticas literales

Las **ecuaciones cuadráticas literales** son aquellas en las que los coeficientes son letras que representan números reales. Por ejemplo, las ecuaciones $0 = 20 - V_0t + 0,5gt^2$ y $px^2 - (2p + 1)x + 5 = 0$ son ecuaciones cuadráticas literales. Este tipo de ecuaciones se resuelve por factorización o por fórmula general.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas literales para la variable que se indica.

a. $3x^2 - 12m^2 = 0$, resolver para x.

$3x^2 - 12m^2 = 0$

$3x^2 = 12m^2$ Se suma $12m^2$.

$x^2 = 4m^2$ Se divide entre 3.

$x = \pm\sqrt{4m^2}$ Se despeja x.

$x = \pm 2m$ Se extrae la raíz cuadrada.

Luego, $x = 2m$ y $x = -2m$.

b. $2my^2 - 16aby = 0$, resolver para y, si $m \neq 0$.

$2my^2 - 16aby = 0$

$2y(my - 8ab) = 0$ Se factoriza.

$2y = 0$ o $my - 8ab = 0$ Se iguala a cero cada factor.

$y = 0$ o $y = \dfrac{8ab}{m}$ Se resuelve cada ecuación.

Así: $y = 0$ y $y = \dfrac{8ab}{m}$.

c. $x^2 - 2mnx - 3m^2n^2 = 0$, resolver para x.

Primero, se identifican a, b y c. Luego, se aplica la fórmula general.

$a = 1$ $\quad b = -2mn$ $\quad c = -3m^2n^2$

$$x = \frac{-(-2mn) \pm \sqrt{(-2mn)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3m^2n^2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2mn \pm \sqrt{4m^2n^2 + 12m^2n^2}}{2}$$

$$x = \frac{2mn \pm \sqrt{16m^2n^2}}{2} = \frac{2mn \pm 4mn}{2}$$

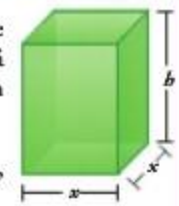
Luego,

$$x_1 = \frac{2mn + 4mn}{2} = \frac{6mn}{2} = 3mn$$

$$x_2 = \frac{2mn - 4mn}{2} = \frac{-2mn}{2} = -mn$$

Finalmente, $x = 3mn$ y $x = -mn$.

2. El área total de una caja de base cuadrada de lado x y altura h está determinada por la expresión $s = 2x^2 + 4xh$.



Resolver la ecuación $s = 2x^2 + 4xh$, para x.

$s = 2x^2 + 4xh$

$2x^2 + 4xh - s = 0$ Se iguala a cero.

$a = 2;\ b = 4h,\ c = -s$ Se identifican a, b y c.

$x = \dfrac{-(4h) \pm \sqrt{(4h)^2 - 4(2)(-s)}}{2 \cdot 2}$ Se aplica la fórmula general.

$x = \dfrac{-4h \pm \sqrt{16h^2 + 8s}}{4}$ Se resuelven las operaciones.

$x = \dfrac{-4h \pm \sqrt{4(4h^2 + 2s)}}{4}$ Se factoriza.

$x = \dfrac{-4h \pm 2\sqrt{4h^2 + 2s}}{4}$ Se aplica la propiedad de la radicación y se extrae la raíz.

$x = \dfrac{-2h \pm \sqrt{4h^2 + 2s}}{2}$ Se simplifica.

Por tanto,

$x_1 = \dfrac{-2h + \sqrt{4h^2 + 2s}}{2}$ y Se obtienen las dos raíces.

$x_2 = \dfrac{-2h - \sqrt{4h^2 + 2s}}{2}$.

3. Despejar v de la ecuación $t = \sqrt{v^2 + 2gx}$.

$t = \sqrt{v^2 + 2gx}$

$t^2 = v^2 + 2gx$ Se eleva al cuadrado y se simplifica.

$v^2 = t^2 - 2gx$ Se despeja v^2.

$v = \pm\sqrt{t^2 - 2gx}$ Se despeja v.

Por tanto, $v = \sqrt{t^2 - 2gx}$ y

$v = -\sqrt{t^2 - 2gx}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Determina los coeficientes a, b y c de las siguientes ecuaciones cuadráticas, teniendo en cuenta que y sea la incógnita.

173. $y^2 - 2my + m^2 = 0$

174. $py^2 + 2qy - p^2q^2 = 0$

175. $\frac{1}{3}zy^2 - 4yz - 5z = 0$

176. $7ky - 12k^2y^2 + k^4 = 0$

177. $-8mny + 7m^2ny^2 - m^2n^2 = 0$

178. $\frac{2}{7}rs^2 - 13r^2y^2 = 0$

179. $-\frac{5}{6}wy + \frac{10}{3}w^2y^2 = 30$

180. $20x^2y^2 = -11xy + 100x^2$

181. $48bg^2y - \frac{1}{100}b^2 = 15b^2y^2g$

182. $-\frac{1}{9}a^2b^2 + 5a^2y^2 = 7ab^2y$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas para x.

183. $4x^2 - 8kx = 0$

184. $12x^2 + px = 0$

185. $5x^2 - 125b^2 = 0$

186. $6x^2 - 5qx + q^2 = 0$

187. $(x - b)^2 + (x + b)^2 = 18a^2$

188. $\frac{x^2 + a^2}{a} = 10a$

189. $(mx + n) \cdot (mx - n) = 3n^2$

190. $12(x^2 + b^2) = 60b^2$

191. $\left(\frac{1}{3}nx - 1\right)\left(\frac{2}{5}nx + 1\right) = -\frac{3}{5}$

192. $\left(\frac{5}{4}xy + y - 1\right)(3x + 2) = 2y - 3x - \frac{1}{2}$

193. $\left(\frac{3abx^2 - 5a^2bx - 2ab^2x}{x - b}\right) = 4abx - a^2b$

Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas literales, teniendo en cuenta que m es la incógnita.

194. $(a^2 + b^2)m = ab(m^2 + 1)$ con $a, b \neq 0$

195. $\frac{m^2 - a - b}{c} + \frac{m^2 - b - c}{a} + \frac{m^2 - c - a}{b}$
$= 3$ con, $a, b, c \neq 0$.

Resuelve.

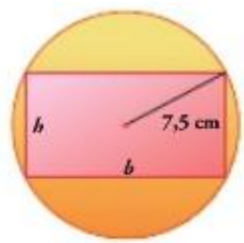
196. La altura que alcanza una bala de cañón está dada por la expresión

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Donde V_0 es la velocidad inicial, t es el tiempo y $g \approx 10$ m/s².

Escribe una fórmula para hallar el tiempo (t) en función de la altura (y) cuando $V_0 = 500$ m/s.

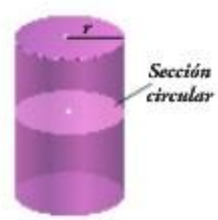
197. El área del rectángulo de la siguiente figura en función de su base se determina mediante la expresión $A = b\sqrt{225 - b^2}$.



Halla la expresión que permite calcular la medida de la base en función del área del rectángulo.

198. La velocidad de un gas que circula por un cilindro varía según la fórmula

$$V = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{d}\right)^2\right].$$



Donde $V_{máx}$ es la velocidad máxima del gas, r es el radio del cilindro y V es la velocidad del gas a una distancia d del centro de una sección circular del cilindro.

Halla la expresión que permite calcular el radio del cilindro.

5. Problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas

Ampliación multimedia   Actividad

En algunas situaciones, al plantear problemas se obtienen ecuaciones de segundo grado.

En la solución del problema se asignan variables para plantear la ecuación de segundo grado, que surge a partir de la relación entre las magnitudes involucradas en el problema. Luego, se resuelve la ecuación y se verifican las soluciones posibles con el contexto del problema.

EJEMPLOS

1. Encontrar un número de dos cifras cuyo dígito de las decenas es cinco unidades mayor que el dígito de las unidades. Además, al dividir el número entre el doble del dígito de las unidades, se obtiene el doble de la suma de ambas cifras del número.

x: dígito de las decenas. $x - 5$: dígito de las unidades.

$10x + (x - 5)$ Se determina el número.

$\dfrac{10x + (x - 5)}{2(x - 5)} = 2(x + (x - 5))$ Se plantea la ecuación.

$\dfrac{11x - 5}{2(x - 5)} = 2(2x - 5)$ Se resuelven las sumas.

$\dfrac{11x - 5}{2x - 10} = 4x - 10$ Se resuelven los productos.

$11x - 5 = (4x - 10)(2x - 10)$ Se multiplica por $2x - 10$.

$11x - 5 = 8x^2 - 60x + 100$ Se multiplica y se simplifica.

$8x^2 - 71x + 105 = 0$ Se iguala a cero.

$a = 8,\ b = -71,\ c = 105$ Se identifican los coeficientes.

$x = \dfrac{-(-71) \pm \sqrt{(-71)^2 - 4(8)(105)}}{2 \cdot 8}$ Se aplica la fórmula.

$x = \dfrac{71 \pm \sqrt{1.681}}{16}$ Se resuelven las operaciones.

$x = \dfrac{71 \pm 41}{16}$ Se extrae la raíz.

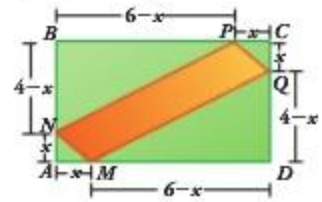
Por lo que, $x_1 = \dfrac{71 + 41}{16}$, $x_2 = \dfrac{71 - 41}{16}$

Así, $x_1 = 7$, $x_2 = \dfrac{15}{8}$

Se toma solamente el valor entero, ya que las cifras no pueden ser una fracción.

Luego, el dígito de las decenas es 7 y el dígito de las unidades es 2. Así, el número es 72.

2. Determinar el área máxima del cuadrilátero $MNPQ$ inscrito en el rectángulo $ABCD$, donde las medidas de sus lados son $AD = 6$ m, $AB = 4$ m, los puntos M, N, P y Q son puntos respectivos de los lados $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$, tales que $AM = AN = CP = CQ$.



$x = AM$

$A_{MNPQ} = A_{ABCD} - 2 \cdot (A_{AMN}) - 2 \cdot (A_{NBP})$ Se obtiene el área del cuadrilátero.

$A_{MNPQ} = 6 \cdot 4 - 2 \cdot \left(\dfrac{x^2}{2}\right) - 2 \cdot \left(\dfrac{(6 - x)(4 - x)}{2}\right)$

Se hallan las áreas.

$A_{MNPQ} = 24 - x^2 - (6 - x)(4 - x)$ Se simplifica.

$A_{MNPQ} = 24 - x^2 - (24 - 10x + x^2)$ Se multiplica.

$A_{MNPQ} = -2x^2 + 10x$ Se resta y se reducen términos semejantes.

Para determinar el área máxima se halla el vértice de la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 10x$.

$V = \left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

Como $a = -2$, $b = 10$ se tiene que:

$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{10}{2(-2)} = \dfrac{5}{2}$

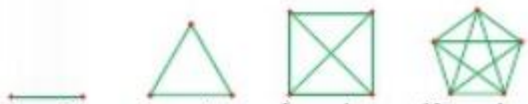
$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -2\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 10\left(\dfrac{5}{2}\right)$

$= -\dfrac{25}{2} + 25 = 12{,}5$

Por tanto, el área máxima de $MNPQ$ es $12{,}5$ m^2.

3. En una compañía, los computadores están conectados por la red. Cada usuario está conectado con otro. Si se sabe que siempre hay una conexión entre dos equipos, ¿cuántos computadores se necesitan para formar una red con 276 conexiones?

Primero, se analiza la situación con menos computadores. Los computadores se representan por puntos y las conexiones por segmentos de recta, como se muestra a continuación.



1 conexión **3 conexiones** **6 conexiones** **10 conexiones**

Así, para 2 computadores, se tiene 1 conexión. Para 3 computadores, 3 conexiones. Para 4 computadores, 6 conexiones. Para 5 computadores, 10 conexiones.

Luego, a partir de la tercera figura, el cálculo de las conexiones se relaciona con la suma del número de lados y diagonales de un polígono.

Como el número de diagonales que tiene un polígono de n lados está dado por la expresión $\frac{n(n-3)}{2}$, entonces, se tiene que:

Luego, la ecuación que determina la cantidad de computadores para formar una red de 276 conexiones es:

$n + \frac{n(n-3)}{2} = 276$

$n + \frac{n^2 - 3n}{2} = 276$ Se realiza el producto.

$2n + n^2 - 3n = 552$ Se multiplica por 2.

$n^2 - n - 552 = 0$ Se reducen términos semejantes.

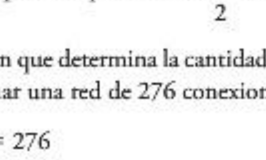
$(n - 24)(n + 23) = 0$ Se factoriza.

$n - 24 = 0$ o $n + 23 = 0$ Se iguala cada factor a cero.

$n = 24$ o $n = -23$ Se resuelve cada ecuación.

Finalmente, como la solución es positiva, entonces, la cantidad de computadores es 24.

4. Dos ciclistas A y B parten de un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman entre sí un ángulo recto. B se desplaza 7 km/h más rápido que A. Después de tres horas se encuentran a 39 km de distancia uno del otro. Determinar la velocidad de cada uno.



v: velocidad del ciclista A.

$v + 7$: velocidad del ciclista B.

Como distancia es igual a velocidad por tiempo, entonces:

$3v$: distancia recorrida por el ciclista A en 3 horas.

$3(v + 7)$: distancia recorrida por el ciclista B en 3 horas.

$(3v)^2 + (3(v + 7))^2 = 39^2$ Se aplica el teorema de Pitágoras.

$v^2 + 7v - 60 = 0$ Se resuelven las operaciones y se simplifica.

$(v + 12)(v - 5) = 0$ Se factoriza.

$v + 12 = 0$ o $v - 5 = 0$ Se iguala cada factor a cero.

$v = -12$ o $v = 5$ Se resuelve cada ecuación.

Por tanto, $v_1 = -12$ y $v_2 = 5$. Se toma solamente el valor positivo, porque se analiza la magnitud de la velocidad.

Luego, la velocidad del ciclista A es 5 km/h y la velocidad del ciclista B es 12 km/h.

5. Un grupo de personas se presenta para reclamar un premio de $500.000, los ganadores se reparten en partes iguales. Para repartir el premio se debe tener en cuenta tres partes más, lo cual implica una reducción de $37.500 de la cantidad que recibiría cada persona. ¿Cuántas personas forman el grupo de ganadores?

x: la cantidad de ganadores.

$x + 3$: el grupo con las tres partes.

$\frac{500.000}{x} - 37.500 = \frac{500.000}{x+3}$ Se plantea la ecuación.

$\frac{500.000 - 37.500x}{x} = \frac{500.000}{x+3}$ Se resuelven las operaciones.

$(500.000 - 37.500x)(x + 3) = 500.000x$ Se eliminan denominadores.

$37.500x^2 + 112.500x - 1.500.000 = 0$ Se multiplica y se reducen términos semejantes.

$x^2 + 3x - 40 = 0$ Se divide entre 37.500.

$(x + 8)(x - 5) = 0$ Se factoriza.

$x + 8 = 0$ o $x - 5 = 0$ Se iguala cada factor a cero.

$x = -8$ o $x = 5$ Se resuelve cada ecuación.

Por tanto, las soluciones son -8 y 5. Se descarta la solución negativa, ya que la cantidad de personas es positiva.

Luego, la cantidad del grupo de ganadores es 5.

Afianzo COMPETENCIAS

S Soluciono problemas

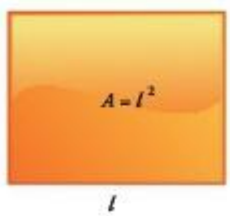
S Resuelve.

199. Encuentra tres números enteros consecutivos, de manera que el cociente del tercero entre el primero sea igual a $\frac{3}{2}$ del segundo.

200. El cuadrado de la suma de un número más 5 unidades es 289. ¿Cuál es el número?

201. La suma de 9 y el cuádruplo del cuadrado de un número es igual al cuadrado de la suma de ese número y su consecutivo. ¿Cuál es el número?

202. El triple del área de un cuadrado es 115,32 m². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

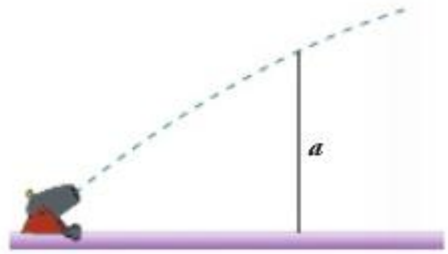


203. Un grupo de amigos planea viajar a los Llanos Orientales en una camioneta. Según el plan propuesto, el costo total del viaje de ida será de $115.824.

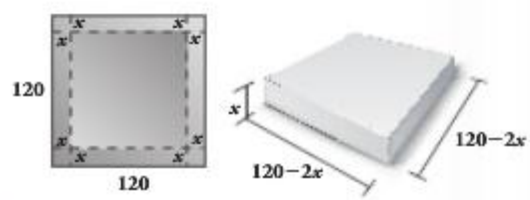
En último momento dos de los amigos no pueden viajar; el resto debe aportar cada uno $4.826 adicionales. ¿Cuántas personas realizarán el viaje?

204. Un agricultor tiene un terreno cuadrado dedicado al cultivo de hortalizas. Para ampliarlo, quiere comprar el terreno adyacente, que mide de largo lo que mide el lado de su terreno actual, y de largo, 25 metros. De esa manera, con los dos terrenos juntos, dispondría de 5.696 m². ¿Cuánto mide el lado del terreno cuadrado?

205. Si la altura a (en metros) que alcanza un proyectil lanzado desde el piso a los t segundos de su lanzamiento es $a = -16t^2 + 120t$, ¿cuánto tiempo gastará en alcanzar los 180 metros?



206. Se desea construir una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja cuadrada de cartón, que mide 120 cm de lado, recortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando las pestañas resultantes hacia arriba para formar las caras laterales. Determina las dimensiones de la caja para que su área sea de 84 cm².



S Un atleta realiza su entrenamiento diario trotando por un terreno llano y por una montaña. La velocidad del atleta en terreno llano es de 14 km/h y la velocidad en terreno montañoso es 8 km/h. Para cumplir con el entrenamiento, debe realizar en 2 horas el recorrido que se muestra en la figura.

Responde.

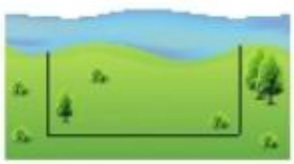
207. ¿A qué distancia de B se debe ubicar el punto C para que el atleta cumpla su entrenamiento?

208. Si el terreno fuera totalmente montañoso, ¿el atleta lograría realizar directamente el recorrido de A a D en el tiempo programado?

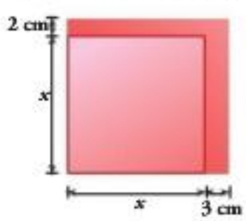
209. La página de un libro mide el doble de alto que de ancho, los márgenes laterales miden 2 cm y los márgenes superior e inferior, 3 cm.

Si el libro mide 11 cm de ancho, ¿cuánta superficie se tiene para escribir?

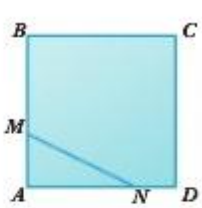
210. En la ribera de un río se va a cercar un terreno rectangular sin incluir la orilla. El costo del material para la cerca es de \$9.000 por metro, para los lados contiguos al río, y de \$7.000 para el lado paralelo al río. Si el costo total para cercar el terreno es de \$690.000, determina el área máxima del terreno en función del lado paralelo al río.



211. Si se aumenta un lado de un cuadrado en 2 cm y el otro lado en 3 cm, el rectángulo resultante tiene 86 cm² más de área que el cuadrado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



212. El área de cuadrado $ABCD$ es de 4 cm². Si sobre los lados AB y AD del cuadrado se toman dos puntos M y N tales que $AM + AN = AB$, halla el valor mayor que puede tomar el área del triángulo AMN.



S **La siguiente tabla proporciona información sobre el tamaño y el costo de las pizzas en una pizzería.**

Tamaño	Diámetro (cm)	Precio (\$)
Pequeña	20	12.000
Mediana	30	22.000
Grande	40	36.000

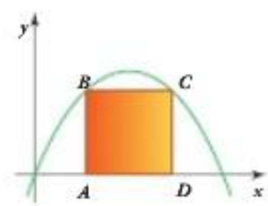
Considerando que el precio P de una pizza es el resultado de sumar un costo fijo c con un término que depende del radio r, en centímetros, según la función $P(r) = c + br + ar^2$:

213. Calcula el valor de b.

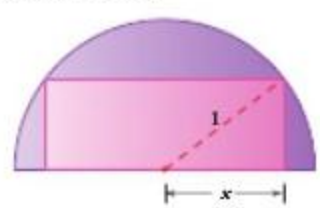
214. Calcula el valor de c.

215. Determina el precio de una pizza gigante de 50 cm de diámetro.

216. Determina la longitud del lado del cuadrado teniendo en cuenta que $f(x) = -x^2 + 2x$, como se muestra en la figura.



217. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de diámetro 2 cm, como se muestra en la figura. Determina la longitud x, tal que el área del rectángulo sea 1 cm².



Función cuadrática

Identifica los valores *a*, *b* y *c*. Luego, determina hacia dónde abre cada parábola y su vértice.

218. $f(x) = -4x^2$

$a =$ ___ $b =$ ___ $c =$ ___

La parábola abre hacia ________________

El vértice de la parábola es (___, ___)

219. $f(x) = -2x^2 - 3$

$a =$ ___ $b =$ ___ $c =$ ___

La parábola abre hacia ________________

El vértice de la parábola es (___, ___)

220. $f(x) = 6 - \frac{2}{3}x^2$

$a =$ ___ $b =$ ___ $c =$ ___

La parábola abre hacia ________________

El vértice de la parábola es (___, ___)

221. $y = 2x - 5x^2 - 1$

$a =$ ___ $b =$ ___ $c =$ ___

La parábola abre hacia ________________

El vértice de la parábola es (___, ___)

222. $y = 4x^2 - x + 1$

$a =$ ___ $b =$ ___ $c =$ ___

La parábola abre hacia ________________

El vértice de la parábola es (___, ___)

223. $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{5}$

$a =$ ___ $b =$ ___ $c =$ ___

La parábola abre hacia ________________

El vértice de la parábola es (___, ___)

Grafica, en tu cuaderno, cada grupo de funciones sobre el mismo plano.

224. $y = x^2, y = -2x^2, y = -0{,}5x^2$

225. $y = x^2, y = x^2 + 2, y = x^2 - 2$

226. $y = x^2, y = (x - 1)^2, y = x^2 - 1$

227. $y = x^2, y = x^2 + 2, y = 2x^2$

Elabora un esbozo de gráfica de una función cuadrática que cumpla cada condición.

228. Raíces: $x = 2$, $x = 1$; vértice $(1{,}5,\ 1)$

229. Raíces: $x = 1{,}5$, $x = -3{,}5$; vértice $(-1,\ 3)$

230. Raíces: $x = 4$, $x = -4$, vértice $(0,\ -4)$

Ecuación cuadrática

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

231. $z^2 + 5z + 2 = 0$

$z_1 =$ ______ $z_2 =$ ______

232. $4x + x^2 + 12 = 0$

$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

233. $4y^2 + 16 = 0$

$y_1 =$ ______ $y_2 =$ ______

234. $p^2 - 81 = 0$

$p_1 =$ ______ $p_2 =$ ______

235. $\frac{1}{9}q^2 - 25 = 0$

$q_1 =$ ______ $q_2 =$ ______

236. $x^2 - 15x + 56 = 0$

$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

237. $2y^2 + 8 = 0$

$y_1 =$ ______ $y_2 =$ ______

238. $(p - 2)(p - 5) = 3$

$p_1 =$ ______ $p_2 =$ ______

239. $x^2 - 2x - 35 = 0$

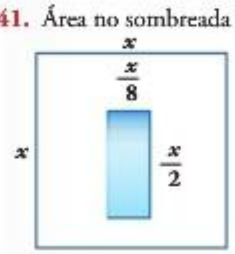
$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

240. $2{,}3q^2 - 15q - \frac{31}{10} = 0$

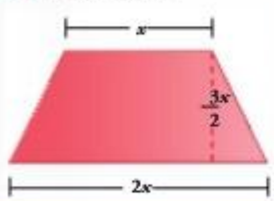
$q_1 =$ ______ $q_2 =$ ______

Halla el valor x a partir del área de cada figura.

241. Área no sombreada 60 cm².

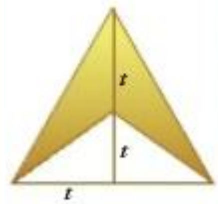


242. Área 36 cm².



Resuelve.

243. El área de la parte sombreada es 14,4 cm². ¿Cuál es el valor de t?



Utiliza el discriminante para determinar cuántas veces la parábola corta el eje.

244. $y = x^2 - 10x + 25$ ______

245. $y = 3x^2 + 2x + 2$ ______

246. $y = -x^2 - 4x + 3$ ______

247. $y = 2x^2 - 105 + x$ ______

248. $y = 4x^2 - 8x - 16$ ______

249. $y = x^2 - \frac{1}{5}x + 10$ ______

250. $y = \frac{1}{9}x^2 - 18$ ______

251. $y = x^2 - \frac{1}{9}x + 1$ ______

Ecuaciones bicuadráticas

Responde falso o verdadero según corresponda. Justifica tu respuesta.

252. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 4 = 0$ son dos raíces reales y una compleja. ☐

______

______

253. Las soluciones de la ecuación $\sqrt{x + 5} = 4$ no son raíces reales. ☐

______

______

254. Las raíces de la ecuación $2x^4 - 7x - 3 = 0$ son $\frac{1}{2}$ y 3. ☐

______

______

PROBLEMAS PARA REPASAR

Una pelota de tenis se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 metros por segundo. La altura (h) de la pelota en cualquier instante t en segundos está dada por la expresión

$$A(t) = 64t - 16t^2$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?, y ¿en qué momento alcanza la altura máxima?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento alcanza la altura máxima?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se lanza la pelota con una velocidad inicial $V_0 = 64$ m/s.
La expresión de la altura es $A(t) = 64t - 16t^2$.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determina a qué corresponden los datos que se preguntan, en relación con las características de la función cuadrática.

Los datos corresponden al vértice de una parábola ya que es la altura máxima y el tiempo en que llega a la altura máxima.

Segundo, se calcula el vértice utilizando la expresión para calcular el vértice.

$$V = (h, k) \text{ con } h = \frac{-b}{2a}, k = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

En este caso, $b = 64$ y $a = -16$

Se remplazan a y b en la expresión del vértice.

$$h = \frac{-64}{2(-16)} = \frac{-64}{-32} = 2 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} k &= h(2) \\ &= 64(2) - 16(2)^2 \\ &= 128 - 64 \\ &= 64 \text{ m} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $V = (2, 64)$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones son correctas. Luego, se tiene que la altura máxima que alcanza la pelota es 64 metros y el momento en que alcanza esa altura es a los 2 segundos de haber sido lanzada.

Resuelve las preguntas 255 a 257, de acuerdo con la siguiente información.

En una competencia de saltos, la altura de los saltos está determinada por la función $h(t) = -2t^2 + 8t$, $h(t)$ medida en metros, donde t es el tiempo en segundos que dura el salto.

255. Calcula la altura que alcanza el deportista a los 3 segundos.

256. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el deportista? ¿A los cuántos segundos sucedió esto?

257. ¿Cuánto tiempo duró el deportista en el aire?

En los ejercicios 258 a 263 lee cada información y resuelve. Para ello, plantea una ecuación cuadrática.

258. La suma de dos números es 111 y su producto es 2.870. ¿Cuáles son los números?

Los números son ________ y ________.

259. La suma de un número y su cuadrado es 30. ¿Cuál número cumple esta condición?

El número que cumple la condición es ________.

260. Dentro de 11 años la edad de Marcos será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Cuál es la edad de Marcos?

Marcos tiene ________ años.

261. Las dimensiones de un jardín de forma rectangular son 34 m de ancho por 50 m de largo. Si el jardín está rodeado por un camino de arena de un ancho uniforme, halla el ancho del camino teniendo en cuenta que su área es de 540 m^2.

El ancho del camino es ____________

262. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya base mide 2 centímetros menos que la altura y la diagonal mide 10 centímetros.

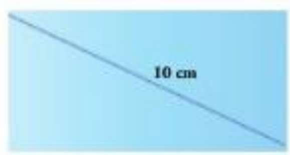
El rectángulo mide ________ de ancho y ________ de largo.

263. En una ciudad, la ecuación de demanda para la compra de un juguete está dada por la expresión $p(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}5x + 0{,}6$; donde $p(x)$ es el precio por unidad del mayorista y x la cantidad demandada de juguetes en miles de unidades, ¿cuál es la cantidad ideal de juguetes que debe vender el mayorista para obtener el mejor precio?

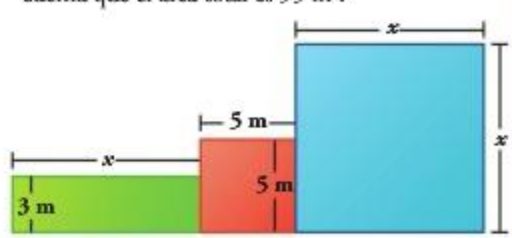
____

____

264. Observa el siguiente rectángulo cuya área corresponde a 48 cm^2. Luego, determina las medidas de dicho rectángulo.



265. Halla el valor de la medida del lado del cuadrado grande que hace parte del terreno, teniendo en cuenta que el área total es 95 m^2.



Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para saber cómo se genera una radiografía.

Una **radiografía** es una imagen que se toma del cuerpo humano, se registra en una placa fotográfica o de forma digital y sirve para analizar partes del sistema óseo del cuerpo especialmente. Esta imagen se genera cuando se expone el receptor de imagen radiográfica a una fuente de radiación de alta energía procedente de isótopos radiactivos. Las sustancias radiactivas que se necesitan para tomar una radiografía se producen con un dispositivo denominado ciclotrón.

El ciclotrón es un dispositivo de tipo circular que permite acelerar partículas subatómicas a grandes velocidades hasta hacerlas chocar con un blanco, produciendo una reacción nuclear, y así generar elementos radiactivos.

Su funcionamiento inicia con el ingreso de un protón (partícula subatómica con carga eléctrica positiva) en dos semicírculos llamados D's por su forma de "d mayúscula". Gracias a la interacción de campos eléctricos y magnéticos la partícula se mueve en forma espiral como se muestra en la figura 1.

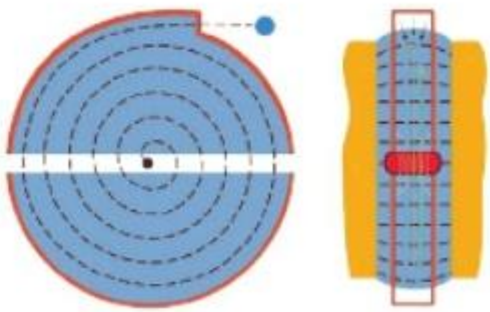


Figura 1. Trayectoria espiral del protón sobre el ciclotrón.

Cuando alcanza la energía necesaria, la partícula choca con el blanco y la energía de la partícula subatómica se puede calcular de acuerdo con la siguiente expresión:

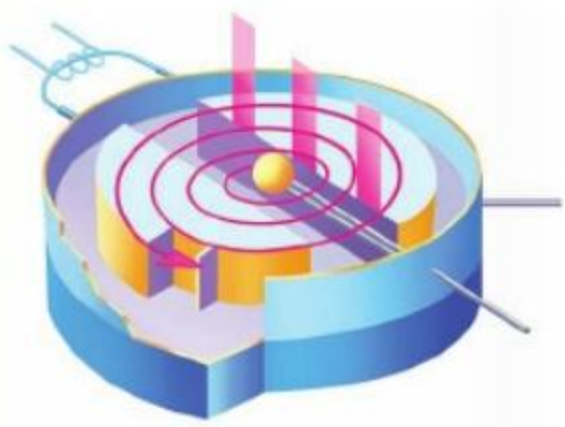
$$K = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

La energía (K) del protón cuando sale del ciclotrón depende del cuadrado del radio (R) de los semicírculos. (q) es la carga del protón equivalente a $1{,}6 \times 10^{-9}$ C, (B) es el campo magnético al cual se somete el protón cuando viaja por el ciclotrón y (m) es la masa del protón equivalente a $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

1. **Calcula la energía con que sale un protón al pasar por un ciclotrón de campo magnético de 0,4 T y radio 1,2 m.**
2. **Completa la tabla con la energía de cada protón para los diferentes radios y realiza la gráfica de K respecto a R para un campo magnético de 0,52 T.**

Radio (m)	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Energía (J)					

3. **¿Cuál es el radio requerido de un ciclotrón para acelerar protones hasta una energía de $7{,}06 \times 10^{-10}$ J utilizando un campo magnético de 4,8 T?**



Ciclotrón de Medical Systems utilizado para el tratamiento de tumores cancerosos.

...También sirve para determinar la velocidad en las montañas rusas.

La montaña rusa debe su nombre a los grandes toboganes de madera que se construían en Rusia para lanzar trineos deslizables sobre nieve. Posteriormente, apareció en Francia un modelo de montaña rusa en el que se adaptaron rieles y vagones. Esta idea de montaña rusa se introdujo en Estados Unidos como una atracción popular llamada *Roller coaster*. En la actualidad, la montaña rusa es una de las atracciones mecánicas más llamativas para las personas y se utiliza en ferias o parque temáticos alrededor del mundo, donde se pueden encontrar las más rápidas, extensas, vertiginosas o altas.

Básicamente la montaña rusa consiste en el desplazamiento de uno o más vagones por medio de un riel que tiene altibajos, de tal forma que los vagones alcanzan, en algún punto del riel, una altura máxima desde la que caen libremente aprovechando la energía potencial gravitacional que alcanzan.

A continuación se relacionan las montañas rusas más altas del mundo.

Figura 1. La montaña rusa *Kingda ka* ubicada en Jersey tiene 139 metros de altura.

Nombre	Ubicación	Altura
Tower of terror II dreamword	Australia	115 metros
Superman Escape of krypton	California, Estados Unidos	126,5 metros
Top thrill dragster	Ohio, Estados Unidos	128 metros
Kingda ka	Jersey, Estados Unidos	139 metros

Existe una expresión proveniente de la energía cinética y la energía potencial que relaciona la velocidad y la altura a la que cae libremente un objeto como sucede en las montañas rusas más altas del mundo.

La relación es:

$$v^2 = 2gh$$

Donde v es la velocidad final del objeto, g es la constante gravitacional cuyo valor aproximado es 9,8 m/s^2 y h es la altura de la cual cae libremente el objeto.

1. **Calcula la velocidad máxima que se alcanza en cada una de las montañas rusas mencionadas en la tabla.**
2. **La energía cinética es la energía en movimiento que poseen los cuerpos y se halla mediante la expresión:**

$$E_C = \frac{mv^2}{2}$$

Si un vagón de la Kingda ka con 10 personas tiene una masa aproximada de 1.200 kg, ¿cuál es su energía cinética máxima?

Trabaja con Winplot

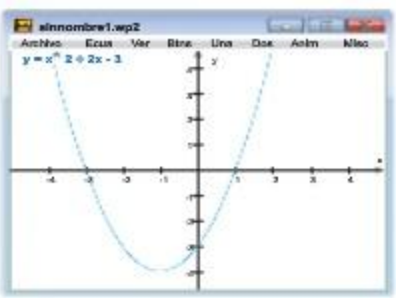
Objetivo: analizar la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, a partir de la variación de los parámetros a, b y c, reconociendo los elementos de la función cuadrática.

Descripción: representar una función cuadrática particular y después la familia de funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$, en el programa Winplot. Luego, hacer variar los parámetros a, b y c para encontrar generalidades y formular conclusiones acerca de las características de la gráfica de una función cuadrática.

Para acceder a Winplot, ingresa y descarga el programa en winplot.softonic.com

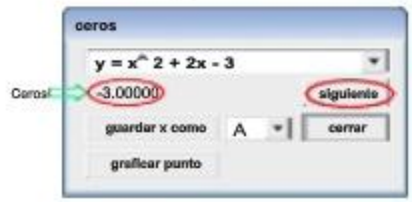
1. Haz doble clic en el icono wplotsp.exe.
2. Activa la opción **Ventana** y selecciona **2-dim**.
3. Activa la opción **Ecua**, en el menú y selecciona **Explicita**. Luego, en la ventana que se despliega, escribe la expresión $x^2 + 2x - 3$, como se observa en la ilustración.

4. Haz clic en **ok** y observa dos ventanas: la gráfica de la función y otra que se denomina **inventario**.

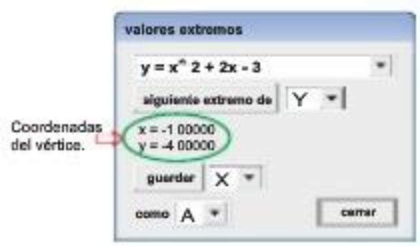


5. En la ventana inventario observa qué pasa cuando haces clic en las herramientas **editar, gráfico, ecuación** y **tabla**. Describe en tu cuaderno lo que ves en cada una.

6. Observa en la herramienta **tabla**, los cortes de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ con los ejes e identifica el vértice. Luego, confirma con la gráfica de la función que sean los mismos.
7. Activa la opción **Una,** en el menú, y selecciona **Ceros**. Luego, en la ventana que se despliega, identifica los ceros de $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Haz clic en **siguiente** para encontrar otros ceros, como se ve en la figura.



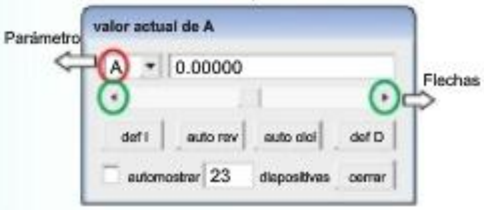
8. Activa la opción **Una**, en el menú, y selecciona **Extremos**. Luego, en la ventana que se despliega aparecen las coordenadas del vértice de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, como aparece en la figura.



9. Repite el paso 3 con $f(x) = ax^2 + bx + c$, como se observa en la ilustración.

10 Haz clic en **ok** y observa que la gráfica es una línea recta. Esto sucede porque el programa asigna los valores de *a*, *b* y *c* igual a cero (por defecto).

11 Despliega la herramienta **Anim** del menú, selecciona la opción **Parámetros A-W**. En ella podrás cambiar los valores de *a*, *b* y *c* seleccionando cada parámetro y moviendo las flechas hacia la derecha o la izquierda.



12 Utiliza Winplot para analizar las siguientes funciones cuadráticas:

$f(x) = ax^2$

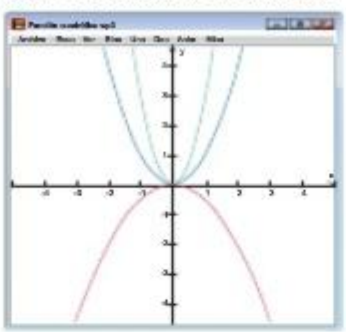
$f(x) = ax^2 + c$

$f(x) = ax^2 + bx$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Para ello, cambia los parámetros de *a*, *b* y *c*, según corresponda.

13 Responde las siguientes preguntas a partir de las gráficas de funciones cuadráticas.

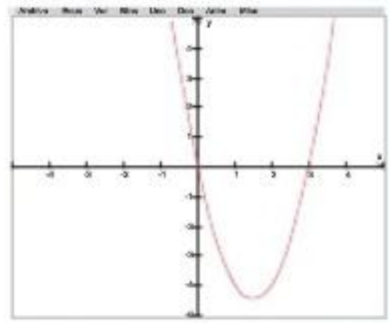


a. ¿Cuál es el color de la gráfica de la función cuadrática si $a > 1$?

b. ¿Cuál es el color de la gráfica de la función cuadrática si $a < 0$?

c. ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de las funciones representadas en Winplot? Escribe dos.

14 Determina por ensayo y error en Winplot, la ecuación de la función cuadrática que aparece en la siguiente figura. Luego, encuentra las coordenadas exactas del vértice.



15 Realiza la representación gráfica de cada función en el programa Winplot. Luego, halla los ceros de la función y encuentra las coordenadas exactas del vértice.

a. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

b. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

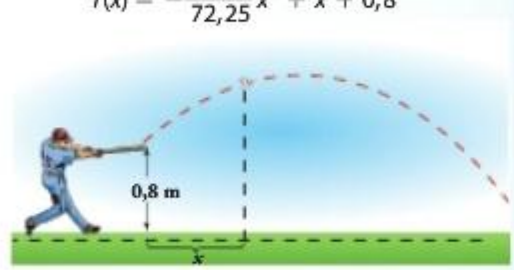
c. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

d. $f(x) = -6x^2 - 12x - 5$

16 Resuelve el siguiente problema aplicando el programa de Winplot.

Se lanza una pelota de béisbol a través de un campo de juego a partir de una altura de 0,8 metros sobre el suelo, en un ángulo de 45° respecto a la horizontal, a una velocidad de 8,5 m/s. Aplicando las leyes de la física sobre la trayectoria de la pelota es posible establecer una función para la altura (*y*) de la pelota en términos de la distancia recorrida (*x*), así:

$$f(x) = -\frac{9{,}8}{72{,}25}x^2 + x + 0{,}8$$



Encuentra la altura máxima que alcanza la pelota de béisbol.

6 Función exponencial y función logarítmica

Estándares: pensamientos numérico y variacional

Tu plan de trabajo...

- Identificar las características de la **función exponencial** y realizar su gráfica.
- Graficar funciones exponenciales y hallar la solución de las **ecuaciones exponenciales**.
- Comprender las características de la **función logarítmica**.
- Construir la gráfica de la función logarítmica y resolver **ecuaciones logarítmicas**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

- **4** Multimedia
- **1** Galerías
- **3** Actividades
- **1** Audios
- **3** Imprimibles
- **3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Determina si cada expresión es correcta. Justifica tu respuesta.

a. $(-2)^0 = -1$

b. $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{64}$

c. $(10)^{-2} = 20$

d. $(0,5)^{-3} = -\frac{1}{125}$

e. $6^{-2} = -36$

f. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$

2. Completa la tabla.

Potenciación	Logaritmación
$2^5 = 32$	$\text{Log}_2\, 32 = 5$
	$\text{Log}_3\, 9 =$ ______
$7^0 =$ ______	
	Log_4 ______ $= 3$

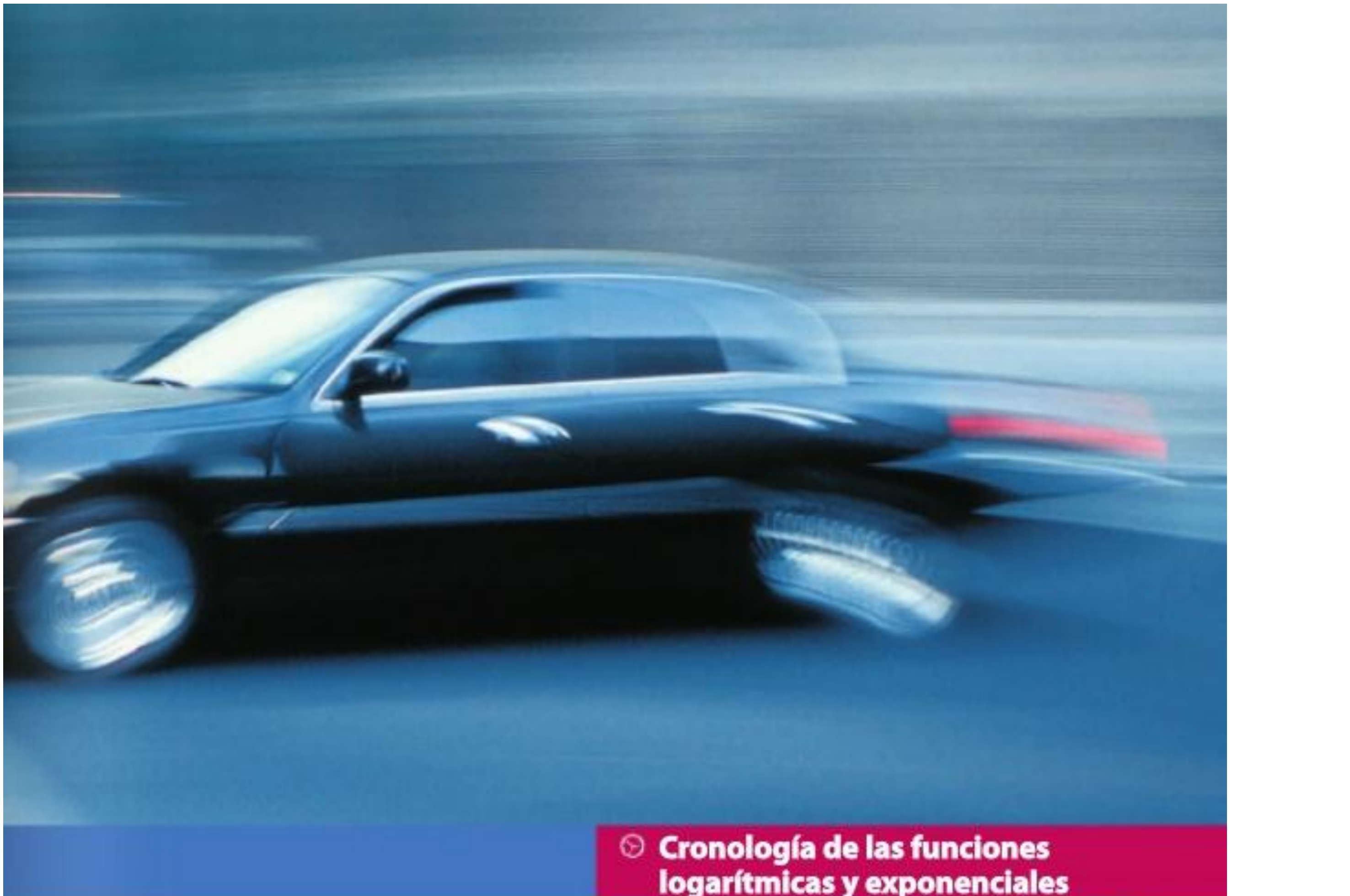
3. Elabora una tabla de valores para cada función.

a. $f(x) = x + 1$

b. $f(x) = x^2 + 1$

c. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

d. $f(x) = \frac{1}{x}$



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber por qué no se debe conducir cuando se ha ingerido alcohol.

Uno de los problemas más recurrentes en las vías del país es la accidentalidad, debido a que los conductores ingieren bebidas alcohólicas antes de conducir. Para contrarrestar este suceso diariamente la policía de tránsito hace retenes con el fin de controlar que se cumpla el Código de tránsito. Este código sanciona a los infractores que conducen en estado de embriaguez.

Lee más acerca de este tema en la página 182.

Cronología de las funciones logarítmicas y exponenciales

Francia. Nicolás de Oresme explica la divergencia de la serie armónica incluyendo la función exponencial 2^n.

Francia. El matemático Nicolás Chuquet establece reglas para las potencias de 2 del 0 al 20, en el libro *Le triparty en la science des nombres*.

Edimburgo. John Napier hace público el cálculo de logaritmos a los que llama números artificiales en su gran obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*.

Alemania. El matemático Michael Stifel, en su libro *Arithmetica*, integra por primera vez el término exponente y define los exponentes negativos aunque no los considera correctos.

Inglaterra. Christiaan Huygens expone las propiedades de la función exponencial a partir de la curva que se forma en su representación gráfica.

Berlín. Leonard Euler introduce el logaritmo como función inversa de la función exponencial y establece que los logaritmos de los números negativos son imaginarios.

Actualmente se hacen estudios de población y se modelan mediante las funciones exponenciales y logarítmicas.

1. Función exponencial

Enlace web

La función exponencial se aplica en ciencias como biología, química, economía y sociales. Particularmente, la función exponencial se utiliza en el análisis y descripción de crecimientos y decrecimientos de poblaciones, decaimiento radiactivo, carga o descarga de un capacitor, crecimiento o decrecimiento de cifras económicas, entre otras.

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde x es la variable, $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$.

Por ejemplo, las funciones $h(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$ y $f(x) = 2^x + \frac{3}{4}$ son funciones exponenciales. En el caso de la última función $f(x)$, es una traslación de $f(x) = 2^x$.

Las principales características de la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$, son:

- El dominio es el conjunto de los números reales y el rango es el intervalo $(0, +\infty)$.
- Como $a^0 = 1$, la gráfica de la función siempre pasa por el punto $(0, 1)$.
- Como $a^1 = a$, la gráfica de la función siempre pasa por el punto $(1, a)$.
- La función tiene como asíntota al eje x.

Historia de las matemáticas

El exponente de una potencia

El matemático francés Nicolás Chuquet (1455-1488), fue la primera persona en utilizar el exponente en una posición elevada con respecto a la base. Tiempo después, en 1636, James Humes publicó una obra de Viète en la que escribía expresiones como $5x^3$ de la forma $5x^{iii}$. Luego, Descartes cambió los números romanos de los exponentes por números indoarábigos.

1.1 Representación gráfica de una función exponencial

Ampliación multimedia

Enlace web

La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ es una curva que se puede analizar teniendo en cuenta dos casos.

Caso 1. El valor de *a* es mayor que 1.

En este caso se cumple que:

- La función $f(x)$ es creciente.
- Cuando x disminuye, el valor de $f(x)$ tiende a cero.
- Cuando el valor de a aumenta, $f(x)$ crece más rápidamente.

Caso 2. El valor de *a* es mayor que 0 y menor que 1.

En este caso se cumple que:

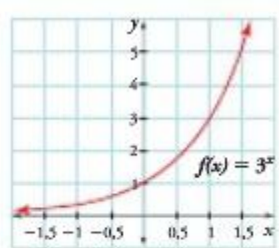
- La función $f(x)$ es decreciente.
- Cuando x aumenta, el valor de $f(x)$ tiende a cero.
- Cuando el valor de a disminuye, $f(x)$ decrece más rápidamente.

EJEMPLOS

1. **Verificar las características que cumple la función $f(x) = 3^x$.**

Como $a = 3$ se cumple que $a > 1$, por tanto, se tiene que:

- $f(x)$ es creciente.
- La asíntota de $f(x)$ es el eje x.
- La gráfica pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 3)$.



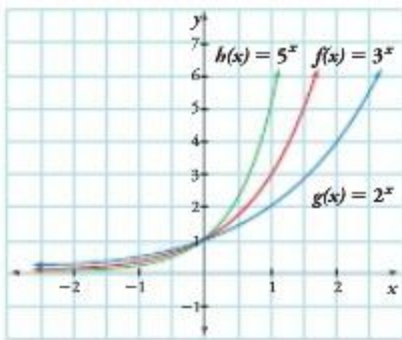
2. Graficar el siguiente grupo de funciones en un mismo plano. Luego, compararlas.

$f(x) = 3^x$, $g(x) = 2^x$ y $h(x) = 5^x$

Primero, se construye la tabla de datos, remplazando los valores de x en cada una de las funciones.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,037	0,111	0,333	1	3	9	27
$g(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$h(x)$	0,008	0,04	0,2	1	5	25	125

Luego, se ubican las parejas ordenadas en el plano cartesiano y se traza cada curva.

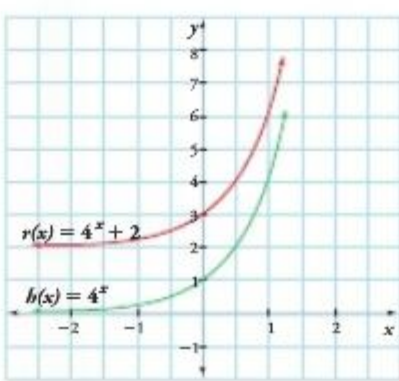


Finalmente, se tiene que las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son crecientes, pasan por el punto $(0, 1)$ y tienen como asíntota al eje x. Además, $h(x)$ crece más rápidamente que $f(x)$ y $g(x)$.

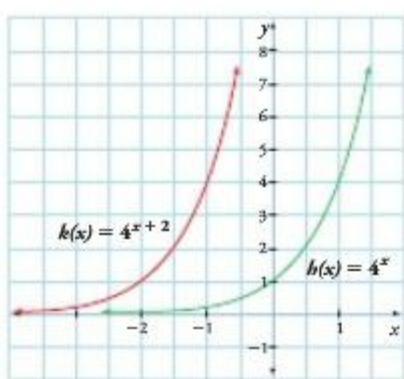
3. Determinar el domino y el rango de $h(x) = 4^x$. Luego, graficar las funciones $r(x) = 4^x + 2$ y $k(x) = 4^{x+2}$, a partir de la gráfica de la función $h(x) = 4^x$.

Como el exponente de x puede tomar cualquier valor, el dominio de $h(x) = 4^x$ es $\mathbb{R}$ y el rango de $h(x)$ es $(0, \infty)$.

Para graficar $r(x) = 4^x + 2$ se traslada la gráfica de $h(x) = 4^x$ dos unidades hacia arriba.



Para graficar $k(x) = 4^{x+2}$ se traslada la función $h(x) = 4^x$ dos unidades hacia la izquierda.



Recuerda que...

La función exponencial natural es $f(x) = e^x$.

Donde e es un número irracional llamado número de Euler, que equivale aproximadamente a 2,718281...

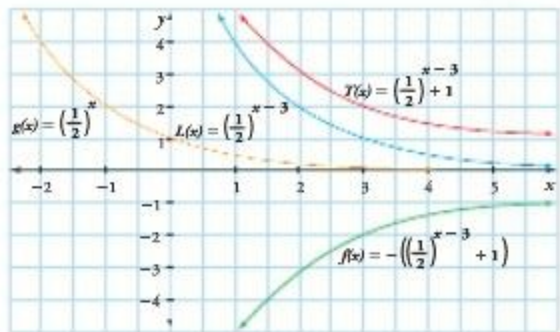
4. **Construir la gráfica** $f(x) - +\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}+1\right)$

a partir de la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Primero, se traslada tres unidades a la derecha la gráfica de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, para obtener la gráfica de $L(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$.

Luego, se traslada $L(x)$ una unidad hacia arriba, con lo que se obtiene $T(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + 1$.

Finalmente, se refleja $T(x)$ con respecto al eje x, con lo cual se obtiene $f(x) - +\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}+1\right)$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Modelo • Soluciono problemas

Responde.

1. ¿Por qué la gráfica de la función $f(x) = a^x$, siempre pasa por el punto (0, 1)?
2. ¿Cómo sería la gráfica de la función $r(x)$ del ejemplo 3 de la página 165, con respecto a $h(x)$, si fuera $r(x) = 4^x - 2$?
3. ¿Puede la función exponencial $f(x) = a^x$, tener como asíntota al eje y? ¿Por qué?

Identifica cuáles de las siguientes expresiones representan funciones exponenciales. Justifica tu respuesta.

4. $f(y) = \left(\frac{1}{4}\right)^y$
5. $h(x) = (\sqrt{2})^x$
6. $m(x) = 3x^2$
7. $k(x) = (1{,}8)^{x+1}$
8. $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
9. $g(x) = (0{,}5)^{x+2}$
10. $p(x) = \left(\frac{3}{4}x\right)^3$
11. $n(x) = -8^x$
12. $t(x) = \frac{1}{3}(x)^3$
13. $g(x) = (\sqrt{7})^x$

Dadas las siguientes funciones exponenciales:

$$y = \left(\frac{1}{6}\right)^x \text{ y } y = 6^x$$

Responde las preguntas.

14. ¿Qué valor o valores tiende a tomar y a medida que x aumenta?
15. ¿Existe algún valor de x para el cual $y = 0$? ¿Por qué?
16. ¿Puede y tomar valores negativos? ¿Por qué?

Completa la tabla de valores de cada una de las siguientes funciones.

17. $f(x) = 6^x$

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$					

18. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

x	−2	−1	0	1	2
$g(x)$					

19. $h(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

x	−3	−1	0	2	3
$h(x)$					

20. $r(x) = 4^x + 3$

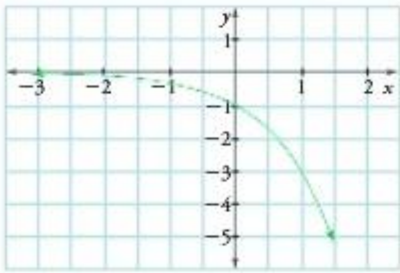
x	−2	−1	0	1	3
$r(x)$					

Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales.

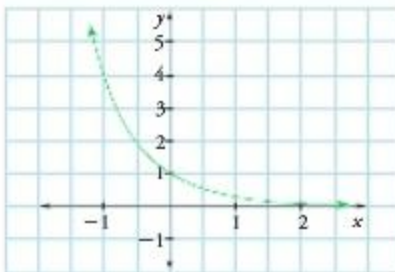
21. $y = 6^x$
22. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
23. $y = 7^x$
24. $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$
25. $y = (3)^x + 1$
26. $y = (2)^{x-2}$
27. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
28. $y - \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$

R **Determina la función exponencial que corresponde a cada una de las siguientes gráficas.**

29.

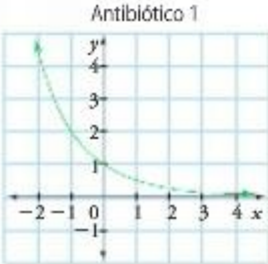


30.

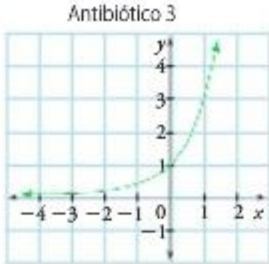


R **Observa las siguientes gráficas que representan la reacción de un cultivo de bacterias al tratamiento con cuatro tipos de antibiótico, en un determinado intervalo de tiempo. Luego, responde las preguntas.**

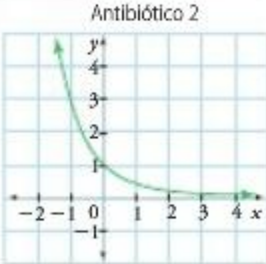
Antibiótico 1



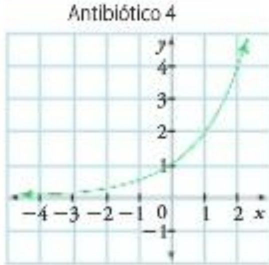
Antibiótico 3



Antibiótico 2



Antibiótico 4



31. ¿Cuál es el antibiótico que logra disminuir en menor tiempo la población de bacterias?

32. ¿Cuál es la función que representa la reacción de este antibiótico y para qué valores está definida?

M **Escribe la función que resulta de cada transformación.**

33. Reflejar $h(x) = 7^x$ con respecto al eje x.

34. Trasladar tres unidades hacia la derecha $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

35. Trasladar dos unidades hacia arriba $g(x) = -\left(\frac{2}{5}\right)^x$.

36. Reflejar, con respecto al eje y, la gráfica de $h(x) = 5^x$. Luego, trasladarla dos unidades hacia la izquierda.

S **La ganancia G, en millones de pesos, que produce un negocio de cuatro hermanos después de t años está dada por la expresión:**

$$G(t) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^t + 12$$

Después de cinco años deciden dividirse en partes iguales su ganancia.

37. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

38. Realiza la gráfica de la función.

S **El crecimiento de una población de ranas, después de t semanas, está dada por la expresión:**

$$C = 20(2)^{0,3t} - 10$$

39. Representa gráficamente, en una hoja milimetrada, el crecimiento de la población de ranas.

40. ¿Cuántas ranas hay inicialmente en la charca?

41. Después de 10 semanas sin control alguno, ¿en cuánto se ha incrementado el número de ranas?

S **En una isla en Alaska se ubicaron tres parejas de osos en 1998, con el fin de poblar cierta región. Se esperaba que la cantidad de osos se incrementara según la función:**

$$P(t) = P_i 2^{0,18t}$$

Donde t es la cantidad de años desde 1998, P_i es la cantidad inicial de osos y $P(t)$ es la cantidad de osos al cabo del tiempo.

42. Aproximadamente, ¿cuántos osos habrá en el año 2017?

43. ¿En qué porcentaje se debe haber incrementado el número inicial de osos para el año 2017?

2. Función logarítmica

Actividades

Ampliación multimedia

Una **función logarítmica** es una función de la forma $f(x) = \text{Log}_a\, x$, donde x es la variable, $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$.

Por ejemplo, las funciones $y = \text{Log}_5\, x$ y $f(x) = \text{Log}_3\,(x + 1)$ son funciones logarítmicas.

La función $y = \text{Log}_a\, x$, se lee *y igual al logaritmo en base a de x*, donde el valor de y es el exponente al cual debe elevarse a para obtener x. Por ejemplo, $y = \text{Log}_2\, 16 = 4$ porque $2^4 = 16$.

Las principales características de la función logarítmica $f(x) = \text{Log}_a\, x$ con $a \neq 1$ son:

- El dominio es el intervalo $(0, +\infty)$.
- El rango es el conjunto de los números reales.
- Como $\text{Log}_a\, 1 = 0$, la gráfica intercepta al eje x en el punto $(1, 0)$.
- Como $\text{Log}_a\, a = 1$, la gráfica pasa por el punto $(a, 1)$.
- La función tiene como asíntota al eje y.

Matemáticamente

¿Por qué la función logarítmica $f(x) = \text{Log}_a\, x$ no está definida para $a = 1$?

Recuerda que...

$y = \text{Log}_a\, x$ si y sólo si $a^y = x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

2.1 Representación gráfica de una función logarítmica

Ampliación multimedia

La gráfica de la función logarítmica $f(x) = \text{Log}_a\, x$ es una curva, que se puede analizar teniendo en cuenta dos casos.

Caso 1. El valor de *a* es mayor que 1.

En este caso se cumple que:

- La función $f(x)$ es creciente.
- Cuando x disminuye, el valor de $f(x)$ tiende a infinito negativo.
- Cuando el valor de a disminuye, $f(x)$ crece más rápidamente, si $x > 1$.

Caso 2. El valor de *a* es mayor que 0 y menor que 1.

En este caso se cumple que:

- La función $f(x)$ es decreciente.
- Cuando x disminuye, el valor de $f(x)$ tiende a infinito positivo.
- Cuando el valor de a aumenta, la función $f(x)$ decrece más rápidamente, si $x > 1$.

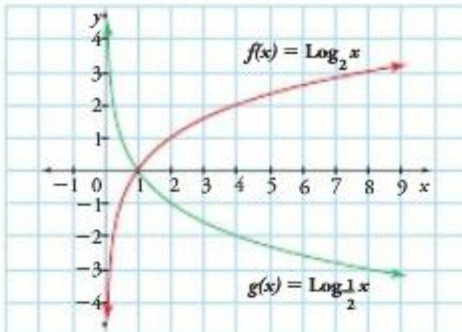
EJEMPLOS

1. Graficar las funciones $f(x) = \text{Log}_2\, x$ y $g(x) = \text{Log}_{\frac{1}{2}}\, x$. Luego, compararlas.

Primero, se construye una tabla de valores, teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{R}^+$.

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$
$f(x)$	-1	0	0,58	1	1,32	1,58	1,8	2	2,17
$g(x)$	1	0	$-0,58$	-1	$-1,32$	$-1,58$	$-1,8$	-2	$-2,17$

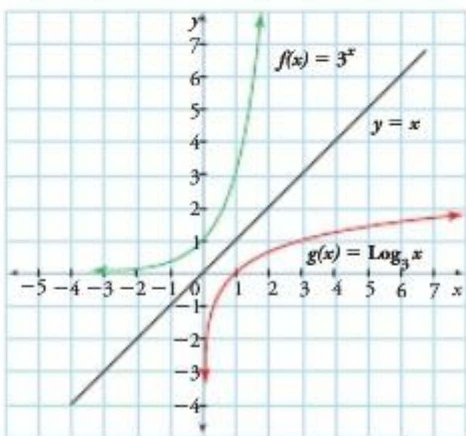
Luego, se ubican los puntos en el plano y se traza la curva que representa cada función.



Finalmente, se tiene que las gráficas son simétricas respecto al eje x y ambas tienen como asíntota al eje y.

Sin embargo, $f(x) = \text{Log}_2\, x$ es creciente y $g(x) = \text{Log}_{\frac{1}{2}}\, x$ es decreciente.

2. **Comparar las gráficas $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \text{Log}_3\, x$.**



Las gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Esto significa que los valores del dominio de f constituyen el rango de g, y viceversa, los valores del dominio de g conforman el rango de f.

Por esto se cumple que los valores correspondientes tanto de f, como de g, están a la misma distancia de la recta $y = x$.

3. **Hallar el dominio y el rango de $g(x) = 4 + \text{Ln}\,(2x - 3)$.**

Como el dominio de una función logarítmica comprende solo valores positivos, se tiene que $2x - 3 > 0$, de donde $x > \frac{3}{2}$.

Por tanto, el dominio de g es el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

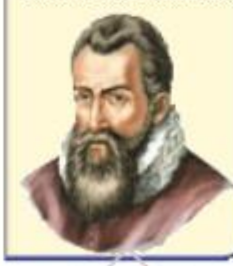
El rango de la función g son todos los números reales.

Se puede concluir que el dominio y el rango de $f(x) = \text{Ln}\,(2x - 3)$ son los mismos que los de $g(x) = 4 + \text{Ln}\,(2x - 3)$.

Historia de las matemáticas

La invención de los algoritmos

Los algoritmos fueron inventados por John Napier (1550-1617) y Henry Briggs (1552-1632), quienes desarrollaron la idea del logaritmo común, la cual se utilizó como herramienta para calcular, hasta la aparición de las calculadoras.



Recurso imprimible

Recuerda que…

La función $f(x) = \text{Ln}\, x$ se conoce como la función logarítmica natural ya que su base es:

$e \approx 2{,}718\ldots$

4. **Una población de bacterias crece según la función $B(t) = 0{,}15\ e^{2t}$, donde t es el tiempo en horas.**

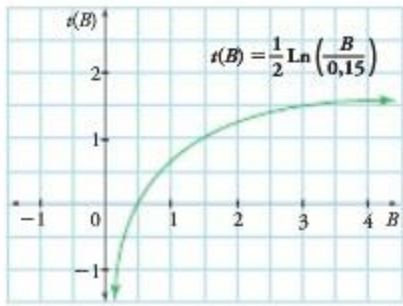
a. **Expresar el tiempo en función de la cantidad de bacterias. Luego, realizar la gráfica.**

Primero, se despeja e^{2t}. Por tanto, $e^{2t} = \frac{B(t)}{0,15}$.

Luego, se expresa en forma logarítmica, teniendo en cuenta que e es la base, Así, se tiene que $\text{Ln}\left(\frac{B(t)}{0,15}\right) = 2t$.

Finalmente, se despeja t con lo cual se obtiene $t(B) = \frac{1}{2}\ \text{Ln}\left(\frac{B}{0,15}\right)$.

Asignando valores a $B(t)$ se obtiene la siguiente gráfica.



b. **Calcular la diferencia entre el tiempo en que hay cerca de 200 bacterias y el tiempo en que hay 100 bacterias.**

Primero, se remplaza cada cantidad de bacterias.

$$t_1 = \frac{1}{2}\ \text{Ln}\left(\frac{100}{0,15}\right) \text{ y } t_2 = \frac{1}{2}\ \text{Ln}\left(\frac{200}{0,15}\right)$$

Luego, se simplifica cada expresión.

$t_1 \approx 3{,}25$ y $t_2 \approx 3{,}6$

Finalmente, se tiene que hay una diferencia aproximada de 0,35 h, es decir, 21 minutos.

Recuerda que...

En la expresión $\text{Log}\ x = y$, se asume que la base del logaritmo es 10.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas respecto a la función $f(x) = \text{Log}_a\ x$.

44. ¿Cuál es el dominio de f?
45. ¿Cuál es el rango de f?
46. ¿Cuándo f es creciente?
47. ¿Cuándo f es decreciente?

Dada una función de la forma $f(x) = a^x$ cuya gráfica pasa por los puntos (2, 25) y (−1, 0,2), determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

48. La gráfica de la función $g(x) = \text{Log}_a\ x$ pasa por el punto (−1, 0,2).
49. La gráfica de $g(x) = \text{Log}_a\ x$ pasa por (25, 2).
50. Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \text{Log}_a\ x$ no tienen puntos en común.
51. Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \text{Log}_a\ x$ solo tienen en común el punto (1, 0).

Escribe en forma logarítmica cada igualdad.

52. $7^2 = 49$
53. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$
54. $x^3 = 4{,}2$
55. $11^2 = b$
56. $3^a = y$
57. $\left(\frac{M}{5}\right)^2 = 120$
58. $e^x = 10$
59. $5e^{2x} = 37$

R **Determina el dominio de las siguientes funciones logarítmicas.**

60. $y = \text{Log}_3 (x + 2)$

61. $f(x) = \text{Log}_5 (x - 5)$

62. $g(x) = \text{Log}_2 (2x - 2)$

63. $h(x) = \text{Log}_7 (3x + 5)$

64. $y = \text{Log}\left(\frac{1}{2}x\right)$

65. $y = 3 + \text{Log}_3 (x + 1)$

66. $f(x) = \text{Log}_3 (1 - x)$

67. $g(x) = \text{Log}_2 (5x + 1)$

68. $h(x) = \text{Log}_5 (x^3 - 1)$

69. $y = \text{Log}\left(\frac{6x + 2}{5}\right)$

E **Grafica las siguientes funciones en hojas milimetradas.**

70. $y = \text{Log}_2 x$

71. $f(x) = \text{Log}_3 x$

72. $h(x) = \text{Log}_{\frac{1}{2}} x$

73. $y = \text{Log}_5 x$

74. $g(x) - -\text{Log}_{\frac{1}{4}} x$

75. $y = 3 + \text{Log}_2 x$

76. $f(x) = 4 - \text{Log}_3 x$

77. $g(x) = \text{Log}_5 (x - 3)$

78. $h(x) = -\text{Log}_{\frac{1}{3}} (x + 2)$

79. $y = 1 - \text{Log}_{\frac{1}{5}} (x - 1)$

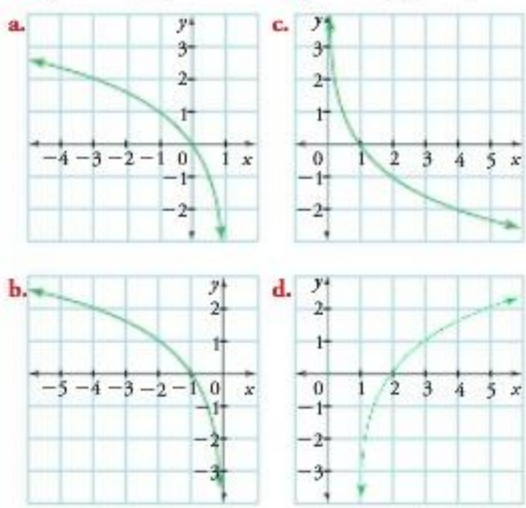
R **Relaciona cada una de las siguientes funciones logarítmicas con la gráfica correspondiente.**

80. $y = \text{Log}_2 (-x)$

81. $y = -\text{Log}_2 x$

82. $y = \text{Log}_2 (x - 1)$

83. $y = \text{Log}_2 (1 - x)$



R **Grafica las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = \text{Log}_3 x$.**

84. $y = \text{Log}_3 (x - 1)$

85. $y = 4 + \text{Log}_3 (x - 1)$

86. $y = -3 - \text{Log}_3 (x + 2)$

87. $y = \text{Log}_3 (x + 2)$

S **Para medir la cantidad de energía liberada por un sismo se utiliza la expresión:**

$$\text{Log } E = 1{,}5M + 11{,}8$$

Donde E es la energía liberada, medida en ergios, y M es la magnitud del sismo, en grados de la escala de Ritcher.

88. Calcula la energía liberada por un sismo de 5 grados en la escala de Ritcher.

89. Realiza la gráfica, en hojas milimetradas, de la magnitud de un sismo en función de la energía liberada.

90. Escribe en forma exponencial la siguiente expresión:

$$\text{Log } E = 1{,}5M + 11{,}8.$$

91. Determina el dominio y el rango de la función $M = \dfrac{\text{Log } E - 11{,}8}{1{,}5}$. Luego, determina si la función es creciente o decreciente.

92. En el 2011 se registró un terremoto en Japón de 9 grados en la escala de Ritcher. Determina la energía liberada por este sismo.

S **Según algunos estudios la cantidad de madera que se produce en un bosque está dada por la expresión:**

$$C(t) = M_0(1 + i)^t$$

Donde C es la cantidad de madera en hectáreas (ha) que habrá a los t años. M_0 la cantidad de madera inicial e i es la tasa de crecimiento anual. Si $i = 0{,}08$ responde:

93. Si inicialmente hay 2 ha de madera, ¿cuántas hectáreas de madera habrá en dos años?

94. ¿Cuál es la expresión que representa la función $t(C)$?

95. ¿Cuántos años tardará en triplicarse la madera del bosque?

96. ¿Cuáles son las características de la gráfica $C(t)$?

97. ¿Cuáles son las características de la gráfica $t(C)$?

98. Si $M_0 = 5$, ¿en cuánto tiempo habrá 20 ha de madera?

2.2 Propiedades de los logaritmos

Actividad | Ampliación multimedia

Si a es un número real positivo diferente de 1 y $x, y \in \mathbb{R}^+$, se cumplen las siguientes propiedades.

Matemática*mente*

Demuestra que $\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right)$ es igual a $\text{Log}_a x - \text{Log}_a y$ para $a, x, y \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$.

Nombre	Expresión
Logaritmo de un producto	$\text{Log}_a (x \cdot y) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$
Logaritmo de un cociente	$\text{Log}_a \left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$
Logaritmo de una potencia	$\text{Log}_a (x^y) = y \, \text{Log}_a x$
Logaritmo de una raíz	$\text{Log}_a \sqrt[n]{x} = \frac{\text{Log}_a x}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 2$
Propiedad del cambio de base	$\text{Log}_a A = \frac{\text{Log}_y A}{\text{Log}_y a}, y \neq 1$

Para demostrar las propiedades de los logaritmos se aplican las propiedades de la potenciación. Por ejemplo, para demostrar la propiedad del **logaritmo de un producto** se realizan los siguientes pasos:

$M = \text{Log}_a x$ — Se igualan M y N a cada logaritmo.

$N = \text{Log}_a y$

$a^M = x$ — Se expresa cada logaritmo en forma exponencial.

$a^N = y$

$a^M \cdot a^N = x \cdot y$ — Se multiplican las partes correspondientes de las igualdades.

$a^{M+N} = x \cdot y$ — Se aplica el producto de potencias de igual base.

$\text{Log}_a (x \cdot y) = M + N$ — Se expresa en forma logarítmica.

Por tanto, al remplazar M y N se prueba que $\text{Log}_a (x \cdot y) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$.

EJEMPLOS

1. Calcular el valor de $\text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{125}{64}\right)$.

$\text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{125}{64}\right) = \text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{5^3}{4^3}\right)$ — Se expresa cada número como potencia.

$= \text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{5}{4}\right)^3$ — Se aplica la potencia de un cociente.

$= 3\,\text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{5}{4}\right)$ — Se aplica logaritmo de una potencia.

$= 3\,\text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ — Se calcula el logaritmo.

$= 3(-1) = -3$ — Se multiplica.

Luego, $\text{Log}_{\frac{4}{5}} \left(\frac{125}{64}\right) = -3$.

2. Escribir la siguiente expresión en términos de Log x, Log y y Log z.

$$\text{Log}\,\frac{xy^2}{z}$$

$\text{Log}\,\frac{xy^2}{z} = \text{Log}\,(xy^2) - \text{Log}\,z$ — Se aplica logaritmo de un cociente.

$= \text{Log}\,x + \text{Log}\,y^2 - \text{Log}\,z$ — Se aplica logaritmo de un producto.

$= \text{Log}\,x + 2\,\text{Log}\,y - \text{Log}\,z$ — Se aplica logaritmo de una potencia.

Luego, $\text{Log}\,\frac{xy^2}{z} - \text{Log}\,x + 2\,\text{Log}\,y - \text{Log}\,z$

Esto se cumple para $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$.

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

99. $\text{Log}_b MN = \text{Log}_b M + \text{Log}_b N$

100. $\text{Log}_b\left(\frac{M}{N}\right) = \text{Log}_b M \div \text{Log}_b N$

101. $(\text{Log}_b M)^N = \text{Log}_b M^N$

102. $\text{Log}_b M^N = N\,\text{Log}_b M$

103. $\text{Log}_b M = \frac{\text{Log}_N M}{\text{Log}_N b}$

104. $\text{Log}_b M = \frac{\text{Log}\, b}{\text{Log}\, M}$

Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar cada una de las siguientes expresiones.

105. $\text{Log}_b (2x)$

106. $\text{Log}_b\left(\frac{x}{3}\right)$

107. $\text{Log}_b\left(\frac{mn}{4}\right)$

108. $\text{Log}_b\left(\frac{x\sqrt{y}}{z}\right)^3$

109. $\text{Log}_b\left(\frac{a^3c^4}{\sqrt{a}}\right)^2$

110. $\text{Log}_b(\sqrt[4]{x}\sqrt{y})$

111. $\text{Log}_b (m^3n^2p^5)$

112. $\text{Log}_b\left(\frac{x^4y^3}{\sqrt{z}}\right)$

113. $\text{Log}_b\left(\sqrt{\frac{ac^2d^3}{m}}\right)$

114. $\text{Log}_b\left(\sqrt{\frac{m^3\sqrt{n}}{p^5\sqrt{m^3}}}\right)$

Escribe como logaritmo de una sola expresión.

115. $\text{Log}_2 5 + \text{Log}_2 3$

116. $\text{Log}_b x - \text{Log}_b y$

117. $\text{Ln}\,(2x + 1) + \text{Ln}\,(x + 2)$

118. $5(\text{Log}\, xy + \text{Log}\, z)$

119. $\frac{1}{2}\text{Ln}\, 8 - \text{Ln}(3\sqrt{2})$

120. $\text{Log}_b x + \text{Log}_b 3 + \text{Log}_b y^2 - \text{Log}_b 5$

121. $\text{Log}\, a + \text{Log}\, b + \text{Log}\frac{1}{10} - \text{Log}\, 5$

122. $\frac{1}{2}\,\text{Ln}\, x - \frac{2}{3}\,\text{Ln}\, y - \frac{1}{4}\,\text{Ln}\, z$

123. $2\,\text{Log}_a x^2y + 3\,\text{Log}_a xy - \frac{1}{4}\,\text{Log}_a xy^2$

124. $\frac{1}{5}\text{Log}\, mn + \text{Log}\, m^2 n - \frac{1}{10}\,\text{Log}\, mn$

Calcula el valor aproximado de los siguientes logaritmos, teniendo en cuenta que $\text{Log}\ 2 \approx 0{,}3$ y $\text{Log}\ 5 \approx 0{,}7$.

125. $\text{Log}_5 (2)$

126. $\text{Log}_2 (5)$

127. $\text{Log}_2 (10)$

128. $\text{Log}\left(\frac{2}{5}\right)$

129. $\text{Log}_5\left(\frac{5}{2}\right)$

130. $\text{Log}_5 (200)$

131. $\text{Log}_2 (625)$

132. $\text{Log}_5 (1.024)$

133. $\text{Log}_2\left(\frac{1}{100}\right)$

134. $\text{Log}_5\left(\frac{2}{3.125}\right)$

Demuestra las siguientes igualdades.

135. $\text{Log}_a (x^y) = y\,\text{Log}_a x$

136. $a = b^{\text{Log}_b a}$

137. $\text{Log}_{25} (xy) = \frac{1}{2}\,\text{Log}_5 (xy)$

138. $(\text{Log}_a b)(\text{Log}_b c)(\text{Log}_c d) \ldots (\text{Log}_n a) = 1$ con $a, b, c,\ldots n \in \mathbb{R}^+$ y diferentes de 1.

Resuelve.

139. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\text{Log}\left(\frac{ab}{3}\right) = \frac{1}{2}(\text{Log}\, a + \text{Log}\, b)$$

Calcula el valor de $5ab$.

140. Si $\text{Log}\sqrt[3]{a} = p$, calcula $\text{Log}\, a^{\frac{3}{5}}$ en función de p.

141. Halla el valor de $(\text{Log}_2 4) \cdot (\text{Log}_4 8)$.

El nivel de presión del sonido está dado por la expresión:

$$N = 20\,\text{Log}\left(\frac{p}{2 \times 10^{-4}}\right)$$

Donde p es la presión del sonido en dinas/cm².

142. Demuestra que el nivel de presión del sonido se puede expresar como

$$N = 20\left(\text{Log}\frac{p}{2} + 4\right)$$

143. Si $p = 5 \times 10^{-4}$ dinas/cm², ¿cuál es el nivel de presión sonora?

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Recurso imprimible · Enlace web

Una ecuación es exponencial o logarítmica según la ubicación de la incógnita. Si la incógnita está en el exponente de las expresiones que conforman la ecuación, es una ecuación exponencial. En cambio, si la incógnita está en un logaritmo, es una ecuación logarítmica.

3.1 Ecuaciones logarítmicas

Para resolver una ecuación logarítmica se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se despeja el término logarítmico.
- **Luego,** se escribe la ecuación en forma exponencial.
- **Finalmente,** se despeja la variable.

Por ejemplo, para resolver $\text{Log}\, x + \text{Log}\,(x + 9) = 1$ se realizan los siguientes pasos:

$\text{Log}\, x + \text{Log}\,(x + 9) = 1$

$\text{Log}\, x\,(x + 9) = 1$	Se aplica el logaritmo de un producto.
$\text{Log}\,(x^2 + 9x) = 1$	Se multiplica.
$x^2 + 9x = 10^1$	Se expresa de forma exponencial.
$x^2 + 9x - 10 = 0$	Se iguala a cero.
$(x - 1)(x + 10) = 0$	Se factoriza.
$x = 1$ o $x = -10$	Se escriben las posibles soluciones.

La solución $x = -10$ se descarta, ya que $\text{Log}\,(-10)$ no está definido.

Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Un sistema de ecuaciones logarítmicas es un conjunto de ecuaciones con n incógnitas, en las que aparecen logaritmos. Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se expresa cada ecuación en forma exponencial y se aplican los métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones. $\begin{cases} \textbf{Log}_5\, x - \textbf{Log}_5\, y = 1 \\ \textbf{Log}\, x + \textbf{Log}\, y^2 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Log}_5 \dfrac{x}{y} = 1 \\ \text{Log}\, xy^2 = 4 \end{cases}$ Se aplican las propiedades de los logaritmos.

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5 \\ xy^2 = 10.000 \end{cases}$ Se expresa cada ecuación en forma exponencial.

$\{5y^3 = 10.000$ Se sustituye $x = 5y$ en la segunda ecuación.

Al resolver la ecuación $5y^3 = 10.000$ se obtiene que $y = 10\sqrt[3]{2}$. Si se remplaza el valor de y en cualquiera de las ecuaciones se obtiene que el valor de x es $50\sqrt[3]{2}$.

Recuerda que...

Al resolver sistemas de ecuaciones pueden aparecer soluciones extrañas. Por esto, es importante verificar las soluciones en las ecuaciones originales.

3.2 Ecuaciones exponenciales

Para resolver una ecuación exponencial se deben tener en cuenta los siguientes casos.

Caso 1. La ecuación se puede plantear como una igualdad entre potencias de la misma base.

En este caso se aplica la siguiente propiedad de la potenciación.

Si $a^y = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, $x = y$.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $2^{4x+3} = 512$ se realizan los siguientes pasos:

$2^{4x+3} = 512$

$2^{4x+3} = 2^9$ Se expresa 512 como una potencia de 2.

$4x + 3 = 9$ Se aplican las propiedades de la potenciación.

$4x = 6$ Se resta 3.

$x = \frac{3}{2}$ Se divide entre 4 y se simplifica.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = \frac{3}{2}$.

Caso 2. La ecuación incluye potencias de diferente base.

En este caso se aplica la siguiente propiedad de los logaritmos.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Si $x = y$, entonces, $\text{Log}_b\, x = \text{Log}_b\, y$

Por ejemplo, para resolver la ecuación $5^{3x+9} = 8$ se realizan los siguientes pasos:

$5^{3x+9} = 8$

$\text{Ln}\,(5^{3x+9}) = \text{Ln}\,(8)$ Se aplican las propiedades de los logaritmos.

$\text{Ln}\,(5^{3x+9}) = \text{Ln}\,(2^3)$ Se expresa 8 como potencia de 2.

$(3x + 9)\,\text{Ln}\,5 = 3\,\text{Ln}\,2$ Se aplica el logaritmo de una potencia.

$3x\,\text{Ln}\,5 + 9\,\text{Ln}\,5 = 3\,\text{Ln}\,2$ Se aplica la propiedad distributiva.

$3x\,\text{Ln}\,5 = 3\,\text{Ln}\,2 - 9\,\text{Ln}\,5$ Se despeja $3x$ Ln 5.

$x = \dfrac{3\,\text{Ln}\,2 - 9\,\text{Ln}\,5}{3\,\text{Ln}\,5}$ Se despeja x.

Por tanto, $x \approx -2{,}57$.

Matemática*mente*

¿Cómo se puede hallar la solución de la ecuación $e^x + x = 3$ gráficamente?

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $\left(\frac{1}{3}\right)(3^{2x-1}) = 9$.

$\left(\frac{1}{3}\right)(3^{2x-1}) - 9$

$(3^{-1})(3^{2x-1}) = 3^2$ Se expresan $\frac{1}{3}$ y 9 como potencias de 3.

$3^{2x-2} = 3^2$ Se aplica el producto de potencias de igual base.

$2x - 2 = 2$ Se aplican las propiedades de la potenciación.

$x - 1 = 1$ Se divide entre 2 ambos lados de la igualdad.

$x = 2$ Se suma 1.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = 2$.

2. **La población de un país, en millones, dentro de t años está dada por la función**

$$p(t) = (3)\left(4^{\frac{3}{4}t}\right)$$

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población del país sea de 50 millones de habitantes?

$50 = (3)\left(4^{\frac{3}{4}t}\right)$ — Se plantea la ecuación exponencial.

$\text{Ln}\,(50) = \text{Ln}\left[(3)\left(4^{\frac{3}{4}t}\right)\right]$ — Se aplican las propiedades de los logaritmos.

$\text{Ln}\,(50) = \text{Ln}\,(3) + \text{Ln}\left(4^{\frac{3}{4}t}\right)$ — Se aplica logaritmo de un producto.

$\text{Ln}\,(50) = \text{Ln}\,(3) + \left(\frac{3}{4}t\right)\text{Ln}\,(4)$ — Se aplica logaritmo de una potencia.

$t = \dfrac{\text{Ln}\,50 - \text{Ln}\,3}{\frac{3}{4}\,\text{Ln}\,4}$ — Se despeja t.

Como $t \approx 2{,}705$, se concluye que deben transcurrir entre 2 y 3 años para que la población del país sea de 50 millones de habitantes.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

144. ¿Qué es una ecuación exponencial?

145. ¿Qué es una ecuación logarítmica?

146. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial?

147. ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica?

Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son exponenciales.

148. $3^x = 15$

149. $x^2 + 3x = 12$

150. $6^{2x-1} = 10$

151. $3e^{x+1} = 54$

152. $5x + 12 = x^3$

153. $10 + e = \text{Ln}\,x$

Halla el valor de m en cada uno de los siguientes logaritmos.

154. $\text{Log}_m\,625 = 4$

155. $\text{Log}_3\,27 = m$

156. $\text{Log}_5\,m = 125$

157. $\text{Log}_m\,144 = 2$

158. $\text{Log}_2\,32 = m$

159. $\text{Log}_4\,m = 3$

160. $\text{Log}_m\,256 = m$

161. $\text{Log}_m\,1.024 = 10$

162. $\text{Log}_6\,m = 4$

163. $\text{Log}_m\,343 = 3$

164. $\text{Log}_{11}\,14.641 = m$

165. $\text{Log}_m\,3.125 = m$

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

166. $\text{Log}\,(x - 9) + \text{Log}\,(50x) = 3$

167. $2\,\text{Log}\,(x - 1) = 0$

168. $\text{Log}_2\,x^2 + 3\,\text{Log}_2\,x = 10$

169. $\text{Log}_2\,(x + 1) + \text{Log}_2\,(x - 1) = \text{Log}_2\,8$

170. $\text{Ln}\,x^3 - \text{Ln}\sqrt{x} = \frac{5}{2}$

171. $\text{Log}\,(x + 4) = \text{Log}\,(2x - 1)$

172. $\text{Log}\,x + \text{Log}\,(x - 1) = \text{Log}\,(x - 2)$

173. $2\,\text{Log}_5\,(x + 1) - \text{Log}_5\,(x - 1) = 1$

174. $\text{Log}_2\,x + \text{Log}_4\,x + \text{Log}_{16}\,x = 7$

175. $\text{Log}_{\frac{1}{3}}\,x + 2\,\text{Log}_3\,x + \text{Log}_9\,(2x) - \frac{1}{2}$

176. $3\,\text{Ln}\,x - \text{Ln}\,x - \text{Ln}\,9 = 0$

177. $\text{Log}_4\,(\text{Log}_3\,(\text{Log}_2\,x)) = 0$

178. $\text{Log}_3\sqrt{x^2 + 17} = 2$

179. $\text{Log}_6\,(2x) - \text{Log}_6\,(x + 1) = 0$

180. $\text{Log}\,x^2 + (\text{Log}\,x)^2 = 3$

181. $\text{Log}\,x^3 - \dfrac{12}{\text{Log}\,x} = 5$

E **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.**

182. $\begin{cases} \text{Log}\, x + \text{Log}\,(y + 3) - \text{Log}\, 6 \\ \text{Log}\,(x + 7) - \text{Log}\,(y + 2) = 1 \end{cases}$

183. $\begin{cases} \text{Log}\, x + \text{Log}\, y = \text{Log}\, 3 \\ \text{Log}\, x + \text{Log}\, y = 1 \end{cases}$

184. $\begin{cases} \text{Log}_5\, x^2 + \text{Log}_5\, y - 1 \\ \text{Log}_5\, x + \text{Log}_5\, y = 2 \end{cases}$

185. $\begin{cases} \text{Log}_3\, 3x - \text{Log}_3\, y = 15 \\ \text{Log}_5\, 4x - \text{Log}_5\, 2y = 18 \end{cases}$

186. $\begin{cases} \text{Log}_{\frac{1}{3}}\, x^3 + \text{Log}_{\frac{1}{3}}\, y^6 = 3 \\ \text{Log}_{\frac{1}{5}}\, x^5 + \text{Log}_{\frac{1}{5}}\, y^{10} = 2 \end{cases}$

E **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.**

187. $2^{x-2} = 4$

188. $8^{3x-1} = 32^x$

189. $81^{x^2-1} = 27$

190. $(8^{-3x})(2^{x+1}) = 4^{x+2}$

191. $(64^{x^2+2x})(16^{x-5}) = 1$

192. $2^{x^2+x} = 1.024$

193. $(3^x)(3^{2x+1})(3^{x+5}) = 243$

194. $5^{x-2} + 5^x + 5^{x+1} = 30$

195. $3^{2x} + 3^x - 12 = 0$

196. $m^{-\frac{x}{4}+4} = 4^{x-2}$

197. $a^{3x+\frac{1}{5}} = c^{\frac{3}{7}x+1}$

198. $m^{x+2} - n^{3x-4} = 0$

199. $3^{3x+1} = 9(2^{x+3})$

200. $4(2^{x+1}) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$

201. $3^{x+5} - 3^{x+2} + 3^x = 506$

202. $2^{2(x+3)} + 2^{2(5+x)} = 3.264$

203. $0{,}125^{2(x+1)} - 0{,}25^{3(x+2)} = 189$

204. $1{,}21^{5(x+1)} + 1{,}1^{10(x+1)} = \frac{11}{10}$

R **Resuelve.**

205. Halla el valor de $f(10)$ teniendo en cuenta que $f(x) = 30 - ae^{-kx}$; $f(0) = 10$ y $f(3) = 20$.

206. Determina la relación entre a y b si se cumple que $\text{Log}\, a + \text{Log}\, b = 0$.

207. Demuestra o refuta la siguiente igualdad:

$\text{Log}_a\, x + \text{Log}_b\, x = \text{Log}_{ab}\, x$

Para x y $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \cdot b \neq 1$.

S **Se dispone de 500 miligramos de carbono-14 de un organismo muerto. Si la cantidad que queda después de x años está dada por $P(x) = 500\, e^{-0{,}000115x}$ miligramos :**

208. Expresa x en términos de P.

209. Determina el dominio y el rango de la función que resulta al expresar x en términos de P.

210. Calcula la cantidad de carbono-14 que es posible encontrar después de 1.000 años.

211. Determina cuántos años deben transcurrir para que solo sea posible encontrar un miligramo de carbono-14 en el organismo muerto.

212. Halla el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de carbono-14 se reduzca a la mitad.

S **Algunos médicos utilizan la siguiente fórmula empírica para calcular el área de la superficie del cuerpo a (en metros cuadrados), a partir de su masa m (en kilogramos) y de su estatura h (en centímetros).**

$\text{Log}\, a = -2{,}144 + 0{,}425\, \text{Log}\, m + 0{,}725\, \text{Log}\, h$

213. Calcula el área aproximada de la superficie del cuerpo de un hombre cuya masa es de 70 kg y cuya estatura es 175 cm.

214. Calcula el área aproximada de la superficie del cuerpo de una mujer cuya masa es de 60 kg y cuya estatura es 1,6 m.

215. Halla la estatura aproximada de una persona, si el área de la superficie de su cuerpo es 2 m² y su masa es de 80 kg.

La expresión $y = \dfrac{Pe^{kt}}{1 + e^{kt}}$ indica la cantidad de infectados y en una ciudad que tiene p número de habitantes, en un tiempo de t días desde el inicio de la epidemia.

216. Expresa t en función del número de infectados.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Función exponencial

Grafica, en tu cuaderno, las siguientes funciones exponenciales. Luego, indica el dominio, el rango y las intersecciones con los ejes.

217. $f(x) = 5^{-x}$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

218. $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

219. $g(x) = 2^{x^2}$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

220. $h(x) = e^x + 1$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

221. $y = 3^{x+2} - 9$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

222. $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

223. $g(x) = 5^{x+2} - 9$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

224. $h(x) = 3^x + 3^{-x}$

Dominio: ____________________

Rango: ____________________

Intersección con los ejes: ____________________

Realiza, en tu cuaderno, un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de $h(x) = 3^x$.

225. $f(x) = 3^{-x} - 3$

226. $f(x) = \frac{1}{3^x} + 2$

227. $f(x) = 3^{x-2} - 1$

228. $y = 3^{x-5} + 4$

229. $y = 3(3^{-x-1} + 1)$

230. $y = (3^{2x-1})^{\frac{1}{2}}$

Función logarítmica

Determina el dominio de las siguientes funciones logarítmicas.

231. $f(x) = \text{Log}_2\,(x - 3)$

Dominio: ____________________

232. $f(x) = \text{Log}_5\,(5x + 1)$

Dominio: ____________________

233. $f(x) = \text{Log}_3\left(\frac{3x + 2}{4}\right)$

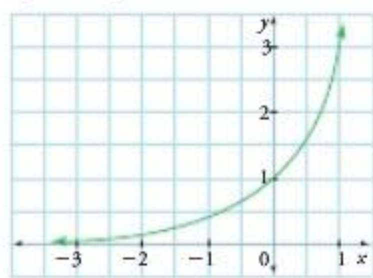
Dominio: ____________________

234. $f(x) = \text{Log}\left(\frac{5x + 7}{2}\right)$

Dominio: ____________________

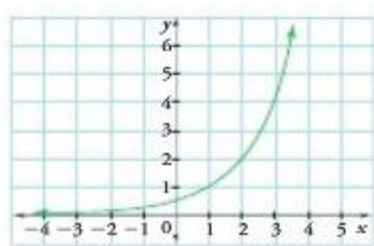
Escribe la función que corresponde a cada una de las siguientes gráficas.

235.



____

236.



____

Escribe como el logaritmo de una sola expresión.

237. $\text{Log}_a\, m - \text{Log}_a\, n - \text{Log}_a\, p$

238. $\text{Log}_b\, x - 2\,\text{Log}_b\, y$

239. $\frac{1}{2}\text{Log}_b\, s + 3\,\text{Log}_b\, t$

240. $\frac{1}{2}\,\text{Log}_a\, p + \frac{1}{3}\,\text{Log}_a\, q - 3\,\text{Log}_a\, r$

241. $\text{Log}_b\, 6 + \text{Log}_b\, a - \frac{1}{3}\,\text{Log}_b\, 2$

Desarrolla cada logaritmo.

242. $\text{Log}_b\, m^2 n^3 p^4$

243. $\text{Log}_a \frac{xy^3}{\sqrt{cd^3}}$

244. $\text{Log}_a \frac{(x + y)^2}{\sqrt[3]{z}}$

245. $\text{Log}\, m^3 \sqrt{pr^3}$

246. $\text{Log}_b \frac{ab^3}{c\sqrt[5]{d^2}}$

247. $\text{Log}_a \sqrt{\frac{\sqrt{a}\, b}{n^2}}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

248. $3^{2x} = 5^{x-1}$

249. $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 27$

250. $\text{Log}_5\,(x + 2) + \text{Log}_5\,(x - 2) = \text{Log}_5\,(2x - 1)$

251. $(3^{x^2})(5^{x^2}) = 15^{4x+5}$

252. $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$

253. $25\,\text{Log}_x\, x + \text{Log}\, x = 4$

254. $\text{Log}\, 3^x + \text{Log}\, 4^{2x} = 6$

255. $\text{Ln}\,(x + 1) + \text{Ln}\,(x - 1) = \text{Ln}\,(4x - 4)$

256. $x^{\text{Ln}\, x - 4} = e^2\, x$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Algunos estudios concluyen que si una persona en una zona urbana se enferma de gripe, el número de personas que se habrán contagiado al cabo de *t* días será aproximadamente de:

$$N(t) = \frac{10.000e^t}{e^t + 10.000}$$

¿Cuántas personas contagiadas habrá al cabo de 4 días?

¿Cuántas personas contagiadas habrá al cabo de 10 días?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántas personas contagiadas habrá al cabo de 4 días?

¿Cuántas personas contagiadas habrá al cabo de 10 días?

¿Cuáles son los datos del problema?

El número de personas que se han contagiado al cabo de *t* días será aproximadamente

$$N(t) = \frac{10.000\, e^t}{e^t + 10.000}$$

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determina qué relación tienen los días y a qué variable equivalen dentro de la fórmula.

Los días corresponden a la variable *t*. Por ello, se remplazan 4 y 10 en la fórmula.

$$N(t) = \frac{10.000\, e^t}{e^t + 10.000}$$

Segundo, se calcula la cantidad de personas contagiadas al cabo de 4 días.

$$N(4) = \frac{10.000\, e^4}{e^4 + 10.000} = 54,3 \cong 54$$

Finalmente, se calcula la cantidad de personas contagiadas al cabo de 10 días.

$$N(10) = \frac{10.000\, e^{10}}{e^{10} + 10.000} = 6.877,58 \cong 6.878$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones son correctas. Luego, se tiene que la cantidad aproximada de personas contagiadas al cabo de 4 días es 54 y al cabo de 10 días es 6.878.

La población de un continente está dada por la relación:

$$P(t) = 10\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

257. Si t se mide en años, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que la población del continente se triplique?

Resuelve las actividades 258 a 262 de acuerdo con la siguiente información.

El nivel de decibeles del sonido (dB) se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$D = 10 \text{ Log } (I \cdot 10^{12})$$

Donde I corresponde a la intensidad del sonido medido en $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

258. Si se duplica la intensidad del sonido, ¿cómo cambia el nivel de decibeles del sonido?

259. El umbral auditivo es la mínima intensidad de sonido que una persona puede oír, y corresponde a 10^{-12}. Demuestra que el nivel de decibeles del umbral auditivo es cero.

260. Un amplificador tiene 1.000 $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ de salida. ¿A qué intensidad de decibeles corresponde esta intensidad?

261. Completa la siguiente tabla.

Fuente	Intensidad	Decibeles
Susurro	10^{-10}	
Tráfico callejero		70
Posible daño auditivo	$10^{-3,5}$	
Umbral del dolor		130
Concierto de rock	10	

262. Halla una expresión para calcular I en función de D.

Responde las preguntas 263 y 264 de acuerdo con la siguiente información.

La ecuación $I = -\frac{E}{R}\left(1 - e^{\left(\frac{R}{L}\right)^{-t}}\right)$, en donde t es el tiempo en segundos, es utilizada en el estudio de algunos circuitos eléctricos. Si $E = 10$ voltios, $R = 12$ ohmios y $L = 7$ henrios, responde:

263. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para alcanzar una corriente de $I = 0,9$ amperios?

264. ¿Cuánto tiempo se necesita para alcanzar una corriente de $I = 0,55$ amperios?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para saber por qué no se debe conducir cuando se ha ingerido alcohol.

Uno de los problemas más recurrentes en las vías del país es la accidentalidad, debido a que los conductores ingieren bebidas alcohólicas antes de conducir. Para contrarrestar este suceso diariamente la policía de tránsito hace retenes con el fin de controlar que se cumpla el Código de tránsito. Este código sanciona a los infractores que conducen en estado de embriaguez.

El Código de tránsito de Colombia incluye sanciones de acuerdo con el nivel de alcohol en la sangre que tenga el conductor en el momento de ser descubierto manejando en este estado.

En la siguiente tabla se muestra el estado de embriaguez de una persona según la cantidad en gramos de etanol por cada litro de sangre.

Estado de embriaguez	Concentración en la sangre (g/L)
Negativo	Menor a 0,4
Primer grado	Entre 0,4 y 0,99
Segundo grado	Entre 1 y 1,49
Tercer grado	Mayor a 1,5

Por ejemplo, una persona que infrinja la ley con tercer grado de embriaguez se le puede sancionar restringiendo su licencia de conducción de dos a diez años y obligándola a realizar trabajo social por cuarenta horas. Si infringe nuevamente la ley le será retirada la licencia de conducción de por vida.

Existe una relación que permite determinar el porcentaje de riesgo de tener un accidente automovilístico por ingerir alcohol. Esta relación se puede modelar con la expresión:

$$R = 6e^{kx}$$

Donde R es el porcentaje de riesgo de tener un accidente, k es una constante que depende del estado físico de la persona y x es la concentración de alcohol en la sangre.

1. **Responde, ¿qué sanción puede tener una persona que conduce con un grado tres de embriaguez?**
2. **De la expresión para el riesgo R, deduce las expresiones algebraicas para la concentración y la constante k.**
3. **Si para una concentración de alcohol de 0,4 g/L existe una posibilidad de accidentalidad del 10%:**
   a. Determina qué valor toma la constante k.
   b. Teniendo en cuenta el valor de la constante k hallado en el literal anterior, ¿cuál es el porcentaje de riesgo de accidente para una persona con una concentración de alcohol de 2 g/L?
4. **Realiza una mesa redonda con tus compañeros y discute con ellos a partir de datos numéricos, ¿por qué las personas no deben ingerir bebidas alcohólicas cuando van a manejar?**
5. **Averigua la sanción que tiene una persona que es sorprendida manejando con segundo grado de embriaguez.**

... También sirve para saber el tiempo de defunción de una persona.

La relación que permite establecer la temperatura del cuerpo de una persona que ha fallecido, cuando ha interactuado con un medio por un tiempo determinado se puede expresar mediante una ley denominada **ley de enfriamiento de Newton**.

Esta ley dice que *la rapidez con que un cuerpo se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea.*

El modelo matemático de esta ley se expresa por:

$$T(t) = T_0 + \Delta \cdot e^{-kt}.$$

Donde $k > 0$ es una constante y Δ es la diferencia de temperatura entre el estado inicial y el medio ambiente T_0.

La ley de enfriamiento de Newton es de gran utilidad en la medicina forense, porque permite conocer el tiempo de muerte de una persona.

Lee el siguiente caso.

La policía llegó al lugar de los hechos a las 10:00 a. m., la temperatura del cuerpo a esa hora era de 29 °C y la temperatura del lugar donde se encontró el cuerpo era de 23 °C. Una hora y media después, la temperatura del cuerpo bajó a 27 °C.

Para determinar la hora del crimen se utilizó la expresión dada por Newton, así:

$T_0 = 23$ °C y $\Delta = 29$ °C $- 23$ °C $= 6$ °C.

Como la temperatura del cadáver era de 27 °C a las 11:30 a. m. se tiene que $T(1{,}5) = 27$.

Para determinar k se utiliza la expresión anterior y los valores hallados.

Así: $27 = 23 + 6 \cdot e^{-k(1{,}5)}$,

entonces, $k = -0{,}27031007$.

Por tanto, $T(t) = 23 + 6 \cdot e^{-0{,}27031007t}$.

Teniendo en cuenta que la temperatura normal del cuerpo humano es 36,5 °C, se obtiene:

$$36{,}5 = 23 + 6 \cdot e^{-0{,}27031007t}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene $t = -3$, con lo que se puede concluir que el crimen se cometió 3 horas antes, es decir, a las 7 de la mañana.

1. **Calcula la constante de proporcionalidad para un cuerpo, cuya temperatura corporal se redujo en 3,2 °C durante las primeras 4 horas de su fallecimiento en un recinto que se encuentra a una temperatura de 20 °C.**
2. **Si se encuentra un cadáver en una habitación cuya temperatura es de 20 °C, se mide su temperatura y se encuentra que es de 28 °C, ¿hace cuánto tiempo falleció?**

Las imágenes infrarrojas muestran información térmica del cuerpo humano, en tiempo real y en una fracción de segundo.

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: graficar una función exponencial. Luego, utilizar el programa para graficar otras funciones exponenciales y analizar cómo cambia la gráfica que las representa.

Descripción: representar una función exponencial particular y después otras funciones exponenciales para encontrar generalidades y conclusiones acerca de su representación.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en www.microsoftmathematics.com

1. Haz clic en **Inicio, Programas** y, luego, en **Microsoft Mathematics**. Te aparecerá una ventana como la siguiente.

2. Haz clic en la opción **Gráficas**.

3. Haz clic en la opción **Ecuaciones y funciones**. Luego, doble clic sobre el cuadro 1.

4. Digita la función $y = 2^x$ en el cuadro 1. Luego, haz clic en **Entrar**.

5. Haz clic en la opción **Gráficas**, para obtener la gráfica de la función.

6. Observa las coordenadas de cada punto. Para ello, haz clic en ▶ frente a la opción **Trazar**, que está en los **Controles de gráfica**.

7. Grafica las siguientes funciones. Observa las gráficas y establece relaciones entre ellas.

$$y = 3^x, y = 3^{x+1}, y = 3^x + 1$$

Trabaja con WIRIS

Objetivo: comprender los conceptos relacionados con la matemática financiera.

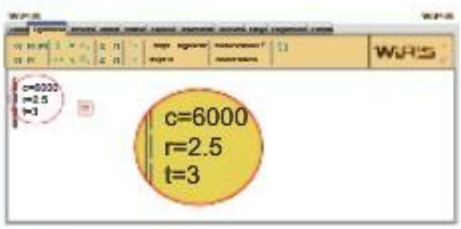
Descripción: calcular el interés compuesto de un capital de ahorro o inversión, determinar el plazo de una inversión y determinar una tasa de interés en WIRIS.

Para acceder a WIRIS, ingresa y trabaja en línea en: herramientas.educa.madrid.org/wiris o www.wiris.net/santillana.cl/wiris/es/index.html

1. Activa la opción **Operaciones** en el menú, como se muestra en la ilustración.

2. Para calcular el capital final y el interés obtenido por ahorrar \$6.000 millones en un CDT, a 3 años con un interés compuesto del 4% anual, se ingresan primero los datos que intervienen en el cálculo:

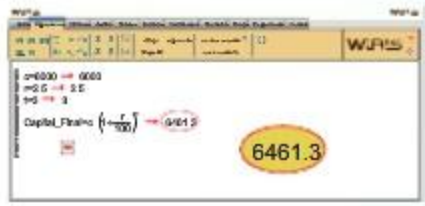
   c = capital, r = tasa de interés y t = tiempo, se escribe cada variable, su respectivo valor y se da **Intro** así:



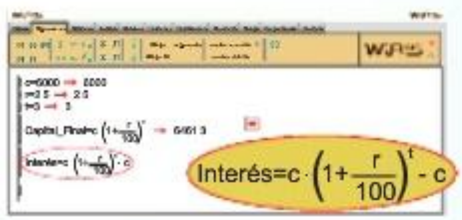
3. Identifica las herramientas para escribir exponentes y fracciones, como se muestra en la figura.

4. Escribe la fórmula de capital del interés compuesto.

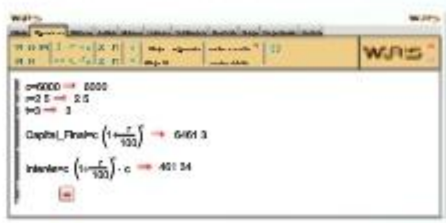
5. Da clic en ▤ y aparecerán los datos introducidos y el valor del capital final a interés compuesto al lado de la fórmula.



6. Ubica el cursor antes del último resultado y pulsa **Intro**. Luego, escribe la fórmula para el interés.



7. Da clic en ▤ y aparecerá el resultado del interés obtenido en 3 años.



8. Determina, en cada caso, el capital final después de invertir un capital c, durante t años, a una tasa de interés compuesto, r, anual o mensual.

   a. $c = 120.000.000$, $r = 5{,}8\%$ anual y $t = 5$ años.

   b. $c = 3.500.000$, $r = 2{,}75\%$ anual y $t = 12$ años.

   c. $c = 48.000.000$, $r = 2{,}24\%$ mensual y $t = 60$ meses.

7 Sucesiones y series

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender el concepto de **sucesión** y hallar el término n-ésimo de una sucesión.
- Identificar **progresiones aritméticas** y **progresiones geométricas**.
- Encontrar la suma de los términos de una **progresión aritmética**.
- Resolver **problemas de aplicación**, relacionados con progresiones.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

4 Multimedia **1** Audios

1 Galerías **3** Imprimibles

4 Actividades **4** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Observa cada secuencia. Luego, dibuja la figura que sigue.

a. 

b. 

c. 

d. 

2. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones.

a. $\frac{4}{5}c - \frac{1}{3}$ para $c = -\frac{2}{3}$.

b. $\frac{n^2 - n}{3n + 1}$ para $n = 1$.

c. $A = \frac{b \times h}{2}$ para $b = 4$ cm, $h = 6$ cm.

d. $a^2 + b^2 = c^2$ para $b = 0{,}4$ cm, $a = 0{,}3$ cm.

Cronología de las sucesiones y series

Babilonia. Inician las nociones de economía del interés compuesto y se presume que este era calculado partiendo de progresiones geométricas.

Grecia. En su libro *IX de los elementos*, Euclides expone una fórmula para sumar los *n* elementos de una progresión geométrica.

India. En el libro *Lilavati*, Bhaskara plantea diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

India. El matemático de origen indio, Pingala investiga los patrones rítmicos construidos con sílabas o notas de uno o dos pulsos, para generar progresiones.

Italia. Leonardo de Pisa plantea una de las series más populares llamada la serie de Fibonacci.

Inglaterra. Nicolás Mercator y Guillermo Brunekor descubren una serie infinita para el logaritmo cuando se encontraban calculando el área de una sección hiperbólica.

Suiza. Leonard Euler utiliza las series infinitas como concepto unificador de diferentes ramas de la matemática.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber cómo fabrican las antenas de los celulares de última tecnología.

La tecnología de los medios de comunicación utiliza cada vez más y en mayor escala, los conocimientos matemáticos. Eso se puede ver, por ejemplo, en el diseño de las antenas fractales de los teléfonos celulares.

Una **antena fractal** es un objeto que, como dice su nombre, tiene forma fractal y se utiliza como antena receptora de las señales en los equipos celulares modernos.

Lee más acerca de este tema en la página 215.

1. Sucesiones

Actividad Enlace web

Recuerda que…

Las sucesiones pueden ser finitas, como la del ejemplo, o infinitas, como es usual en matemáticas.

El estudio de las sucesiones se aplica en el análisis de patrones, como el crecimiento natural de los pétalos de las flores y las hojas de los helechos. Además, los patrones son estudiados en ramas como la economía para realizar estimaciones de los mercados bursátiles, en la arquitectura y la pintura para construcciones de obras de arte y en la computación para la optimización de programas.

En algunas situaciones se presentan conjuntos de objetos, eventos o números en forma de sucesión. Esto significa que el conjunto está ordenado de tal forma que es posible identificar un primer elemento, un segundo elemento, un tercer elemento y así sucesivamente.

Toda función cuyo dominio sea el conjunto de los enteros positivos es llamada una **sucesión**.

Para designar una sucesión se usa la expresión $\{a_n\}$ y se emplean subíndices para especificar sus términos. Por ejemplo, en la sucesión $\{a_n\} = \{3n\}$, se tiene que:

Los subíndices señalan el lugar que ocupa cada número o **término de la sucesión**, así, el primer término es $a_1 = 3 \cdot (1) = 3$; el segundo término es $a_2 = 3 \cdot (2) = 6$, y así sucesivamente. El n-ésimo término es a_n, al que se denomina **término general** de la sucesión.

Por tanto, la sucesión definida por $a_n = 3n$, corresponde a:

$$\underset{\substack{a_1 \\ \text{Primer término}}}{\underset{\uparrow}{3}},\quad 6,\quad 9,\quad \underset{\substack{a_4 \\ \text{Cuarto término}}}{\underset{\uparrow}{12}},\quad 15, \ldots,\quad \underset{\substack{a_n \\ n\text{-ésimo término}}}{\underset{\uparrow}{3n}}, \ldots$$

Para encontrar un término específico de la sucesión, se remplaza el valor de n en la fórmula del término general, así:

El vigésimo término de $\{a_n\}$ corresponde a remplazar $n = 20$ en $a_n = 3n$.

Por tanto, $a_{20} = 3 \cdot (20) = 60$.

EJEMPLOS

1. Hallar los cinco primeros términos de la sucesión $\{b_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$.

Para encontrar los cinco primeros términos, se remplazan los números 1, 2, 3, 4 y 5 en la fórmula del término general.

$b_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$,

$b_3 = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$, $b_4 = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5}$

$b_5 = \dfrac{1}{5+1} = \dfrac{1}{6}$

Por tanto, los cinco primeros términos de la sucesión son

$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}$.

2. Determinar el término general de la sucesión, formada por la cantidad de triángulos azules que se genera en cada figura $\{t_n\}$:

Se observa que cada triángulo azul, al ser dividido como sugiere la segunda figura, genera tres nuevos triángulos azules, y así sucesivamente.

Por tanto, $\{t_n\} = \{1, 3, 9, 27, 81, \ldots\}$

Como cada término es una potencia de 3, empezando por 1, entonces, la expresión del término general es:

$$t_n = 3^{n-1}$$

1.1 Sucesiones recursivas

Enlace web

Una **sucesión es recursiva** o recurrente cuando cada término se puede expresar utilizando alguno o todos los términos que lo anteceden, por tanto, para definir una sucesión recursiva es necesario dar a conocer uno o más de los primeros términos. En una sucesión el término anterior al término general a_m es a_{n-1} y el siguiente es a_{n+1}.

Por ejemplo, la *sucesión de Fibonacci* es una sucesión recursiva, que se define como: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, y cada término, a partir del tercero, corresponde a la suma de los dos términos anteriores, de tal forma que:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$
- $a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$

  ⋮
- $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, para $n \geq 3$

Historia de las matemáticas

Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa, Fibonacci, explicó el desarrollo de fenómenos naturales de crecimiento por medio de una secuencia numérica, que después fue muy conocida.

EJEMPLOS

1. **Hallar los cuatro primeros términos de la sucesión, definida en forma recursiva como $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y $c_n = \dfrac{c_{n-2}}{c_{n-1}}$.**

Como $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$, se remplaza c_1 y c_2 en la expresión de a_n.

$$c_3 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$$

$$c_4 = \frac{c_2}{c_3} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Por tanto, los cuatro primeros términos de la sucesión son: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = \dfrac{1}{2}$ y $c_4 = 4$.

2. **Encontrar el término general de la sucesión $\{b_n\} = \{1, 2, 2, 4, 8, 32, \ldots\}$.**

En este caso, el término general se expresa en forma recursiva a partir del tercer término, porque cada uno de los siguientes depende de los dos términos anteriores, así:

$b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2 = 1 \cdot 2 = b_1 \cdot b_2$

$b_4 = 8 = 2 \cdot 4 = b_2 \cdot b_3$

$b_5 = 32 = 4 \cdot 8 = b_3 \cdot b_4$

Así, el término general de la sucesión para $n \geq 3$, es:

$b_n = b_{n-2} \cdot b_{n-1}$

Afianzo COMPETENCIAS

E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

E Halla los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

1. $a_n = 5n$
2. $a_n = (-1)^2(2n)$
3. $a_n = 2^n + n^3$
4. $a_n = \dfrac{3n}{1 + 2n}$
5. $a_n = -(-1)^n(5n - 3)$
6. $a_n = n^n + n^2 + 2n + 1$
7. $a_n = 4 + (-4)^n$
8. $a_n = 7 + \dfrac{1}{3^n}$

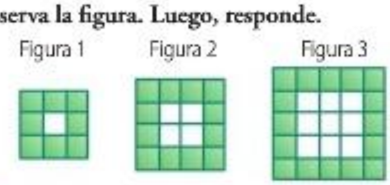
E Encuentra el término indicado en cada sucesión.

9. a_6, si $a_1 = 3$ y $a_n = -2 + a_{n-1}$
10. b_6, si $b_1 = 0{,}25$ y $b_n = 4b_{n-1}$
11. c_4, si $c_1 = 2$ y $c_n = c_{n-1}$
12. a_5, si $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

R Deduce la fórmula del término general de cada sucesión.

13. 7, 14, 21, 28, …
14. 4, 5, 6, 7, 8, …
15. $\dfrac{2}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{8}, \dfrac{8}{11}, \ldots$
16. 3, 6, 12, 24, 48, …
17. 3, 8, 15, 24, 35, …
18. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{16}{11}, \ldots$

S Observa la figura. Luego, responde.



19. ¿Qué expresión determina la cantidad de azulejos en la figura n?

1.2 Sucesiones aritméticas

Actividad

Recuerda que…

Las sucesiones aritméticas son conocidas también como progresiones aritméticas.

Matemáticamente

¿La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ es una sucesión aritmética? Explica tu respuesta.

Una **sucesión aritmética** es aquella en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de sumar al término anterior un número fijo d llamado **diferencia** de la sucesión.

La cantidad constante que se suma recibe el nombre de diferencia, por ser igual a la diferencia entre un término cualquiera de la sucesión y su anterior.

Por ejemplo, la sucesión $-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$, es una sucesión aritmética porque

$$\underbrace{-4, -1,}_{+3}\ \underbrace{\ 2,}_{+3}\ \underbrace{\ 5,}_{+3}\ \underbrace{8,}_{+3} \ldots$$

Es decir, $-1-(-4)=3$; $2-(-1)=3$; $5-2=3$; $8-5=3$, y así sucesivamente.

Como cada término de la sucesión aritmética se obtiene a partir de sumar el número fijo d al término anterior, entonces, la expresión recursiva para el término general de una sucesión aritmética es $a_n = a_{n-1} + d$.

Término general de una progresión aritmética

En general, dada una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ según la definición de cada término se puede escribir:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una **sucesión aritmética**, entonces, el término general o término n-ésimo está dado por la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$.

EJEMPLOS

1. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones son sucesiones aritméticas. Si lo son encontrar d.

a. 20, 15, 10, 5, …

La sucesión es una sucesión aritmética porque:

$$a_2 - a_1 = 15 - 20 = -5$$
$$a_3 - a_2 = 10 - 15 = -5$$
$$a_4 - a_3 = 5 - 10 = -5$$

La diferencia d de la sucesión es $d = -5$.

b. 4, −5, 6, −7, …

Esta sucesión no es una progresión aritmética debido a que la diferencia entre dos términos consecutivos no es la misma.

2. Hallar el décimo quinto término de la sucesión aritmética $2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \ldots$

En la sucesión se tiene que $a_1 = 2$ y $d = \frac{1}{3}$, entonces:

$a_n - 2 + (n+1)\frac{1}{3}$ Se remplazan a_1 y d.

$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{5}{3}$ Se resuelven las operaciones.

Luego, la expresión del término general es

$$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{5}{3}.$$

Ahora, se remplaza $n = 15$ en la fórmula del término general. Así:

$a_{15} = \frac{1}{3}\cdot(15) + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$ Se realizan las operaciones.

Así el décimo quinto término de la sucesión es $\frac{20}{3}$.

Uso de la fórmula general de una progresión aritmética

Ampliación multimedia

A partir de la fórmula general se pueden deducir las siguientes fórmulas.

Primer término. Si se conoce la diferencia y cualquier otro término, se tiene que:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

Diferencia común. Si se conoce el primer término y un término cualquiera, se tiene que:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Número de términos. Si se conoce el primer término, el último término y la diferencia, entonces:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Matemática*mente*

Explica cómo se hallan las fórmulas de primer término, diferencia común y número de términos, a partir de la fórmula del término general.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

EJEMPLOS

1. Hallar a_1 y el término general de una sucesión aritmética tal que $a_5 = 7$ y $a_8 = 22$.

$a_1 = a_n - (n-1)d$ Se aplica la fórmula para hallar el primer término.

$a_1 = a_5 - (5-1)d = 7 - 4d$ Se remplazan a_5 y n.

$a_1 = a_8 - (8-1)d = 22 - 7d$ Se remplazan a_8 y n.

$7 - 4d = 22 - 7d$ Se iguala porque $a_1 = 7 - 4d$ y $a_1 = 22 - 7d$.

$3d = 15$ Se resuelve la ecuación.

$d = 5$ Se halla el valor de d.

$a_1 = 7 - 4(5) = -13$ Se remplaza d para hallar a_1.

Como $d = 5$ y $a_1 = -13$, entonces:

$a_n = -13 + (n-1) \cdot 5$ Se remplazan a_1 y d para hallar a_n.

$a_n = 5n - 18$ Se halla el término general.

Por tanto, $a_1 = -13$ y $a_n = 5n - 18$.

2. Determinar la diferencia de una sucesión aritmética cuyo primer término es 12 y el quinto término es 32.

$a_1 = 12$ y $a_5 = 32$ Se escriben los datos conocidos.

$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ Se aplica la fórmula para hallar d.

$d = \frac{a_5 - a_1}{5-1}$ Se remplaza n por 5.

$d = \frac{32 - 12}{4}$ Se remplazan a_1 y a_5.

$d = \frac{20}{4} = 5$ Se halla el valor de d.

Por tanto, $d = 5$.

3. Determinar el puesto cuyo valor es 79 en la sucesión aritmética 7, 13, 19, …

$a_1 = 7$ y $a_n = 79$ Se escriben los datos conocidos.

$d = a_2 - a_1$ Se halla la diferencia.

$d = 13 - 7 = 6$ Se remplazan el primero y segundo términos.

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ Se aplica la fórmula para hallar n.

$n = \frac{79 + 7}{6} + 1$ Se remplazan a_1, a_n y d.

$n = \frac{72}{6} + 1 = 13$ Se halla n.

Así, $n = 13$.

Es decir, el puesto cuyo valor es 79, es 13.

4. Encontrar el primer término de una sucesión aritmética tal que:

- **Su décimo término sea -120.**
- **Su diferencia sea -8.**

$n = 10$, $a_{10} = -120$ y $d = -8$ Se escriben los datos conocidos.

$a_1 = a_n - (n-1)d$ Se aplica la fórmula para hallar el primer término.

$a_1 = a_{10} - (10-1)(-8)$ Se remplazan n y d.

$a_1 = -120 - (9)(-8)$ Se remplaza a_{10}.

$a_1 = -48$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, el primer término de una sucesión aritmética es -48.

Interpolación de medios aritméticos

Enlace web Actividad

Los números que se encuentran entre dos términos de una progresión aritmética reciben el nombre de **medios aritméticos**.

Por ejemplo, en la progresión aritmética $-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11$ los términos $-4, -1, 2, 5$ y 8 son los cinco medios aritméticos entre -7 y 11.

En general, $\underbrace{a_1, \overbrace{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p}^{p \text{ medios aritméticos}}, a_n}_{p + 2 \text{ términos}}$

- Conocidos el primero y último término de un sucesión aritmética, **interpolar** medios aritméticos consiste en hallar los términos *entre* estos dos.

  Por ejemplo, para interpolar cuatro medios aritméticos entre 2 y 4, se realiza el siguiente proceso:

  Primero, se halla la diferencia de la progresión aritmética teniendo en cuenta que el primer término es 2 y el último término es 4 y la cantidad de términos es 6.

  Luego, se tiene que $n = 6$, $a_1 = 2$ y $a_6 = 4$. Además:

  $d - \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$ Se aplica la fórmula para hallar la diferencia.

  $d = \dfrac{4 - 2}{6 - 1}$ Se remplazan a_1, a_6 y n.

  $d = \dfrac{2}{5}$ Se resuelven las operaciones.

  Por tanto, los cuatro medios aritméticos entre 2 y 4 son:

  $a_2 = 2 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5}$ $\qquad a_4 = \dfrac{14}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{16}{5}$

  $a_3 = \dfrac{12}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{14}{5}$ $\qquad a_5 = \dfrac{16}{5} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{18}{5}$

  Por tanto, la sucesión aritmética es $2, \dfrac{12}{5}, \dfrac{14}{5}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{18}{5}, 4, \ldots$

- Dos términos de una progresión aritmética siempre están relacionados. Por ejemplo, los términos a_2 y a_8 de la progresión $1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \ldots$ están relacionados.

  En esta progresión se observa que para obtener a_8 se debe sumar 6 veces $(8 - 2 = 6)$ la diferencia, d, al término a_2. Es decir, $a_8 = a_2 + 6d$.

Dados dos términos, a_p y a_q, de una sucesión aritmética con $p < q$ se cumple que $a_q = a_p + (q - p)d$.

Por ejemplo, para encontrar el décimo tercer término de una sucesión aritmética cuyo séptimo término es 8 y cuya diferencia es $-\dfrac{1}{3}$ se realiza el siguiente proceso.

$p = 7$, $q = 13$, $a_7 = 8$ y $d = -\dfrac{1}{3}$ Se escriben los datos conocidos.

$a_{13} = a_7 + (q - p)d$ Se aplica la fórmula para hallar a_{13}.

$- 8 + (13 + 7)\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ Se remplazan p, q, a_7 y d.

$- 8 + (6)\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ Se resta.

$= 6$ Se realizan las operaciones.

Por tanto, el décimo tercer término de la sucesión aritmética es 6.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Explica cómo hallar:

20. El primer término de una sucesión aritmética, a partir de la diferencia d y cualquier otro término de la sucesión.

21. La diferencia d si se conocen dos términos de la sucesión.

22. El número de términos de una sucesión aritmética.

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son aritméticas. Si la sucesión es aritmética, encuentra la diferencia y el término n-ésimo para cada sucesión.

23. $2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots$

24. $10, 4, -2, -8, -14, \ldots$

25. $\frac{5}{2}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \ldots$

26. $e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, e^{-5}, \ldots$

27. $\frac{13}{6}, \frac{17}{12}, \frac{2}{3}, \ldots$

Identifica cuáles sucesiones son aritméticas. Luego, escribe los cinco primeros términos de aquellas que lo sean.

28. $a_n = 4 - n$

29. $\left\{a_n = \frac{2}{n+2}\right\}$

30. $\{a_n = -n + 8\}$

31. $a_n = n + \frac{n}{2}$

32. $a_n = \frac{1}{2+n}$

33. $a_n = -\frac{2}{3}(n-1) + 2$

Halla los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones aritméticas definidas recursivamente:

34. $a_1 = 25, a_{k+1} = a_k + 4$

35. $a_1 = +\frac{2}{3}, a_{k+1} = a_k - \frac{1}{2}$

Determina el dato que se indica en cada caso, suponiendo que $\{a_n\}$ es una progresión aritmética.

36. $a_1 = 5, a_{11} = 165, a_{12} = ?$

37. $a_{11} = 54, a_{29} = 180, a_3 = ?$

38. $a_3 = 15, d = -\frac{3}{2}, a_n = 6, n = ?$

39. $a_2 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{5}{6}, a_n = ?, a_{20} = ?$

40. $a_3 = -6, a_6 = 6, a_n = ?, a_{100} = ?$

41. $a_1 = \sqrt{2} - 1, a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}, a_n = ?, a_{10} = ?$

Escribe en cada caso el término n-ésimo de las siguientes sucesiones aritméticas:

42. $a_1 = 9, d = -\frac{1}{5}$

43. $a_1 = -4, a_3 = -13$

Observa el ejemplo. Luego, relaciona cada sucesión con la gráfica correspondiente.

Por ejemplo, la sucesión

$\{a_n\} = \{-2n + 6\} = \{4, 2, 0, -2, -4, \ldots\}$

Se representa en la figura así.

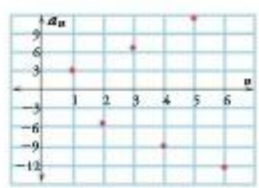
44. $\{a_n\} = \{n - 5\}$

45. $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2} + 1\right\}$

46. $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}(2n + 1)\}$

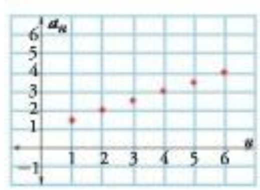
47. $\{a_n\} = \{-n + (-1)^n \cdot 3\}$

a.



c.

b.



d.

Realiza lo propuesto en cada caso.

48. Explica cómo a partir de la representación gráfica de una sucesión se puede determinar si es o no es una sucesión aritmética.

49. Halla x de tal forma que los números $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}$ y x sean tres términos consecutivos de una sucesión aritmética.

R **Encuentra dos sucesiones aritméticas que cumplan las condiciones dadas en cada caso.**

50. Que el primer término sea 5.

51. Que la diferencia sea -8.

52. Que el noveno término sea 21.

R **Interpola.**

53. Cuatro medios aritméticos entre -1 y 4.

54. Seis medios aritméticos entre 3 y 9.

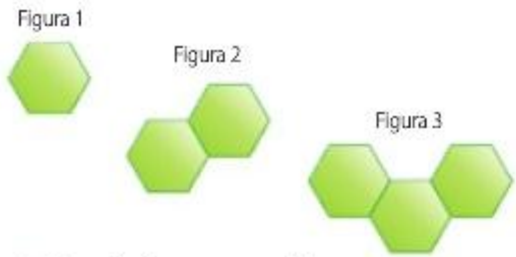
55. Ocho medios aritméticos entre 1 y 3.

56. Diez medios aritméticos entre 0 y $\frac{1}{10}$.

57. Tres medios aritméticos entre $-\frac{3}{4}$ y $\frac{8}{3}$.

58. Cinco medios aritméticos entre $-\frac{15}{2}$ y $-\frac{20}{7}$.

S **Resuelve las preguntas 59 a 61 con base en las siguientes figuras.**



59. Completa la siguiente tabla.

Número de figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de líneas	6					

60. Encuentra la cantidad de líneas que tiene la vigésimo segunda figura.

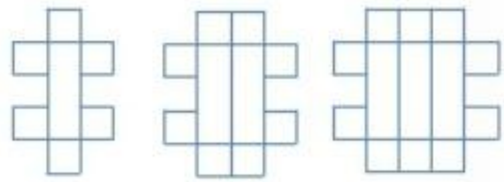
61. Determina el número de la figura, si se sabe que cuenta con 156 líneas.

S **Resuelve.**

62. Determina cuánto dinero reciben cuatro hermanos, si cada uno, después del mayor, recibirá \$40.000 menos, y además el dinero que se distribuye es de \$2.000.000.

63. Calcula la nota más alta de un estudiante de álgebra, que obtiene doce calificaciones, la primera de las cuales fue 4,8 y en los exámenes sucesivos fue cuatro décimas más que la anterior.

S **Observa cada figura. Luego, responde.**



64. ¿Cuántos rectángulos tiene la siguiente figura?

65. ¿Cuántos cuadrados tiene la siguiente figura?

66. ¿Cuántos cuadrados y rectángulos tiene la décima figura?

67. ¿Es posible determinar la cantidad de cuadrados y rectángulos que tiene cualquier figura de la sucesión?

S **La temperatura del día más frío en el Nevado del Tolima fue el invierno pasado, y la temperatura máxima al mediodía fue de 8 °C. A partir de entonces, la temperatura descendió 1,5 °C cada hora hasta alcanzar su descenso mayor diecisiete horas después.**

68. Realiza una tabla donde se registre la temperatura durante las horas posteriores a la temperatura máxima de ese día.

69. Determina la temperatura más baja después de la temperatura máxima registrada.

S **Resuelve las preguntas en relación con la siguiente figura.**

70. ¿Cómo varía la cantidad de triángulos en cada fila?

71. ¿Cuántos triángulos tiene la fila 999?

1.3 Sucesiones geométricas

Ampliación multimedia · Enlace web

Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de multiplicar al término anterior un número fijo r llamado **razón** de la sucesión.

Recuerda que...
Las sucesiones geométricas son conocidas como progresiones geométricas.

El número constante que se multiplica recibe el nombre de razón, por ser igual a la razón entre un término cualquiera de la sucesión y su término inmediatamente anterior.

$$\underbrace{5, 10}_{\times 2}, \underbrace{20}_{\times 2}, \underbrace{40}_{\times 2}, \underbrace{80}_{\times 2}, \ldots$$

Es decir, $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{20}{10} = 2$, $\frac{40}{20} = 2$, $\frac{80}{40} = 2$ y así sucesivamente.

Como cada término de la sucesión geométrica se obtiene a partir de multiplicar el número fijo r, al término anterior, entonces, la expresión recursiva para el término general de una geométrica es $a_n = ra_{n-1}$.

Término general de una progresión geométrica

En general, dada una progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ según la definición de cada término se puede escribir.

a_1

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = (a \cdot r) \cdot r = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = (a \cdot r^2) \cdot r = a_1 r^3$

$\vdots$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

Actividad

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica. El **término general** o término n-ésimo está dado por la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$.

EJEMPLOS

1. **Determinar cuáles de las siguientes sucesiones son sucesiones geométricas. Si lo son, encontrar r.**

a. $-81, -27, -9, -3, \ldots$

La sucesión es una progresión geométrica porque:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-27}{-81} = \frac{1}{3}$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{-9}{-27} = \frac{1}{3}$

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

La razón r de la sucesión es $r = \frac{1}{3}$.

b. $2, 4, 16, 256, \ldots$

La sucesión no es una progresión geométrica porque la razón entre dos términos consecutivos no es la misma.

Es decir,

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{4} = 4$

2. **Hallar el término general de la progresión geométrica teniendo en cuenta las dos condiciones:**

   El primer término es 3.

   La razón es 5.

$a_1 = 3$ y $r = 5$ Se escriben los datos conocidos.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ Se aplica la fórmula del término general.

$a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ Se remplazan a_1 y r.

Por tanto, la fórmula del término general es $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

Uso de la fórmula general de una progresión geométrica

A partir de la fórmula general se pueden deducir las siguientes fórmulas.

Primer término: si se conoce la razón y cualquier otro término, se tiene que:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

Razón: si se conoce el primer término y otro término cualquiera de la progresión geométrica se tiene que:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Número de términos: si se conoce la razón, el primer término y el último término de la progresión se tiene que:

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\text{Log } r} + 1$$

Matemáticamente

Explica cómo se deducen las fórmulas del primer término, razón y número de términos, a partir de la fórmula del término general.

EJEMPLOS

1. **Hallar el primer término y el término general de una progresión geométrica tal que $a_3 = 18$ y $a_5 = 648$.**

Como $a_3 = 18$ y $a_5 = 648$, entonces, se tiene que:

$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$ Se aplica la fórmula del primer término.

$a_1 = \frac{a_3}{r^{3-1}} = \frac{18}{r^2}$ Se remplazan a_3 y n.

$a_1 = \frac{a_5}{r^{5-1}} = \frac{648}{r^4}$ Se remplazan a_5 y n.

$\frac{18}{r^2} = \frac{648}{r^4}$ Se igualan porque $a_1 = \frac{a_3}{r^2}$ y $a_1 = \frac{648}{r^4}$.

$r^2 = 36$ Se despeja r^2.

$r = 6$

Luego, se halla el primer término así:

$a_1 = \frac{18}{r^2} = \frac{18}{(6)^2} = \frac{1}{2}$ Se remplaza r.

Como $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = 6$, entonces, $a_n = \frac{1}{2} \cdot 6^{n-1}$.

2. **Determinar la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 2.500 y el sexto término es $\frac{4}{5}$.**

Como $a_1 = 2.500$, $a_6 = \frac{4}{5}$ y $n = 6$, entonces,

$r = \sqrt[(n-1)]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[(6-1)]{\frac{\frac{4}{5}}{2.500}}$ Se aplica la fórmula para r y se remplazan a_6, a_1 y n.

$r = \sqrt[5]{\frac{1}{3.125}}$ Se divide.

$r = \frac{1}{5}$

Por tanto, la razón de la progresión geométrica es $\frac{1}{5}$.

Interpolación de medios geométricos

Recurso imprimible

Los números que se encuentran entre dos términos de una progresión geométrica reciben el nombre de **medios geométricos**.

Por ejemplo, en la progresión geométrica $-12, -6, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}$, los términos $-6, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$ son los cuatro medios geométricos entre -12 y $-\frac{3}{8}$.

En general, $\underbrace{a_1, \overbrace{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p}^{p \text{ medios geométricos}}, a_n}_{p+2 \text{ términos}}$

Interpolar medios geométricos significa hallar un número de términos, dados el primero y el último términos.

Por ejemplo, para interpolar tres medios geométricos entre 625 y 16, se realiza el siguiente proceso.

Primero, se halla la razón de la progresión geométrica teniendo en cuenta que el primer término es 625, el último término es 16 y la cantidad de términos es 5.

Luego, se tiene que $a_1 = 625$, $a_5 = 16$ y $n = 5$. Además:

$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ Se aplica la fórmula para hallar la razón r.

$r = \sqrt[5-1]{\frac{16}{625}}$ Se remplazan a_1, a_5 y n.

$r = \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{5}$ Se resuelven las operaciones.

Finalmente, los tres medios geométricos entre 625 y 16 son:

$$a_2 = a_1 r = 625\left(\frac{2}{5}\right) = 250$$

$$a_3 = a_2 r = 250\left(\frac{2}{5}\right) = 100$$

$$a_4 = a_3 r = 100\left(\frac{2}{5}\right) = 40$$

Así, la sucesión geométrica es 625, 250, 100, 40, 16, …

En una progresión geométrica, un término a_p se relaciona con otro término a_q con $p < q$ mediante la expresión $a_q = a_p \cdot r^{q-p}$.

Por ejemplo, para encontrar el sexto término de una sucesión geométrica si $a_2 = 24$ y $r = 3$, se realiza el siguiente proceso.

$a_6 = a_2 \cdot r^{6-2} = 24 \cdot 3^4 = 24 \cdot 81 = 1.944$

Por tanto, el sexto término de la sucesión geométrica es 1.944.

Historia de las matemáticas

El ajedrez y la progresión geométrica

El ajedrez tiene su origen en la India, data del siglo VI d. C. y el inventor fue un modesto sabio. El rey de entonces quiso recompensarle por tan divertido y variado juego y el sabio le pidió un grano de maíz por la primera casilla del tablero y que luego fuera doblando el número por cada una de las casillas restantes. El rey aceptó y se burló de lo que le pareció que era una insignificante recompensa.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

I **Determina cuáles de las siguientes sucesiones son geométricas. Luego, encuentra la razón r y el término general de dichas sucesiones.**

72. 3, 9, 27, 81, …

73. 48, 12, 3, -1, …

74. 2, 16, 18, 54, …

75. $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$

76. $\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{45}, \ldots$

77. $3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \ldots$

Identifica cuáles sucesiones son geométricas. Luego, escribe los cinco primeros términos de aquellas que lo sean.

78. $a_n = 6 \cdot (-2)^{n+1}$

79. $a_n = 42\left(\frac{4}{3}\right)^n$

80. $a_n = \frac{n^2+1}{n}$

81. $a_n = 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}$

82. $a_n = 1 - \frac{n}{3}$

83. $a_n = \frac{2}{5}n$

Encuentra el término *n*-ésimo para cada una de las siguientes sucesiones geométricas.

84. $a_1 = 4, r = 3$

85. $a_1 = -3, r = \frac{2}{5}$

86. $a_1 = -\frac{3}{2}, r = \frac{8}{9}$

87. $a_3 = 2, a_5 = 4$

88. $a_1 = 6, a_3 = 30$

89. $a_5 = \frac{8}{7}, a_6 = 16$

Determina el dato que se indica en cada caso, suponiendo que la sucesión sea geométrica.

90. $a_1 = -32, a_6 = 1, a_8 = ?$

91. $a_3 = -1, a_7 = -\frac{1}{16}, a_4 = ?$

92. $a_1 = -2, r = \frac{2}{3}, a_n = -\frac{16}{27}, n = ?$

93. $a_1 = 3, a_2 = -\frac{1}{6}, a_{10} = ?$

94. $a_2 = -18, a_3 = 12, a_n = -\frac{512}{729}, n = ?$

95. $a_2 = 60, a_4 = 2.400, a_n = ?$

96. $a_1 = 7, r = 3, a_n = 3.720.087, n = ?$

97. $a_3 = \frac{1}{9}, r = \frac{3}{2}, a_n = \frac{1}{4}, n = ?$

98. $a_1 = \frac{3}{\sqrt{5}-2}, a_3 = \frac{12}{5\sqrt{5}-10}, a_n = ?$

99. $a_{15} = 5, r = \sqrt[7]{3}, a_1 = ?$

100. $a_1 = 243, a_5 = 27, a_n = \frac{1}{3^{10}}, n = ?$

Resuelve según lo indicado.

101. Determina el lugar que ocupan dos términos consecutivos de una progresión geométrica, si su valor respectivo es 3 y 4, y el primer término es $\frac{27}{16}$.

102. Determina la razón de una progresión geométrica si $a_5 + a_8 = 9$ y $a_7 + a_{10} = 1$.

103. Encontrar la cantidad de términos de la siguiente progresión geométrica, donde k es un número real diferente de 1.

$k^{57}, k^{52}, k^{47}, \ldots, \frac{1}{k^{28}}$

Interpola:

104. Cinco medios geométricos entre 1 y 64.

105. Seis medios geométricos entre 1 y 2.

106. Cuatro medios geométricos entre 1 y 7.

107. Dos medios geométricos entre $\sqrt{5}$ y 5.

108. Cinco medios geométricos entre -7 y $-\frac{1}{2}$.

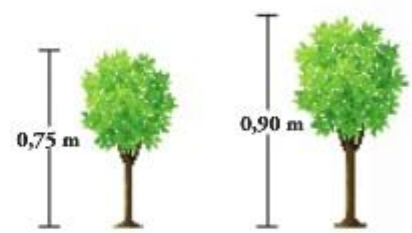
109. Cinco medios geométricos entre 10 y 20.

110. Halla el primer término de una progresión geométrica si:

$$a_2 \cdot a_4 = 3 \text{ y } a_5 \cdot a_6 = 96$$

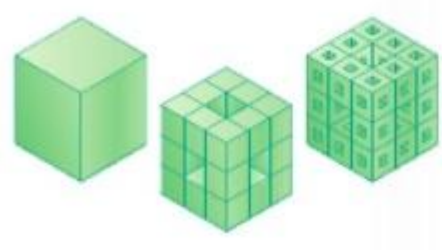
Lee el enunciado. Luego, responde.

111. Un árbol crece cada año un 20%. Si al comenzar el año su altura era de 0,75 cm, ¿cuál es la altura que alcanzará el árbol al cabo de 10 años?



112. Los puntos medios de los lados de un cuadrado con perímetro de 24 cm son los vértices de un segundo cuadrado, y los puntos medios de los lados del segundo cuadrado son los vértices de un tercer cuadrado y así sucesivamente, hasta el décimo cuadrado. Halla el área del décimo cuadrado.

113. La esponja de Sierpinski representa un fractal generado a partir de un cubo, como se muestra en la figura.



Si la medida de la arista del cubo inicial es 1 m, determina el área del cubo que se elimina de la cara lateral, al realizar 30 veces el proceso.

2. Series

La suma de los términos de una sucesión recibe el nombre de **serie**.

2.1 Sumatoria

En la sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ es posible obtener una sucesión de sumas parciales $\{s_n\} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots\}$ definidas como:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n
\end{aligned}
$$

Para representar la suma de los primeros n términos de una sucesión se utiliza la notación **sigma** Σ. La suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$ es:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

n se denomina límite superior de la sumatoria y 1, el límite inferior. Además, k es llamado el índice de la sumatoria y toma los valores enteros 1, 2, 3, …, n.

Recuerda que...

Otra forma de escribir la sucesión de sumas parciales es:

$s_1 = a_1$
$s_2 = s_1 + a_2$
$s_3 = s_2 + a_3$
$\vdots$
$s_n = s_{n-1} + a_n$

EJEMPLOS

1. Hallar la suma de los seis primeros términos de la sucesión $\{(-1)^{n-1} n\}$.

$\sum_{n=1}^{6} (-1)^{n-1} n$ — Se expresa la suma en notación sigma.

$= (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 4 + (-1)^4 \cdot 5 + (-1)^5 \cdot 6$

Se remplaza n por los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

$= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ — Se resuelven las potencias y los productos.

$= -3$ — Se suma y se resta.

Por tanto, la suma de los seis primeros términos es -3.

2. Expresar la siguiente suma, usando notación de sumatoria.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

El término general de la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, 11 es $a_n = 2n - 1$ porque se cumple que:

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$
$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$
$a_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 12 - 1 = 11$

Por tanto, la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ se expresa como $\sum_{n=1}^{6} (2n - 1)$.

2.2 Propiedades de la sumatoria

Las siguientes propiedades de la sumatoria son útiles para calcular sumas de sucesiones. Estas propiedades son consecuencia directa de las propiedades de los números reales.

Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, y c un número real, se tiene:

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

Para verificar esta propiedad se sigue que:

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n)$ Se desarrolla la sumatoria.

  $= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)$ Se aplican las propiedades conmutativa y asociativa.

  $= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ Se expresa cada suma como sumatoria.

Por tanto, $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

- $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
- $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$

EJEMPLOS

1. Calcular cada sumatoria aplicando las propiedades.

a. $\sum_{k=1}^{5} (2 - 4k)$

$\sum_{k=1}^{5} (2 - 4k) = \sum_{k=1}^{5} 2 - \sum_{k=1}^{5} 4k$ Se aplica la propiedad de la sumatoria.

$= 2 \cdot 5 - 4\sum_{k=1}^{5} k$ Se aplican las propiedades de la sumatoria.

$= 2 \cdot 5 - 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ Se desarrolla la sumatoria.

$= 10 - 4 \cdot 15$ Se resuelven las operaciones.

$= 10 - 60 = -50$ Se simplifica.

Por tanto, $\sum_{k=1}^{5} (2 - 4k) = -50$.

b. $\sum_{k=1}^{4} (2^k + k^3)$

$\sum_{k=1}^{4} (2^k + k^3) = \sum_{k=1}^{4} 2^k + \sum_{k=1}^{4} k^3$ Se aplica la propiedad de la sumatoria.

$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)$ Se desarrolla cada sumatoria.

$= (2 + 4 + 8 + 16) + (1 + 8 + 27 + 64)$

$= 30 + 100 = 130$ Se resuelven las sumas.

Por tanto, $\sum_{k=1}^{4} (2^k + k^3) = 130$.

2. Verificar que $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ teniendo en cuenta que $a_k = 5k$, $m = 4$ y $n = 7$.

Primero, se halla la suma $\sum_{k=1}^{7} a_k$.

$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{7} 5k = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + ... + 5 \cdot 7$

$= 5 + 10 + 15 + ... + 35 = 140$

Luego, se halla $\sum_{k=1}^{4} a_k$ y $\sum_{k=5}^{7} a_k$.

$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{4} 5k = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 50$

$\sum_{k=5}^{7} a_k = \sum_{k=5}^{7} 5k$

$= 5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 90$

Como, $\sum_{k=1}^{4} 5_k + \sum_{k=5}^{7} 5_k = 50 + 90 = 140$,

entonces, $\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=5}^{7} a_k$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Escribe las siguientes sumas empleando la notación sumatoria.

114. $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + 28$

115. $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

116. $\frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{7}{8} + \ldots - \frac{23}{24}$

117. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{343}$

118. $8 + 15 + 24 + 35 + \ldots + 143$

119. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{110}$

Encuentra el valor de cada suma.

120. $\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{2n}$

121. $\sum_{n=2}^{10} \frac{1}{n^2 - 1}$

122. $\sum_{n=1}^{8} (+1)^{n+1} n^2$

123. $\sum_{n=1}^{5} 3^n (n + 1)$

124. $\sum_{n=1}^{9} \frac{3n - 1}{n}$

125. $\sum_{n=1}^{5} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$

126. $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

127. $\sum_{n=1}^{7} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

128. $\sum_{n=1}^{4} \frac{3n^2 - 6n}{n^2 + 8n + 15}$

129. $\sum_{n=1}^{8} \frac{(-1)^n}{n}$

Halla la suma de los diez primeros términos de cada sucesión.

130. $a_n = 5^n - 5^{n-1}$

131. $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

132. $a_n = n2^{n-1}$

133. $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3^{\frac{n}{5}}$

134. $a_n = 2n(2n - 1)$

135. $a_n = n! - (n - 1)!$

136. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

137. $a_n = \frac{e^{2n}}{5^n}$

Verifica cada afirmación para $n = 8$.

138. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

139. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

140. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geqslant \text{Ln } n$

Emplea notación de sumatoria para representar cada situación.

141. La suma de los primeros diez múltiplos de siete.

142. La suma de los primeros 50 enteros positivos.

Aplica las propiedades de la sumatoria para hallar el valor de cada suma si $a_n = 3n$, $b_n = \frac{n^3}{3}$ y $c_n = \frac{1}{2}$.

143. $\sum_{n=1}^{7} \frac{2}{5} a_n$

144. $\sum_{n=1}^{5} (3a_n - b_n)$

145. $\sum_{n=1}^{10} (c_n - 8b_n)$

146. $\sum_{n=1}^{5} (2a_n + 3b_n - 8c_n)$

Determina el valor de cada suma si:

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = 19 \qquad \sum_{n=9}^{20} a_n = 30$$

147. $\sum_{n=1}^{20} (8 + a_n)$

148. $\sum_{n=1}^{20} 7a_n$

Considera la sucesión definida así: el primer término es $a_1 = 128$ y cada uno de los siguientes es el cuadrado de la suma de las cifras del término anterior.

$$a_1 = 128,\ a_2 = (1 + 2 + 8)^2 = 121, \ldots$$

149. Encuentra el término 1.000.

Escribe los 20 primeros términos de la sucesión de Fibonacci. Luego, halla la suma de los cuadrados de cada dos términos consecutivos hasta llegar al décimo término. Es decir,

$$a_1^2 + a_2^2,\ a_2^2 + a_3^2 +, \ldots, + a_9^2 + a_{10}^2.$$

150. Comprueba que los números obtenidos son términos de la sucesión de Fibonacci.

151. Establece una regla general del punto anterior.

Escribe una expresión que indique el término general S_n de cada suma.

152. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right)$

153. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+2)(i+3)}$

154. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{(2^{i+1} + 1)(2^i + 1)}$

2.3 Serie aritmética

Ampliación multimedia

A la suma de los primeros términos de una progresión aritmética se le llama **serie aritmética** y se simboliza como S_n.

Por ejemplo, la suma de los seis primeros términos de la progresión aritmética 1, 5, 9, 13, 17, 21, … se escribe $S_6 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21$.

Además, en la suma se tiene que:

$$S_6 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21$$

$$9 + 13 = 22$$
$$5 + 17 = 22$$
$$1 + 21 = 22$$

Se puede observar que existen tres sumas iguales que equivalen a la suma del primer término más el último término. Es decir, 22.

Luego, $S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6)\cdot 6}{2}$

$S_6 = 22 \cdot 3 = 66$

En general, la suma, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, de los n término de una progresión aritmética, es la siguiente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}.$$

Nótese que mientras la expresión para el término general de una sucesión aritmética es lineal, la expresión para su serie es cuadrática.

Historia de las matemáticas

Gauss y las sumas

En su clase de aritmética, Carl Friedrich Gauss, con tan solo 10 años de edad, resolvió de forma inmediata el problema planteado por el profesor Büttner, el cual consistía en calcular la suma de los números enteros de 1 al 100, descubriendo por sí mismo, un método para hallar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

Ampliación multimedia

EJEMPLOS

1. Calcular la suma de los veinte primeros términos de la progresión aritmética −8, −5, −2, 1, …

Primero, se halla el valor de la diferencia d de la progresión así:

$d = a_2 - a_1 = -5 - (-8) = -5 + 8 = 3$

Como $a_1 = -8$, $d = 3$ y $n = 20$, entonces,

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ — Se aplica la fórmula del término general.

$a_{20} = -8 + (20 - 1)\cdot 3$ — Se remplazan a_1, d y n.

$a_{20} = 49$ — Se resuelven las operaciones.

Luego, la suma de los veinte primeros términos es:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$ — Se aplica la fórmula de la suma.

$S_{20} = \dfrac{(-8 + 49)\cdot 20}{2} = 410$ — Se remplaza y se resuelven las operaciones.

Por tanto, la suma es 410.

2. Hallar la suma de los primeros diecisiete términos de la progresión aritmética con $a_n = 21 - 6n$.

Primero, se encuentra a_1 y a_{17}, como sigue:

$a_n = 21 - 6n$ — Se plantea la fórmula del término general.

$a_1 = 21 - 6 \cdot 1 = 15$ — Se remplaza n por 1 y se resuelve.

$a_{17} = 21 - 6 \cdot 17 = -81$ — Se remplaza n por 17 y se resuelve.

Como $a_1 = 15$ y $a_{17} = -81$, entonces:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$ — Se aplica la fórmula de la suma.

$S_{17} = \dfrac{[15 + (-81)]\cdot 17}{2}$ — Se remplazan a_1, a_{17} y n.

$S_{17} = -561$ — Se realizan las operaciones.

Por tanto, la suma de los diecisiete primeros términos es −561.

Problemas de aplicación de la serie aritmética

En la solución de problemas que requieren el uso de progresiones aritméticas, es importante identificar los datos conocidos, y luego relacionarlos para aplicar adecuadamente las fórmulas dadas.

EJEMPLOS

1. **Un estudiante diseña su propio esquema de ahorro durante 90 días. El primer día ahorra \$500; el segundo, \$600; el tercero, \$700, y así sucesivamente, cada día ahorra \$100 más que el día anterior.**

a. Hallar el dinero que ahorra el último día.

Se determinan los datos conocidos en relación con una progresión aritmética. Así:

$a_1 = 500$	Cantidad inicial.
$d = 100$	Cantidad de aumento en el ahorro.
$n = 90$	Último día de ahorro.
$a_n = a_1 + (n - 1)d$	Fórmula del término general.
$a_{90} = 500 + (90 - 1)100$	Se remplazan los datos.
$a_{90} = 500 + 8.900$	Se realizan las operaciones.
$a_{90} = 9.400$	

Por tanto, la cantidad de dinero ahorrado en el último día es \$9.400.

b. Calcular el dinero ahorrado al final del período.

$a_1 = 500$, $a_{90} = 9.400$ y $n = 90$	Se identifican los datos conocidos.
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	Fórmula de la suma.
$S_{90} = \dfrac{(a_1 + a_{90}) \cdot 90}{2}$	Se remplaza n por 90.
$= \dfrac{(500 + 9.400) \cdot 90}{2}$	Se remplazan a_1 y a_{90}.
$= \dfrac{(9.900) \cdot 90}{2}$	Se suma.
$= 445.500$	Se realizan las operaciones.

Por tanto, el total de dinero ahorrado al cabo de los 90 días es \$445.500.

2. **Encontrar el octavo número hexagonal a partir de la figura donde se muestra su construcción.**

En la figura se observa que

$a_1 = 1 = 4 \cdot 1 - 3$

$a_2 = 6 = 1 + 5 = (4 \cdot 1 - 3) + (4 \cdot 2 - 3)$

$a_3 = 15 = 1 + 5 + 9$

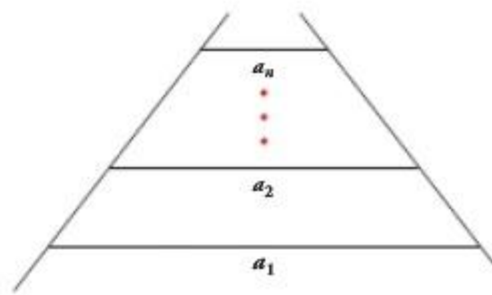
$\quad = (4 \cdot 1 - 3) + (4 \cdot 2 - 3) + (4 \cdot 3 - 3)$

Luego, $a_n = \sum_{i=1}^{n} (4i - 3)$, entonces:

$$a_8 = \frac{(1 + 29) \cdot 8}{2} = 120$$

Por tanto, el octavo hexagonal es 120.

3. **Un carpintero construye una escalera con dos vigas metálicas paralelas. Las longitudes de los pasos forman una progresión aritmética, donde el primer paso mide 60 cm y el último 40 cm y la distancia entre dos pasos consecutivos es constante. Si el carpintero utilizó 450 cm de madera para la construcción de los pasos, calcular el número de pasos que tiene la escalera.**



$a_1 = 60$	Longitud inicial.
$a_n = 40$	Longitud final.
$S_n = 450$	Longitud total de los pasos.
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	Fórmula de la suma.
$450 = \dfrac{(60 + 40) \cdot n}{2}$	Se remplazan a_1, a_n y S_n.
$900 = 100n$	Se multiplica por 2 y se suma.
$n = 9$	Se despeja n.

Por tanto, la cantidad de pasos que tiene la escalera es 9.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

155. Responde: ¿Cómo se halla la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética?

Halla la suma de los términos que se indican en cada progresión aritmética.

156. Los diez primeros términos 2, 9, 16, …

157. Los quince primeros términos $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, …

158. Los cinco primeros términos $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots$

159. Los treinta primeros términos $-3, -9, \dots$

160. Los veinte primeros términos 111, 108, 105, …

161. Los cien primeros términos 1, 2, 3, …

162. Los doce primeros términos $\frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \dots$

Encuentra el valor de cada suma.

163. $-2 + 0 + 2 + \dots + 24$

164. $1 + 6 + 11 + \dots + 51$

165. $\text{Ln } 4 + \text{Ln } 8 + \text{Ln } 16 + \dots + \text{Ln } 2^{10}$

166. $\frac{1}{2} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{41}{10}$

167. $8 + \frac{23}{2} + 15 + \dots + 57$

Identifica a_1, a_n y n. Luego, determina la suma en cada sumatoria.

168. $\sum_{n=1}^{10} (2n - 1)$

169. $\sum_{n=1}^{11} (10n - 3)$

170. $\sum_{n=1}^{30} [7 + (n-1)8]$

171. $\sum_{n=1}^{16} (100 - n)$

172. $\sum_{n=1}^{80} (0{,}7n + 1)$

173. $\sum_{n=1}^{18} \left(\frac{3}{2}n - \frac{5}{4}\right)$

Encuentra los elementos que se desconocen en cada progresión aritmética.

174. $S_9 = 144$, $d = 5$ y $a_3 = 6$, $a_1 = ?$, $a_{11} = ?$

175. $S_{48} = 120$, $d = -3$, $a_1 = ?$, a_{48} y $S_{100} = ?$

176. $a_4 = 5$, $a_7 = -4$, $S_{25} = ?$

Determina la suma que se indica en cada caso.

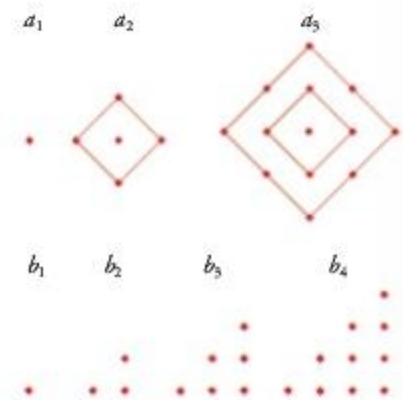
177. La suma de todos los números naturales impares que hay entre 38 y 456.

178. La suma de todos los números naturales, múltiplos de 6 menores que 200.

Una herencia de $42.350.350 se reparte entre 7 personas, de modo que las cantidades están en progresión aritmética.

179. ¿Cuál es la mayor cantidad que puede recibir una persona y cuál la menor, si hay una diferencia de $1.800.000 entre dichas cantidades?

Observa cada figura. Luego, resuelve.



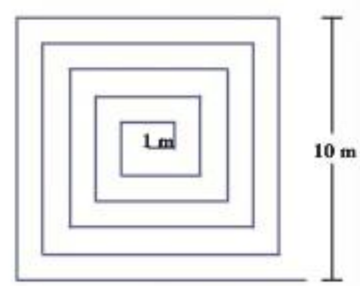
180. Describe la formación de cada figura.

181. Determina la cantidad de puntos de a_{10} y b_{20}.

182. Halla la expresión general para calcular la suma de $b_n + b_{n-1}$.

Resuelve.

183. Determina la longitud de la línea que conforma el laberinto, si sus pasillos miden 1 m de ancho.



Lo que viene…

En las siguientes páginas trabajarás la suma de los términos de una sucesión geométrica, investiga qué es una serie geométrica.

2.4 Serie geométrica

A la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica se le llama serie geométrica y se simboliza como S_n.

Para hallar la suma de los n términos de una progresión geométrica se utiliza la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ con } r \neq 1.$$

Esta fórmula se deduce como:

Sea S_n la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica. Es decir:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ — Se suman los n términos de la progresión.

$S_n \cdot r = \underbrace{a_1 \cdot r}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot r}_{a_3} + \dots + \underbrace{a_{n+1} \cdot r}_{a_n} + a_n \cdot r$ — Se multiplica por r.

$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n \cdot r$ — Se remplaza $a_1 \cdot r$ por a_2, $a_2 \cdot r$ por a_3, …

$-S_n = -a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$ — Se multiplica la ecuación de S_n por -1.

$S_n \cdot r - S_n = -a_1 + a_n \cdot r$ — Se suman las dos ecuaciones anteriores y se simplifica.

$S_n \cdot (r - 1) = -a_1 + (a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r$ — Se factoriza y se remplaza a_n por $a_1 r^{n-1}$.

$S_n \cdot (r - 1) = -a_1 + a_1 \cdot r^n$ — Se multiplican las potencias.

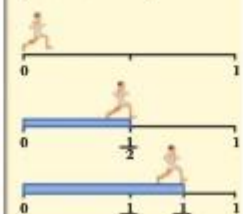
$S_n \cdot (r - 1) = a_1(r^n - 1)$ — Se factoriza.

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ — Se despeja S_n.

Historia de las matemáticas

Paradoja del corredor

Zenón de Elea (495-435 a. C.)



La paradoja del corredor dice: un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre debe recorrer la mitad de la distancia total. Luego, la mitad de la mitad. Es decir, $\frac{1}{4}$, posteriormente, la mitad de esta y así sucesiva e indefinidamente. Por tanto, nunca llegará a alcanzar la meta.

EJEMPLOS

1. Calcular la suma de los cuatro primeros términos de la progresión geométrica 5, 10, 20, …

Primero, se halla el valor de la razón r de la progresión, así:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$$

Como $a_1 = 5$, $r = 2$, $n = 4$, entonces:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ — Fórmula del término general.

$a_4 = 5 \cdot 2^{5-1}$ — Se remplazan a_1, r y n.

$a_4 = 5 \cdot 2^4 = 80$ — Se resuelven las operaciones.

Luego, la suma de los cuatro primeros términos es:

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ — Fórmula de la suma.

$S_4 = \frac{5(2^4 - 1)}{2 - 1}$ — Se remplazan a_1, r y n.

$S_4 = 75$ — Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la suma es 75.

2. Hallar la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica.

$a_n = 1.500(0,75)^n$

Primero se encuentra a_1, como sigue.

$a_1 = 1.500 \cdot (0,75)^1$

$a_1 = 1.125.$

Como $a_1 = 1.125$ y $r = 0,75$.

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{1.125(0,75^6 - 1)}{0,75 - 1} = \frac{3.787.875}{1.024}$$

Por tanto, la suma de los cuatro primeros términos es $\frac{3.787.875}{1.024}$.

Problemas de aplicación de la serie geométrica

En la solución de problemas que requiere la aplicación de progresiones geométricas se realiza la identificación de datos conocidos y se utilizan adecuadamente las fórmulas.

EJEMPLOS

1. **La proyección sobre el crecimiento de la población de una ciudad es de 0,2% anual. Determinar la población de esta ciudad al cabo de 10 años a partir de la fecha del estudio, si la población actual es de 480.000 habitantes.**

$a_1 = 480.000$ Cantidad inicial de habitantes.

0,2% Porcentaje de crecimiento anual.

Primero, se encuentran a_2 y r como sigue:

$$a_2 = 480.000 + 0,2\%(480.000)$$
$$= 480.000 + \frac{0,2}{100}(480.000) = 480.960$$

Como $a_1 = 480.000$ y $a_2 = 480.960$, entonces:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{480.960}{480.000} = 1,002$$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ Fórmula general.

$a_{11} = 480.000(1,002)^{11-1}$ Se remplazan a_1, r y n.

$a_{11} = 489.686,86 \cong 489.687$

Por tanto, la cantidad de habitantes al cabo de 10 años en la ciudad es de 489.687.

2. **Desde su fundación, una empresa ha pagado un total de 46,41 millones de pesos en impuestos. Si en cada año los impuestos pagados han aumentado el 10% respecto al año anterior y el primer año la empresa pagó 10 millones de impuestos, calcular el tiempo de existencia de la empresa.**

La secuencia de los impuestos de la empresa forma una progresión geométrica.

$a_1 = 10$ Cantidad de impuestos inicial.

$S_n = 46,41$ Total de impuestos.

Primero, se halla a_2 y r, así:

$a_2 = 10 + 10\%(10) = 11$ $\qquad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{11}{10} = 1,1$

Como $a_1 = 10$ y $r = 1,1$, entonces:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{10(1,1^n - 1)}{1,1 - 1}$$
$$= \frac{10(1,1^n - 1)}{0,1} = 100(1,1^n - 1)$$

Como $S_n = 46,41$ y $S_n = 100(1,1^n - 1)$, se tiene

$$46,41 = 100(1,1^n - 1) = 100 \cdot 1,1^n - 100$$

$$146,41 = 100 \cdot 1,1^n \Rightarrow 1,1^n = 1,4641 \Rightarrow n = 4$$

Por tanto, el tiempo de existencia de la empresa es 4 años.

3. **Determinar la medida de los ángulos de un cuadrilátero si están en progresión geométrica y la medida del ángulo mayor es ocho veces la del menor.**

Como un cuadrilátero tiene cuatro ángulos, entonces, se tiene que:

a_1: ángulo menor. $\qquad a_4$: ángulo mayor.

$a_4 = 8a_1$ Relación entre los ángulos.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ Fórmula del término general.

$a_4 = a_1 r^3$ Se remplaza n por 4.

Como $a_4 = 8a_1$ y $a_4 = a_1 r^3$, se cumple que:

$8a_1 = a_1 r^3$ Se igualan las expresiones.

$8 = r^3$ Se divide entre a_1.

$r = \sqrt[3]{8} = 2$ Se despeja r.

Como la suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero es 360°, se tiene:

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ Fórmula de la suma.

$S_4 = \frac{a_1(2^4 - 1)}{2 - 1}$ Se remplazan n y r.

$S_4 = 15a_1$ Se resuelven las operaciones.

Además, $S_4 = 360°$, luego,

$15a_1 = 360°$ Se igualan las expresiones.

$a_1 = 24°$ Se divide entre 15.

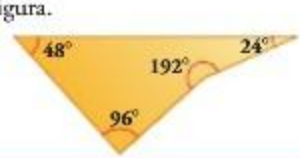
Ahora, se hallan los otros ángulos así:

$a_2 = a_1 \cdot r = 24° \cdot 2 = 48°$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 24° \cdot 4 = 96°$

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 24° \cdot 8 = 192°$

Por tanto, los ángulos son 24°, 48°, 96° y 192° como se muestra en la figura.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

184. Explica cómo hallar la suma de los términos de una progresión geométrica a partir del término general de la progresión.

Halla la suma de los términos que se indican en cada progresión geométrica.

185. Los siete primeros términos de 1, 4, …

186. Los ocho primeros términos de $\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \ldots$

187. Los seis primeros términos de $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$

188. Los cinco primeros términos de $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \ldots$

Encuentra el valor de cada suma.

189. $\frac{12}{5} + 6 + 15 + \ldots + \frac{375}{4}$

190. $304 + 152 + \ldots + 19$

191. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{24}$

Identifica a_1, a_n y n. Luego, calcula la suma en cada sumatoria.

192. $\sum_{n=1}^{6} 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **193.** $\sum_{n=1}^{10} 8.000\left(\frac{2}{5}\right)^{n+2}$

Resuelve.

194. Expresa el número 65 como la suma de tres sumandos que formen una progresión geométrica, tal que el producto del primer sumando por el tercero sea 225.

195. La suma de tres números que están en progresión geométrica es 21 y su producto es 216. ¿Cuáles son estos números?

196. Halla la suma de cifras del mayor término, si los primeros cuatro términos de una progresión geométrica cumplen la siguiente condición: la suma de los extremos es 36 y la suma de sus términos centrales es 24.

197. Verifica con un ejemplo que si $\frac{a}{4}, \frac{1}{b}, 2$ constituyen una sucesión geométrica, entonces, sus recíprocos también forman una sucesión geométrica.

198. Juan solicita un préstamo de 60 millones a un banco que cobra una tasa de interés anual del 15%. ¿Cuánto pagará de interés en total si el préstamo es a 3 años?

Lee y resuelve.

199. La apreciación anual de un apartamento fue la misma en dos años consecutivos. La tabla que aparece a continuación muestra el valor de la propiedad, de acuerdo con el tiempo, donde el tiempo cero corresponde al principio del período.

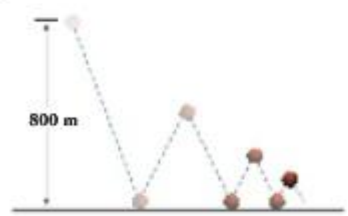
Período	Valor propiedad
1	100
2	$x + 30$
3	$2x - 39$

¿Cuál fue el valor de la vivienda final de este período?

200. El número de bacterias de cierto cultivo aumenta en 15% cada hora. Si inicialmente hay 30.000 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 24 horas? ¿En qué momento las bacterias se quintuplicarán?

Lee y responde.

Una pelota construida con un nuevo material puede rebotar $\frac{4}{5}$ de su altura anterior, cada vez que la pelota golpea contra el piso, como se muestra en la figura.

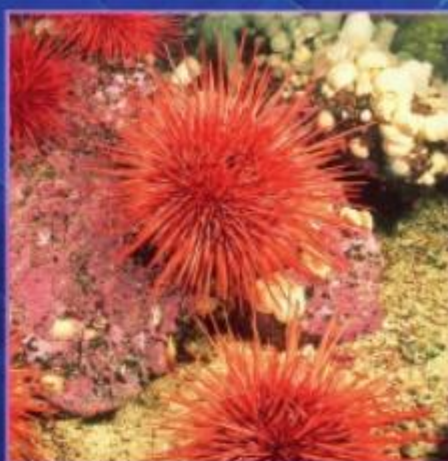


201. ¿Cuál es la altura a la que rebota la pelota después de que pega por quinta ocasión en el piso?

202. ¿Cuál es la altura después del n-ésimo rebote?

203. ¿Cuántos metros ha recorrido la pelota antes de que toque el suelo por quinta vez?

¿Dónde se encuentra la sucesión de Fibonacci?



La sucesión de Fibonacci se puede encontrar en los equinodermos, que son un grupo de animales entre los cuales se encuentran los erizos de mar y las estrellas de mar. En ellos se pueden observar morfologías que siguen esta serie y patrones fractales.

El número de pétalos de una flor es generalmente un número que corresponde a un término de la sucesión de Fibonacci.

El aloe espiral es otro ejemplo de la sucesión de Fibonacci en el mundo vegetal.

La distancia entre las espiras del interior espiralado del caracol Nautilus cumple la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci se hace presente en la música. Béla Bartók la usó como técnica para desarrollar una escala musical a la cual dio el nombre de Fibonacci, en honor del matemático.

Recurso imprimible

La sucesión de Fibonacci está formada por los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... en ella cada término es la suma de los dos términos inmediatamente anteriores. La sucesión de Fibonacci fue creada por Leonardo de Pissa Fibonacci (que significa hijo de Bonacci).

Fibonacci creo la sucesión para describir la solución a un problema de la cría de conejos:

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

EJERCICIOS PARA REPASAR

Sucesiones

Escribe los seis primeros términos de cada sucesión. Luego, determina el valor de cada expresión.

204. $a_n = 5n - 2$; $a_{10} + a_{12}$

205. $a_n = n^2 + 1$; $a_{12} + a_{14}$

206. $a_n = \dfrac{n+3}{5}$; $a_{18} + a_{20}$

Encuentra el término general de cada sucesión.

207. 1; 7; 13; 19; 25; … $a_n =$ ________

208. 3; 6; 11; 18; 27; … $a_n =$ ________

209. 0; 7; 26; 63; … $a_n =$ ________

210. −1; 6; 25; 62; … $a_n =$ ________

Determina el término indicado en cada progresión aritmética.

211. −3; −8; −13; −18; −23; …

$a_{40} =$ ________

212. −17; −11; −5; 1; 7; … a_{52}

$a_{52} =$ ________

Resuelve.

213. Halla el décimo quinto término de una progresión aritmética si el primer término es 15 y la diferencia es 4.

214. Halla el primer término en una progresión aritmética, donde el décimo término es 45 y la diferencia de la progresión es 9.

215. Halla la diferencia entre los términos 37 y 42 de una progresión aritmética si el primer término es −14 y la diferencia de la progresión es 3.

216. Interpola seis medios aritméticos entre 25 y 102.

217. Interpola siete medios aritméticos entre 16 y 72.

218. Interpola nueve medios aritméticos entre 8 y 48.

219. Una piedra cae desde la parte más alta de una torre. Si en el primer segundo cae 1,2 m y en cada segundo siguiente cae 60 cm más que en el segundo anterior, ¿cuántos metros tendrá la torre si la piedra impacta en el piso a los 18 segundos?

Determina el término indicado en cada progresión geométrica.

220. $-7, 21, -63, 189, \ldots\ a_{10}$

221. $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4 \ldots\ a_8$

222. $\frac{3}{5}, -1, \frac{5}{3}, -\frac{25}{9}, \frac{125}{27}, \ldots\ a_{12}$

Lee y resuelve.

223. Halla el primer término en una progresión geométrica si el décimo término es 27 y la razón es 3.

224. Halla la razón de una progresión geométrica, si el décimo primer término es $\frac{1}{96}$ y el primer término es $\frac{32}{3}$.

225. Interpola tres medios geométricos entre $\sqrt{11}$ y 11.

226. Construye una sucesión de cuatro términos, donde el primer término es 6 y el cuarto es 16; para que los tres primeros números formen una progresión aritmética y los tres últimos formen una progresión geométrica.

Series

Resuelve.

227. Observa en la figura la construcción de los números piramidales. Luego, determina el décimo número piramidal.

228. Calcula la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética: 57, 52, 47, 42, …

229. Las longitudes de los lados de un cuadrilátero están en progresión aritmética. Si su perímetro mide 82 cm y la diferencia de los lados opuestos es 6 cm, ¿cuál es la longitud del lado mayor?

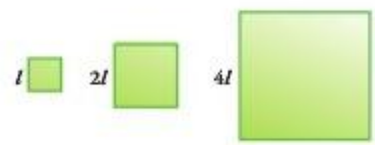
230. Tres amigos se reparten \$278.200 en tres partes que forman una progresión geométrica de razón 3. ¿Cuánto le tocó a cada uno?

231. Halla la suma de los doce primeros términos de la progresión geométrica: $\frac{1}{40}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \ldots$

232. Halla la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica: -5; 15; -45; 135; …

Observa y resuelve.

El lado de un cuadrado se duplica sucesivamente así:



233. ¿Cuál será el área del noveno cuadrado si el lado l del primero mide 2 cm?

Resuelve.

234. Una pelota cae desde 12,8 m de altura. Si cada rebote alcanza la mitad de su altura anterior, ¿en qué rebote alcanzará 32 cm?

235. Determina la suma de los 43 términos de una progresión aritmética si su término central es 16 y su diferencia es 2.

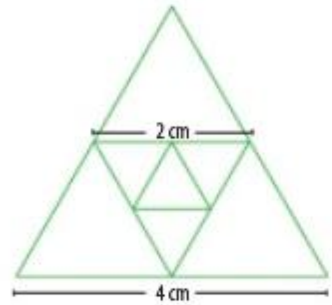
236. Encuentra el mayor de los siete primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los cuatro últimos es igual al doble de la suma de los tres primeros, y que la suma de los siete términos es 84.

237. Encuentra la cantidad de lados que tendrá la figura 20.

PROBLEMAS PARA REPASAR

Los lados de un triángulo equilátero miden 4 cm, por consiguiente, su perímetro es de 12 cm. Se construye otro triángulo equilátero trazando segmentos rectos entre los puntos medios de los lados del primer triángulo.

Este triángulo tiene lados de 2 cm de longitud y su perímetro es 6 cm. Si el procedimiento se repite un número ilimitado de veces, ¿cuál es el perímetro del total de triángulos que se pueden formar?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es el perímetro del total de triángulos que se pueden formar?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se tiene un triángulo equilátero cuyo perímetro es 12 cm.

Al unir mediante segmentos de recta, los puntos medios de cada lado del triángulo, se obtiene otro triángulo equilátero cuyo perímetro es la mitad del perímetro del triángulo anterior.

El proceso se repite indefinidamente.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determina a qué tipo de sucesión, corresponde el perímetro de los triángulos obtenidos.

La sucesión de perímetros es geométrica, término inicial $12 = a_1$ y de razón $r = \frac{1}{2}$.

Segundo, se aplica la fórmula para una serie geométrica, conocidos su valor inicial y su razón.

$$P = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$P = \frac{12\left(\frac{1}{2}^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$P = \frac{12\left(\frac{1}{2}^n - 1\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$P = 24\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se comprueba la fórmula para los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Luego, se tiene que la suma de los perímetros en el paso n viene dada por:

$$24\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n$$

Resuelve las preguntas 238 a 240, de acuerdo con la siguiente información.

Un cuadrado mágico consiste en una tabla cuadrada de enteros positivos, tales que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal tiene como resultado el mismo número. Un ejemplo se ilustra en la siguiente figura:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Adicionalmente, los valores en la fila del medio y ambas diagonales constituyen sucesiones aritméticas.

238. Completa los siguientes cuadrados mágicos.

	11	14
	10	
		15

8		
	9	
	13	

18		20
	13	
6		

239. Escribe los términos de las sucesiones aritméticas.

240. Determina el término general de cada sucesión.

Resuelve.

241. A un ingeniero contratista que incumple con la fecha de terminación de una obra se le penaliza con \$160.000 por cada día de demora, durante los primeros diez días; y por cada día adicional después de este período, la penalización se incrementa en \$32.000 por día sobre la sanción anterior. Si la penalización total fue de \$4.032.000, ¿cuántos días de retraso tuvo la construcción?

Lee y resuelve.

242. Tres números forman una sucesión geométrica y su suma es 35. Si del primer número se resta 1; del segundo, 2, y del tercero, 8, las diferencias resultantes forman una sucesión aritmética. ¿Cuáles son estos números?

243. ¿Cuál es el total de ancestros que tiene una persona en 20 generaciones suponiendo que cada antecesor aparece una sola vez en el árbol genealógico?

244. Una hoja de papel se corta por la mitad, y cada una de las mitades se vuelve a cortar por la mitad, hasta que la operación se haya hecho 30 veces. Después cada trozo de papel se coloca en una pila uno sobre otro. Si la hoja original tenía un espesor de 0,01 cm, ¿cuál será la altura de la pila formada, en kilómetros?

245. Un cuadrado tiene 30 cm de lado. Un nuevo cuadrado se construye conectando los puntos medios de los lados del cuadrado y se sombrean dos triángulos, como en la figura. Este proceso se repite diez veces, ¿cuál es el área total sombreada?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para conocer las posibilidades en el juego de las torres de Hanoi.

Las **torres de Hanoi** son un juego creado por el matemático francés Êduard Lucas a finales del siglo XIX. Este juego consiste en una base con tres varillas verticales fijas. En una de las varillas se apila un número no definido de discos que determinará la complejidad de la solución; por regla general se consideran ocho discos. Por las varillas se debe pasar de un extremo a otro, un cierto número de discos de diferentes tamaños. Las condiciones que se deben cumplir son las siguientes:

- Cada vez se debe mover solo un disco.
- Ningún disco puede descansar sobre uno de menor tamaño.
- Se puede desplazar solo el disco que se encuentra más arriba en cada varilla.

Observa los movimientos realizados en una torre con tres discos:

Tres discos

Movimiento uno

Movimiento dos

Movimiento tres

Movimiento cuatro

Movimiento cinco

Movimiento seis

Movimiento siete

Solución del juego de las torres de Hanoi con tres discos.

Con el uso de las matemáticas se puede predecir el mínimo número de movimientos necesarios N para pasar de un extremo a otro n discos de diferente tamaño. La cantidad de movimientos se puede calcular mediante la expresión: $N = 2^n - 1$.

1. **La leyenda dice que los monjes en la India debían llevar de un extremo a otro 64 discos de oro. Si en cada movimiento tardan un segundo, ¿les alcanzará la vida para pasar todos los discos?**
2. **Responde teniendo en cuenta la siguiente información.**

   En una torre de Hanoi, el disco número uno (es decir, el de menor tamaño) se desplaza en los movimientos 1, 3, 5, 7, 9, …

   a. ¿Qué tipo de progresión se muestra en los movimientos del disco uno?

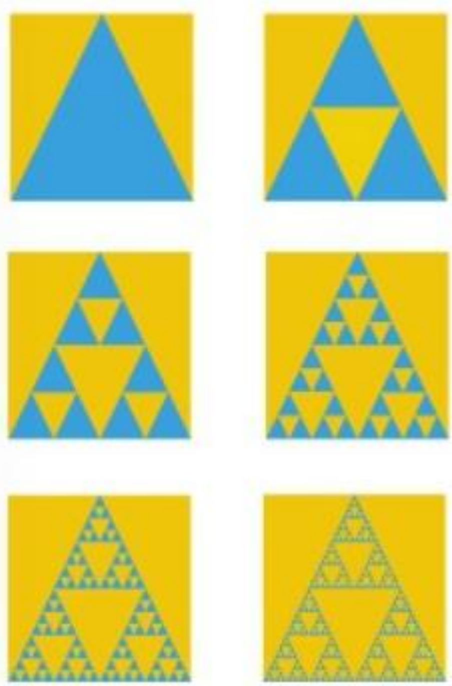
   b. ¿Cuál es la diferencia de la progresión?
3. **En una torre de Hanoi con cuatro discos, ¿cuántas veces se mueve cada disco?**
4. **En una torre de Hanoi con cinco discos, ¿cuántas veces se mueve cada disco?**

...También sirve para saber cómo fabrican las antenas de los celulares de última tecnología.

La tecnología de los medios de comunicación utiliza cada vez más y en mayor escala, los conocimientos matemáticos. Eso se puede ver, por ejemplo, en el diseño de las antenas fractales de los teléfonos celulares.

Una antena fractal es un objeto que, como dice su nombre, tiene forma fractal y se utiliza como antena receptora de las señales en los equipos celulares modernos.

Algunas antenas de recepción de señal tienen la forma del *triángulo de Sierpinski*. Este es un fractal que se forma a partir de un triángulo rectángulo de la siguiente manera:



Se parte de la iteración $n = 0$ que es un triángulo equilátero que mide de lado la unidad.

Luego, se continúa con la iteración $n = 1$, que se forma tomando los puntos medios de cada lado, y después se construye un triángulo equilátero invertido, de lado $\frac{1}{2}$, y se recorta.

Se continúa con la iteración $n = 2$, y se repite el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado $\frac{1}{2}$ que quedan. Luego, se recortan tres triángulos invertidos de lado $\frac{1}{4}$. En la figura 1.

Se observa hasta la quinta iteración sucesiva. Si se repite este proceso indefinidamente se obtiene el triángulo de Sierpinski.

Como se puede observar, los triángulos azules van aumentando a medida que se dividen hasta llegar al quinto paso.

Este diseño es de gran funcionalidad para una antena receptora por varias razones:

La primera, porque en realidad la antena se convierte en muchas antenas pequeñas que perciben diferentes señales sin interferir una en la otra. Así tiene un mayor rango de recepción de la señal recibida.

La segunda razón es que esta forma geométricamente regular permite ocupar el espacio de una mejor forma para la gran cantidad de pequeñas antenas receptoras que la componen.

La tercera razón es que su forma genera capacitancia e inductancia adicionales, lo cual evita la adición de elementos externos para aumentar la anchura de la banda de frecuencias que pueda recibir.

1. **Responde. ¿Cuántos triángulos azules hay en cada división del triángulo de Sierpinski?**
2. **Escribe la expresión que permite calcular el número de triángulos para cualquier división y comprueba que funciona para las divisiones del triángulo.**
3. **Determina el número de triángulos azules que se forman en la décima división, en el proceso de formación del triángulo de Sierpinski.**

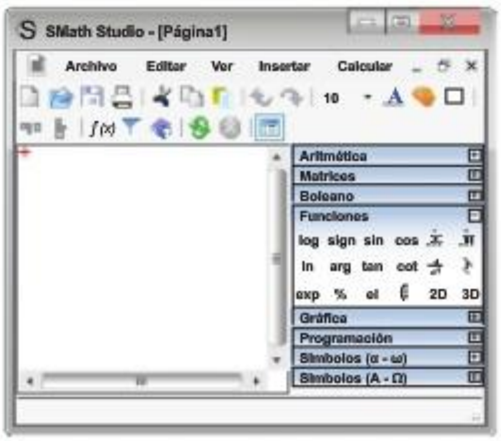
Trabaja con Smath Studio

Objetivo: calcular el valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{7} n$ y verificar que $\sum_{n=1}^{3}(n \cdot (n+1)) \neq \left(\sum_{n=1}^{m} n\right)\left(\sum_{n=1}^{m}(n+1)\right)$.
Reconocer las propiedades de las sumatorias y el comportamiento de la sucesión de números reales.

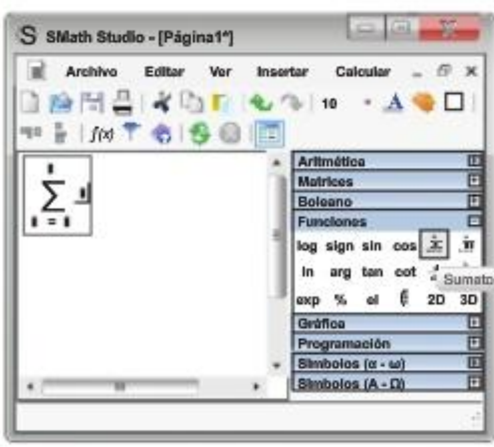
Descripción: calcular el valor de algunas sumatorias mediante el uso de Smath Studio. Verificar algunas relaciones entre operaciones con sumatorias.

Para acceder a Smath Studio, ingresa y descarga el programa en www.smathstudio.com

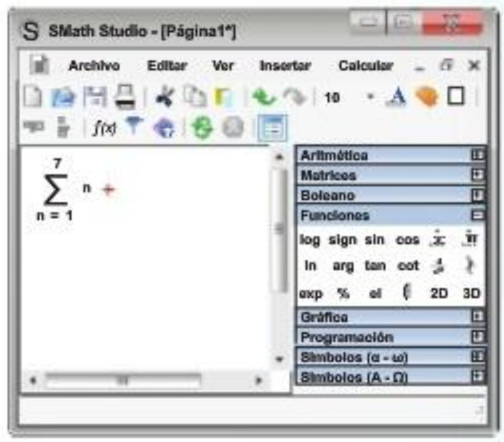
1. Haz clic en el icono del programa **Smath Studio**, para que abra una ventana como la siguiente:



2. Ubícate en la parte inferior derecha, en donde aparece la palabra **Funciones**. Y haz clic en el signo de sumatoria. Verás que aparece, en la zona blanca, el signo de sumatoria como se observa a continuación.

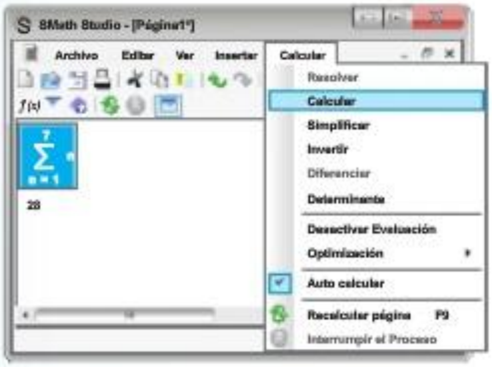


3. Haz clic sobre los cuadros que aparecen en negro y escribe los datos que corresponden a la sumatoria $\sum_{n=1}^{7} n$, es decir, en la parte superior se escribe 7, en la parte inferior se escribe la expresión $n = 1$ y frente al signo de sumatoria se escribe n, así:



4. Para calcular el valor de la sumatoria, haz doble clic sobre la fórmula que acabaste de escribir, de esta manera quedará activa.

5 Haz clic en la opción **Calcular** en la barra de herramientas Calcular, de esta manera se podrá observar el resultado de la sumatoria.



6 Realiza la operación $\sum_{n=1}^{7} n$ en tu cuaderno.

Luego, compárala con el resultado que obtuviste con el programa.

Responde: ¿son iguales los resultados?

7 Utiliza Smath Studio para hallar el resultado de las siguientes sumatorias.

$$\sum_{n=1}^{4} (2n+3) \qquad \sum_{n=1}^{5} n^2 + 3n + 1$$

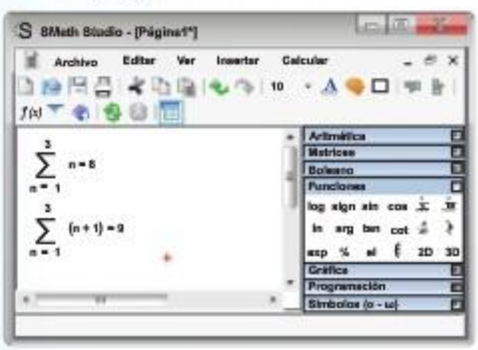
$$\sum_{n=7}^{12} (3n-2) \qquad \sum_{n=1}^{7} n^2$$

8 Verifica que:

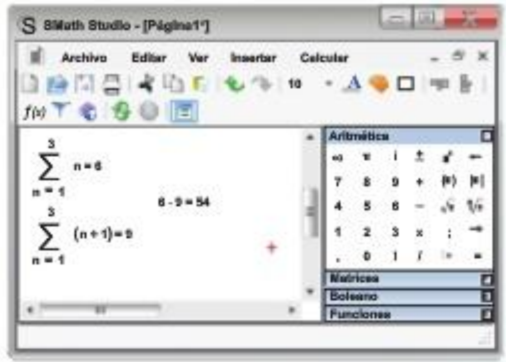
$$\sum_{n=1}^{m} a_n \cdot b_n \neq \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{m} b_n\right),$$

utilizando Smath Studio con dos sumatorias cualesquiera.

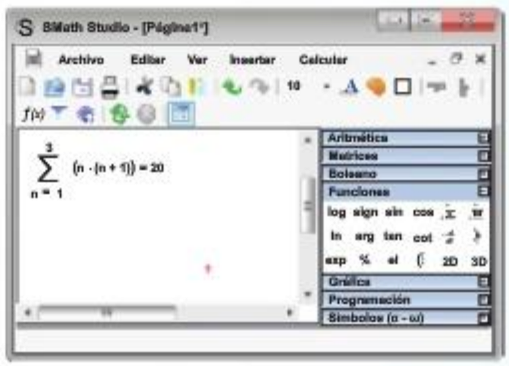
Primero, digita las dos sumatorias.



Luego, calcula el producto con los resultados de las sumatorias. Para ello, utiliza la ventana de aritmética. Digita la multiplicación y calcula así:



Después, digita la siguiente sumatoria.



Finalmente, comprueba los resultados.

Como $54 \neq 20$, entonces, se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{3} (n \cdot (n+1)) \neq \left(\sum_{n=1}^{m} n\right)\left(\sum_{n=1}^{m} (n+1)\right)$$

9 Utiliza Smath Studio y las sumatorias:

$$\sum_{n=1}^{5} 3n,\ \sum_{n=1}^{5} (n^2+1) \text{ y } c = 2,$$

para verificar lo siguiente:

a. $\displaystyle \sum_{n=1}^{m} a_n \cdot b_n \neq \frac{\sum_{n=1}^{m} a_n}{\sum_{n=1}^{m} b_n}$

b. $\displaystyle \sum_{n=1}^{m} (a_n)^c \neq \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)^c$

8 Razonamiento

Estándares: pensamientos espacial y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Identificar cuáles son los distintos métodos que se utilizan para demostrar un teorema.
- Aplicar el teorema de Tales y los criterios de semejanza de triángulos.
- Reconocer los elementos y las propiedades de la circunferencia.
- Calcular el área de regiones circulares.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

3 Multimedia
1 Galerías
5 Actividades
1 Audios
8 Imprimibles
5 Enlaces web

Lo que sabes...

1. Halla el valor de x en las siguientes proporciones.

a. $\frac{1}{2} = \frac{3}{x}$

b. $\frac{2}{5} = \frac{x}{20}$

c. $\frac{18}{x} = \frac{2}{7}$

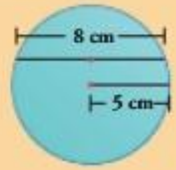
d. $\frac{x}{12} = \frac{25}{60}$

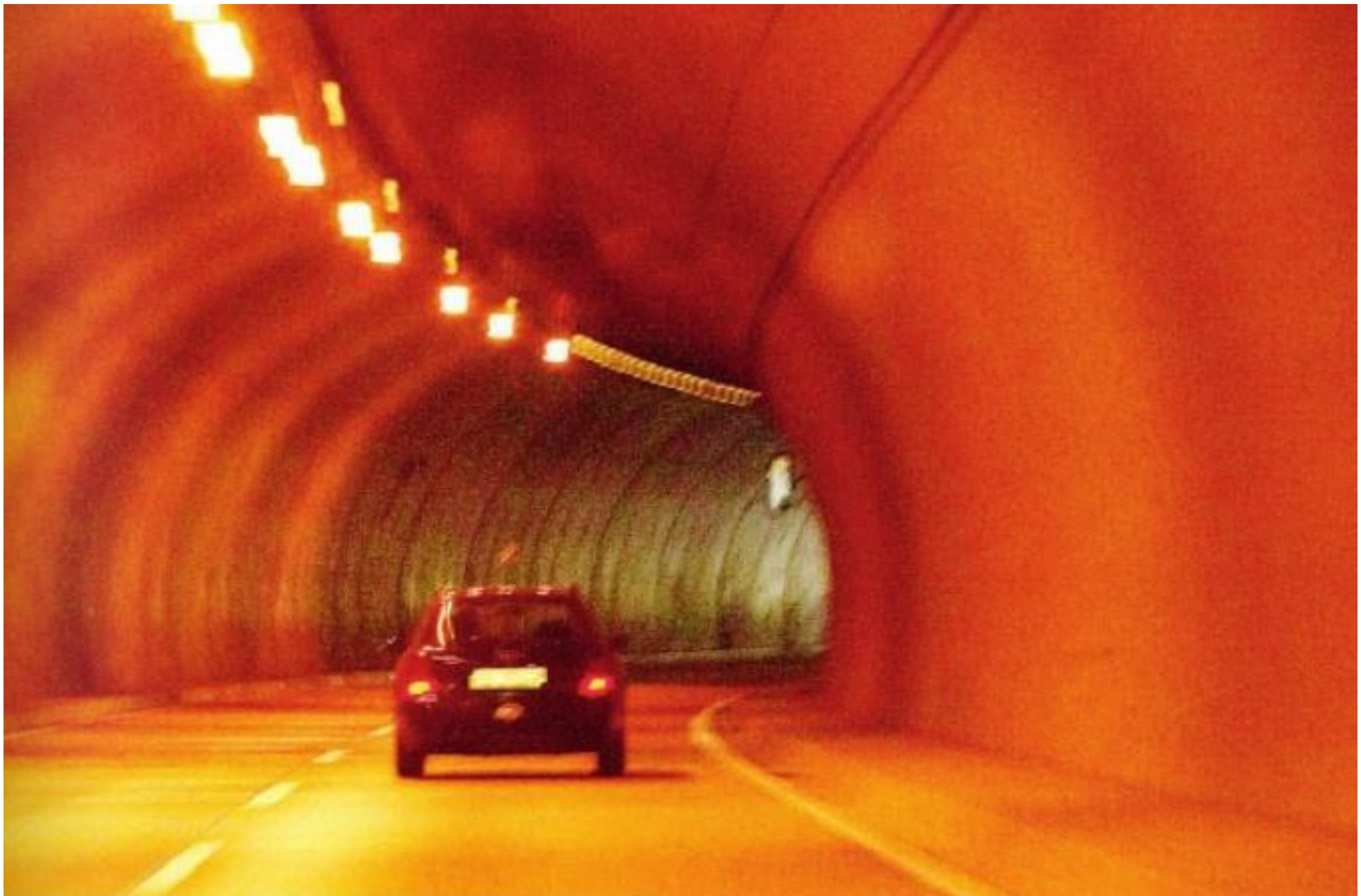
2. Escribe una proporción para cada situación. Luego, resuelve.

a. La razón entre dos números es 2:3. Si el número menor es 50, ¿cuál es el número mayor?

b. En un salón hay 4 niños por cada 5 niñas. Si en total hay 50 niñas, ¿cuántos niños hay?

3. Escribe el valor del radio y del diámetro de la siguiente circunferencia.





Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para comprender la construcción de túneles en ingeniería civil.

En nuestro país las formaciones rocosas y las cordilleras que lo atraviesan conforman el 33% del territorio, ya que este cuenta con un gran sistema montañoso andino formado por las tres cordilleras y los valles interandinos que lo rodean. Por esta razón, la comunicación terrestre entre ciudades se hace difícil. Para ello, los ingenieros, en los últimos años, han decidido construir diferentes túneles en el territorio nacional.

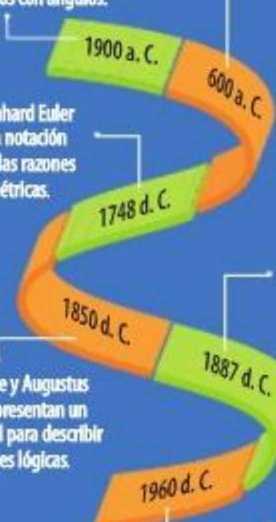
Lee más acerca de este tema en la página 266.

Cronología del estudio del razonamiento

Babilonia. En la tablilla Plimpton 322 se muestran registros del movimiento de los planetas relacionados con ángulos.

Grecia. Tales de Mileto explica teoremas sobre triángulos semejantes.

Berlín. Leonhard Euler introduce la notación moderna de las razones trigonométricas.



Italia. El matemático y filósofo Giuseppe Peano publica su primer libro de lógica matemática.

George Boole y Augustus de Morgan presentan un sistema formal para describir operaciones lógicas.

Estados Unidos. Lofti Asker Zadeh crea la lógica difusa.

1. Proposiciones lógicas

La lógica proposicional se aplica en todas las áreas del conocimiento para deducir nuevas ideas a partir de otras previamente establecidas. Particularmente, la lógica proposicional se aplica en computación, ya que con esta se puede analizar y sintetizar el tipo de información que manejan los circuitos lógicos.

Una **proposición lógica** es una expresión o un enunciado del cual se puede afirmar si es verdadero o falso.

Las proposiciones se representan con las letras p, q, r y s en minúscula. Cuando se determina si una proposición es verdadera o falsa, se le asigna un **valor de verdad**.

Las proposiciones se clasifican en **proposiciones simples** y **proposiciones compuestas**. Las proposiciones simples están conformadas por un solo enunciado y las proposiciones compuestas están conformadas por más de una proposición simple, unidas por conectivos lógicos.

En matemáticas se utilizan las siguientes proposiciones:

Postulado: es una proposición cuya veracidad se acepta sin demostración. Por ejemplo, la proposición "si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta", es un postulado.

Conjetura: es una proposición que se supone que es verdadera, pero que aún no ha sido demostrada o refutada. Por ejemplo, la proposición "todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos", es conocida como la conjetura de Goldbach.

Definición: es una proposición que describe, en forma clara y precisa, las características y propiedades de un objeto matemático. Por ejemplo, la proposición "dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es igual a 180°", es una definición.

Teorema: es una proposición que se demuestra a partir de postulados, definiciones y teoremas previamente demostrados. Por ejemplo, la proposición "la medida de un ángulo externo de un triángulo es mayor que las medidas de sus ángulos internos no contiguos", es un teorema.

EJEMPLOS

Determinar si los siguientes enunciados son proposiciones lógicas.

a. Las redes sociales han cambiado la forma de comunicación entre las personas.

Sí es una proposición lógica, porque se puede establecer si es falso o verdadero que las redes sociales han cambiado o no la comunicación entre las personas.

b. ¡Apúrate, vamos a llegar tarde!

No es una proposición, porque es una exclamación y, por tanto, no se puede determinar si es verdadera o falsa.

c. ¿Vas a ir a la fiesta?

No es una proposición, porque es una pregunta y, por tanto, no se puede determinar si es verdadera o falsa.

Historia de las matemáticas

Euclides y el razonamiento deductivo

Euclides fue un matemático griego que escribió los *Elementos*, un tratado de geometría y teoría de números que ha perdurado por más de dos mil años. En los *Elementos* se presenta, por primera vez, la geometría en forma organizada y lógica, partiendo de algunos postulados y demostrando los teoremas mediante el razonamiento deductivo.

Recurso imprimible

Recuerda que…

En una proposición lógica no puede existir ambigüedad acerca de su valor de verdad, es decir, que siempre se debe poder determinar si es verdadera o falsa.

1.1 Conectivos lógicos

Actividad

Los **conectivos lógicos** o **conectores** son palabras que se utilizan para unir dos proposiciones simples y construir una proposición compuesta.

Cada conectivo lógico está asociado a una determinada operación lógica. Las operaciones lógicas permiten determinar el valor de verdad de una proposición compuesta a partir del valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman. Si p y q son proposiciones simples, se tiene que:

Conectivo lógico	Notación	Operación lógica	Proposición compuesta	Se lee
y	$\wedge$	Conjunción	$p \wedge q$	p y q
o	$\vee$	Disyunción	$p \vee q$	p o q
Si… entonces	$\Rightarrow$	Condicional	$p \Rightarrow q$	Si p entonces q
Si y sólo si	$\Leftrightarrow$	Bicondicional	$p \Leftrightarrow q$	p si y sólo si q

Otra operación lógica es la **negación**, la cual permite cambiar el valor de verdad de una proposición. Para simbolizar la negación de una proposición p se escribe $\neg p$ y se lee "no p".

EJEMPLOS

1. **Escribir las proposiciones compuestas a partir de las siguientes proposiciones simples.**

p: El $\triangle ABC$ es equilátero.

q: Todos los ángulos interiores del $\triangle ABC$ miden 60°.

a. $p \wedge q$

La proposición compuesta $p \wedge q$ es: "el $\triangle ABC$ es equilátero y todos los ángulos interiores del $\triangle ABC$ miden 60°".

b. $q \Rightarrow p$

La proposición compuesta $q \Rightarrow p$ es: "si todos los ángulos interiores del $\triangle ABC$ miden 60°, entonces, el $\triangle ABC$ es equilátero".

En esta proposición q: "todos los ángulos interiores del $\triangle ABC$ miden 60°" es el antecedente, y la proposición p: "el $\triangle ABC$ es equilátero" es el consecuente.

2. **Simbolizar la siguiente proposición.**

Si Felipe pasa el año, entonces, irá a Aruba de vacaciones y si Felipe no pasa el año, entonces, deberá estudiar en vacaciones y no irá a Aruba.

Primero, se simbolizan todas las proposiciones simples.

p: Felipe pasa el año.

q: Felipe irá a Aruba de vacaciones.

r: Felipe deberá estudiar en vacaciones.

Luego, se simbolizan todas las proposiciones condicionales, teniendo en cuenta las proposiciones simples y las proposiciones compuestas que las conforman.

$p \Rightarrow q$: Si Felipe pasa el año, entonces, irá a Aruba de vacaciones.

$\neg p \Rightarrow (r \wedge \neg q)$: Si Felipe no pasa el año, entonces, deberá estudiar en vacaciones y no irá a Aruba.

Finalmente, se simboliza la conjunción entre las proposiciones condicionales.

$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow (r \wedge \neg q))$

1.2 Cuantificadores

> **Recuerda que...**
> Siempre se debe indicar el conjunto universal al que se hace referencia, ya que para los elementos de un conjunto la proposición puede ser verdadera, pero para los elementos de otro conjunto la proposición puede ser falsa.

Un **cuantificador** es una expresión que hace referencia a la cantidad de elementos de un conjunto universal que cumplen una propiedad.

Los principales cuantificadores son:

Cuantificador universal: indica que todos los elementos de un conjunto universal cumplen una propiedad. Se simboliza $\forall$ y se lee "para todo". Por ejemplo, la proposición "todo triángulo equilátero es equiángulo" se simboliza $(\forall x)(p(x))$, donde x representa los triángulos equiláteros y p es la propiedad ser *equiángulo*.

Cuantificador existencial: indica que algunos elementos de un conjunto universal cumplen una propiedad. Se simboliza $\exists$ y se lee "existe". Por ejemplo, la proposición "algunos números enteros son negativos" se simboliza $(\exists x)(p(x))$, donde x representa los números enteros y p es la propiedad *ser negativo*.

Cuando se quiere indicar que "existe un único elemento" que cumple una propiedad se utiliza el símbolo $\exists!$.

Para negar una proposición con el cuantificador universal se utiliza el cuantificador existencial, y viceversa, para negar una proposición con el cuantificador existencial se utiliza el cuantificador universal. Simbólicamente la negación de una proposición con cuantificadores se representa así:

$$\neg((\forall x)(p(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(p(x))) \quad \text{y} \quad \neg((\exists x)(p(x))) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg(p(x)))$$

EJEMPLOS

1. **Utilizar cuantificadores para negar cada una de las siguientes proposiciones. Luego, determinar su valor de verdad.**

a. Existen triángulos que son equiláteros.

Como la proposición utiliza el cuantificador existencial, su negación debe expresarse con el cuantificador universal. Por tanto, se tiene que la negación de la proposición es "todo triángulo es no equilátero", cuyo valor de verdad es falso.

b. La medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Como en esta proposición se utiliza un cuantificador universal, su negación debe escribirse con el cuantificador existencial. Por tanto, la negación de la proposición es "existen triángulos en los que la suma de sus ángulos internos no es 180°". En este caso, la negación de la proposición es falsa.

2. **Simbolizar la proposición "algunos animales son mamíferos" a partir de la propiedad $q(x)$: x es mamífero, donde $x \in A$ y A es el conjunto de animales. Luego, escribir su negación.**

Primero, se simboliza la proposición con el cuantificador existencial $(\exists x \in A)(q(x))$.

Luego, se niega la proposición.

La negación $\neg((\exists x \in A)(q(x)))$ que equivale a $(\forall x \in A)(\neg(q(x)))$.

Finalmente, se tiene que la negación de la proposición en lenguaje natural es "todos los animales no son mamíferos" o "ningún animal es mamífero".

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones.

1. Sube al cuarto piso.
2. El triángulo ABC es equilátero.
3. ¿Qué es un ángulo obtuso?
4. La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es igual a 90°.
5. Un triángulo es isósceles si tiene únicamente dos lados congruentes.

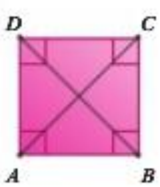
Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

6. Un polígono cóncavo tiene un ángulo interno cuya medida es mayor que 180°.
7. Un ángulo recto mide 75°.
8. Un triángulo puede tener un ángulo interno mayor que 180°.

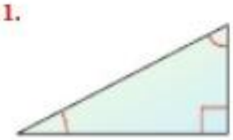
Escribe dos proposiciones verdaderas teniendo en cuenta cada figura.

9.

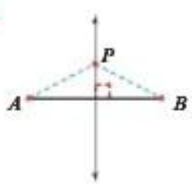
10.



11.



12.



Escribe en lenguaje natural las siguientes proposiciones compuestas.

p: $ABCD$ es un cuadrilátero.

q: Tiene solo un par de lados paralelos.

r: Es un trapecio.

s: Tiene dos lados congruentes.

t: Es un triángulo isósceles.

13. $p \wedge s$
14. $r \wedge q$
15. $p \wedge r$
16. $r \vee t$
17. $t \Rightarrow \neg q$
18. $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$

Simboliza cada proposición compuesta a partir de las siguientes proposiciones simples.

p: Sus ángulos internos son congruentes entre sí.

q: Es un triángulo equilátero.

r: Es un cuadrado.

s: Tiene cinco lados.

19. Tiene cinco lados y sus ángulos internos son congruentes entre sí.
20. Es un triángulo equilátero o es un cuadrado.
21. Si tiene cinco lados, entonces, no es un cuadrado.
22. Si sus ángulos internos son congruentes entre sí, entonces, es un cuadrado o es un triángulo equilátero.
23. Es un cuadrado si y sólo si sus ángulos internos son congruentes y no tiene cinco lados.

Escribe cada proposición compuesta $p \Rightarrow q$ e indica cuál es el antecedente y cuál es el consecuente. Luego, determina el valor de verdad.

24. El suplemento de un ángulo agudo es agudo.
25. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.
26. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
27. Dos ángulos congruentes son opuestos por el vértice.

Simboliza la negación de cada proposición. Luego, determina su valor de verdad.

28. Todo polígono es convexo.
29. Algunos polígonos son cóncavos.
30. Todo polígono regular es convexo.
31. Todo polígono convexo es cóncavo.
32. Algunos polígonos no son regulares.

33. **Resuelve. Francisco le muestra a Juan el retrato de un niño mientras le dice: "no tengo hermanos ni hermanas, pero el padre de este niño es el hijo de mi padre".**

¿Quién es el niño de la fotografía?

2. Teoría de la demostración

Recurso imprimible

Todo teorema se puede expresar mediante una proposición de la forma $p \Rightarrow q$, en donde p es la hipótesis del teorema y q es la tesis o conclusión. Para demostrar un teorema se aplica uno de los siguientes métodos de razonamiento: método directo o método indirecto.

Matemática*mente*

El siguiente teorema es conocido como el *último teorema de Fermat*:

"No existen números enteros x, y y z tales que:

$$x^n + y^n = z^n$$

Donde n es un número entero mayor que 2".

Escribe el *último teorema de Fermat* de la forma:

$$p \Rightarrow q.$$

2.1 Método directo

Para demostrar un teorema por este método, se acepta la validez de la hipótesis y a partir de esta, de los postulados, las definiciones y los teoremas demostrados, se prueba la validez de la tesis.

Cuando se demuestra un teorema por el método directo se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se determinan claramente la hipótesis y la tesis del teorema que se va a demostrar.
- **Segundo,** se realiza una construcción geométrica a partir de la hipótesis y la tesis. En esta se incluyen las construcciones auxiliares que apoyen la demostración del teorema.
- **Luego,** se relaciona la hipótesis con las definiciones, postulados y teoremas demostrados anteriormente, para establecer una sucesión lógica de proposiciones que permitan comprobar la validez de la tesis. Generalmente, este paso de la demostración se presenta en dos columnas: en la primera, se escriben las proposiciones verdaderas que permiten comprobar la validez de la tesis y, en la segunda, se escribe la justificación correspondiente.
- **Finalmente,** se afirma la tesis.

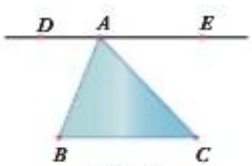


Figura 1

EJEMPLO

Demostrar el siguiente teorema utilizando el método directo.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Primero, se determinan claramente la hipótesis y la tesis del teorema. En este caso son:

Hipótesis: se da $\triangle ABC$

Tesis: $m\angle ABC + m\angle CAB + m\angle ACB = 180°$

Segundo, se realiza una construcción geométrica.

Para este teorema, se construye el triángulo con vértices A, B y C, y se traza una recta DE que pase por A y que sea paralela al lado BC (figura 1).

Luego, se escriben las proposiciones que permiten probar la validez de la tesis con sus respectivas justificaciones.

Estas proposiciones se muestran en la tabla de la siguiente columna.

Proposición	Justificación
1. $\overleftrightarrow{DE}$ pasa por A y $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$.	Postulado de las paralelas
2. $m\angle BAD + m\angle BAE = 180°$.	Son ángulos suplementarios
3. $m\angle BAD = m\angle ABC$ y $m\angle CAE = m\angle ACB$.	Son ángulos alternos internos entre paralelas
4. $m\angle BAE = m\angle CAB + m\angle CAE$.	Postulado de la adición de ángulos
5. $m\angle BAD + m\angle CAB + m\angle CAE = 180°$.	Por los pasos 2 y 4
6. $m\angle ABC + m\angle CAB + m\angle ACB = 180°$.	Por los pasos 3 y 5

Finalmente, se tiene que la suma de los ángulos internos de un $\triangle ABC$ es igual a 180°.

2.2 Método indirecto

Los principales métodos indirectos de demostración son la contrarrecíproca y la reducción al absurdo.

Contrarrecíproca

La **contrarrecíproca** de una proposición de la forma $p \Rightarrow q$ es la proposición $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Por ejemplo, dada la proposición $p \Rightarrow q$: "si llueve, entonces, no voy a cine", su contrarrecíproca es $\sim q \Rightarrow \sim p$: "si voy a cine, entonces, no llueve". Para demostrar un teorema utilizando la contrarrecíproca, se establece como hipótesis la negación de la tesis y se concluye la negación de la hipótesis, es decir, se demuestra el teorema $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Reducción al absurdo

Para demostrar un teorema de la forma $p \Rightarrow q$ utilizando el método de **reducción al absurdo**, se asume como verdadera la proposición $\sim q$ y se establece una contradicción, con lo cual se concluye que $\sim q$ debe ser falsa y, en consecuencia, q debe ser verdadera.

Recuerda que...

La tabla de verdad de la proposición condicional es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2.3 El contraejemplo

Un **contraejemplo** es un ejemplo que se utiliza para refutar una proposición que incluye un cuantificador universal y que se presume que es falsa.

EJEMPLO

Demostrar el siguiente teorema utilizando la proposición contrarrecíproca:

Si el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ son suplementarios, entonces, el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ no son agudos ambos.

El teorema es de la forma $p \Rightarrow q$, donde p es "el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ son suplementarios" y q es "el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ no son agudos ambos". Así, la proposición contrarrecíproca es:

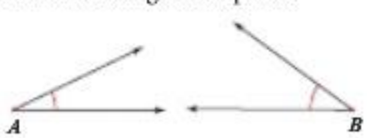
$\sim q \Rightarrow \sim p$: Si el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ son agudos ambos, entonces, el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ no son suplementarios.

Para demostrar la proposición contrarrecíproca se realizan los siguientes pasos:

Primero, se determinan la hipótesis y la tesis.

Hipótesis: el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ son agudos.

Tesis: el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ no son suplementarios.



Luego, se escribe la secuencia de proposiciones con las justificaciones correspondientes.

Proposición	Justificación
1. $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son agudos.	Hipótesis
2. $m\measuredangle A < 90°$ y $m\measuredangle B < 90°$.	Definición de ángulos agudos
3. $m\measuredangle A + m\measuredangle B < 180°$.	Propiedades de las desigualdades
4. El $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ no son suplementarios.	Definición de ángulos suplementarios

Finalmente, se demuestra que el teorema "si el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ son suplementarios, entonces, el $\measuredangle A$ y el $\measuredangle B$ no son agudos ambos", es verdadero porque su contrarrecíproco es verdadero.

2.4 Ejercicios resueltos de demostraciones

Para comprobar la validez de una proposición se aplica el método directo o los métodos indirectos de demostración o se busca un contraejemplo si se presume que es falsa.

EJEMPLOS

1. **Demostrar el siguiente teorema utilizando el método directo.**

   Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.

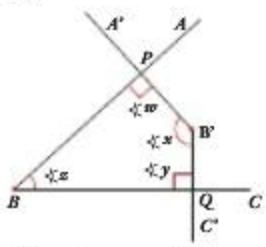
Primero, se establecen la hipótesis y la tesis.

Hipótesis: $\measuredangle ABC$ es agudo y $\measuredangle A'B'C'$ es obtuso.

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B'A'} \text{ y } \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{B'C'}$$

Tesis: $m\measuredangle ABC + m\measuredangle A'B'C' = 180°$.

Segundo, se construye el ángulo agudo y el ángulo obtuso de tal forma que sus lados correspondientes sean perpendiculares.



Luego, se escriben las proposiciones con su respectiva justificación.

Proposición	Justificación
1. $\measuredangle ABC$ es agudo y $\measuredangle A'B'C'$ es obtuso.	Hipótesis
2. $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B'A'}$ y $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{B'C'}$	Hipótesis
3. $BPB'Q$ es un cuadrilátero.	Definición de cuadrilátero
4. $m\measuredangle w + m\measuredangle x + m\measuredangle y + m\measuredangle z = 360°$.	Suma de los ángulos internos de un cuadrilátero
5. $m\measuredangle w = 90°$ y $m\measuredangle y = 90°$	Por 2
6. $m\measuredangle x + m\measuredangle z = 180°$.	Por 4 y 5

Finalmente, $m\measuredangle ABC + m\measuredangle A'B'C' = 180°$, porque $m\measuredangle ABC = m\measuredangle z$ y $m\measuredangle A'B'C' = m\measuredangle x$ y, por tanto, los ángulos son suplementarios.

2. **Utilizar el método de reducción al absurdo para demostrar el siguiente teorema: un triángulo tiene a lo más un ángulo obtuso.**

Primero, se establece cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

Hipótesis: se da el $\triangle ABC$.

Tesis: el $\triangle ABC$ tiene a lo más un ángulo obtuso.

Luego, se niega la tesis, para ello, se supone que un triángulo tiene más de un ángulo obtuso y se desarrolla la demostración.

Proposición	Justificación
1. $\triangle ABC$	Hipótesis
2. $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son obtusos.	Negación de la tesis
3. $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$.	Propiedad de los triángulos
4. $m\measuredangle A > 90°$ y $m\measuredangle B > 90°$.	Por 2
5. $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C > 180°$.	Propiedades de las desigualdades

Finalmente, se tiene que las proposiciones 3 y 5 se contradicen entre sí, porque la suma de las medidas de los tres ángulos no puede ser al mismo tiempo igual a 180° y mayor que 180°. Esta contradicción surge de suponer que un triángulo tiene más de un ángulo obtuso. Por tanto, se puede concluir que un triángulo tiene a lo más un ángulo obtuso.

3. **Proponer un contraejemplo para refutar la siguiente proposición.**

   No existen cuadriláteros en los que solo uno de sus ángulos internos sea un ángulo recto.

El contraejemplo para refutar esta proposición se basa en la construcción de un cuadrilátero que tenga solo un ángulo interno recto. Para realizar esta construcción se construye un $\measuredangle PQR$ recto y se traza un $\measuredangle PTR$ agudo, de tal forma que su vértice T esté en el interior del $\measuredangle PQR$.

Por tanto, el cuadrilátero $PQRT$ refuta la proposición.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Escribe los siguientes teoremas de la forma $p \Rightarrow q$.

34. Los ángulos alternos internos entre dos rectas paralelas cortadas por una secante son congruentes.

35. Dos circunferencias diferentes pueden intersecarse a lo más en dos puntos.

36. Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.

37. Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

38. Un teorema se puede expresar de la forma $p \Rightarrow q$ donde q es la hipótesis y p es la tesis.

39. La contrarrecíproca de $r \Rightarrow s$ es $\neg s \Rightarrow \neg r$.

40. Un contraejemplo que refuta la proposición "todos los múltiplos de 3 son impares" es el número 18.

41. Un contraejemplo que refuta la proposición "todos los cuadriláteros son paralelogramos" es el rombo.

42. Completa la demostración del siguiente teorema.

"La diagonal de un paralelogramo determina dos triángulos congruentes".

Proposición	Justificación
$\overline{AC}$ es una diagonal del paralelogramo $ABCD$.	Hipótesis
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	
$\measuredangle CAD \cong \measuredangle ACB$	
$\measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB$	
	Propiedad reflexiva de la congruencia
$\triangle ABC \cong \triangle CDA$	

43. Demuestra el siguiente teorema por el método directo.

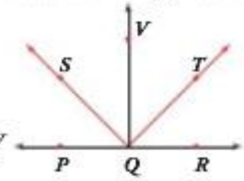
"Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces, el cuadrilátero es un rombo".

Lee la hipótesis y la tesis en cada caso. Luego, realiza la demostración.

44. Hipótesis: $\overleftrightarrow{VQ} \perp \overleftrightarrow{PR}$

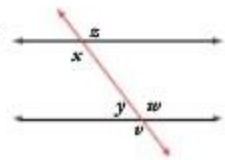
$\measuredangle PQS \cong \measuredangle RQT$

Tesis: $\measuredangle SQV \cong \measuredangle TQV$



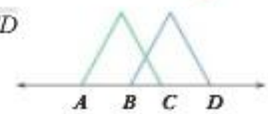
45. Hipótesis: el $\measuredangle x$ y el $\measuredangle y$ son suplementarios.

Tesis: $\measuredangle z \cong \measuredangle w$



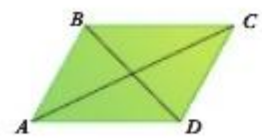
46. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



Resuelve.

47. Plantea un teorema que se relacione con el paralelogramo $ABCD$. Luego, demuéstralo.



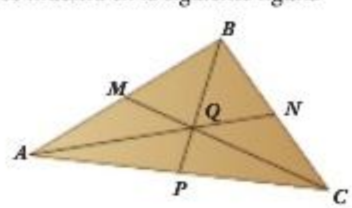
Demuestra los siguientes teoremas a partir de la proposición contrarrecíproca.

48. Si dos rectas se intersecan, su intersección contiene un único punto.

49. Si los lados opuestos de un cuadrilátero no son congruentes, entonces, el cuadrilátero no es un paralelogramo.

Lee y resuelve.

Seis personas recibieron un terreno de forma triangular y decidieron repartirlo a partir de sus medianas, como se muestra en la siguiente figura.



Donde M, N y P son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

50. Demuestra que cada una de las seis personas recibió un terreno de igual área que el terreno de las demás.

3. Razones y proporciones

Historia de las matemáticas

Rectángulo áureo

Los griegos de la Antigüedad consideraban el rectángulo áureo como una de las figuras más bellas y fascinantes, y lo utilizaron en la construcción de monumentos y templos como el Partenón.

El rectángulo áureo es un cuadrilátero cuyos lados están en una proporción igual a la razón áurea.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

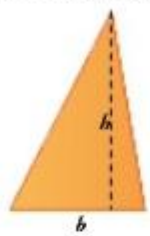
El estudio de las razones y de las proporciones es la base para la solución de problemas geométricos relacionados con la medición y semejanza de figuras utilizadas para la construcción de templos y edificios.

La relación y comparación entre dos magnitudes se puede expresar como el cociente entre dos números.

3.1 Razón

La **razón** entre dos cantidades a y b con $b \neq 0$, es el cociente entre estas. Por tanto, si $\frac{a}{b} = r$, se tiene que r es la razón entre a y b.

La razón entre a y b se escribe $\frac{a}{b}$ y se lee a es a b. En la razón $\frac{a}{b}$, a es el antecedente y b es el consecuente. Por ejemplo, si en un triángulo se compara la medida de su altura, que mide 9 cm, con su base, que mide 4 cm, se tiene la razón $\frac{h}{b} = \frac{9}{4}$.



3.2 Proporción

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones:

Si a, b y p, q son proporcionales se tienen que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$.

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ se lee a es a b como p es a q. Los términos a y q se denominan extremos y los términos b y p se denominan medios.

Las principales propiedades que se cumplen en toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ son:

- El producto de extremos es igual al producto de medios.

$$aq = pb$$

- Si se invierten los términos de una proporción, se obtiene otra proporción.

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p}$$

- Si se intercambian los extremos o los medios se obtiene otra proporción.

$$\frac{q}{b} = \frac{p}{a}$$

- Si se suman o se restan los consecuentes en ambos antecedentes de la igualdad se obtiene otra proporción.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{p+q}{q} \text{ o también } \frac{a-b}{b} = \frac{p-q}{q}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde y explica con un ejemplo.

51. ¿Cómo se usan las razones en construcciones de edificios y templos?

52. ¿Qué es una proporción?

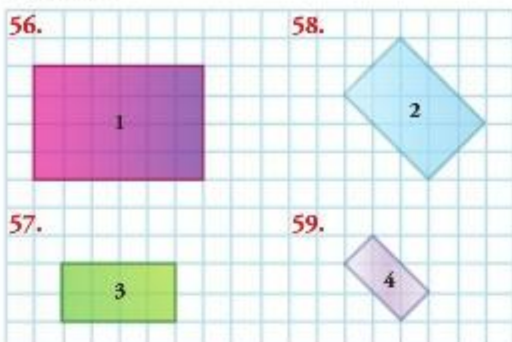
Realiza un dibujo que cumpla con las condiciones dadas.

53. Un rectángulo cuyas medidas de largo y de ancho estén en razón de 3 a 5.

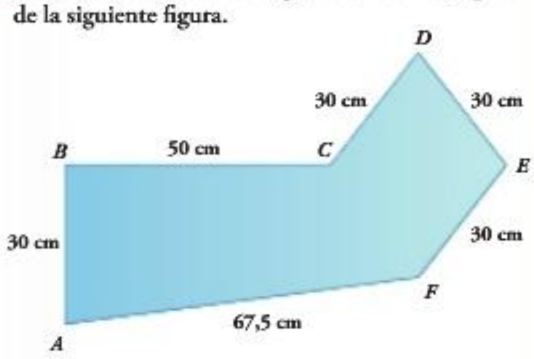
54. Un triángulo rectángulo cuyas medidas de base y altura estén en razón de 5 a 4.

55. Un par de cuadrados cuyas medidas de sus lados estén en razón de 2 a 5.

Indica cuáles de los rectángulos de la siguiente figura tienen los lados en razón de 2 a 3. Explica tu respuesta.



Establece cada una de las siguientes razones, a partir de la siguiente figura.



60. La razón entre BC y AF.

61. La razón entre el perímetro de la figura y AB.

Verifica la validez de las siguientes proporciones aplicando la propiedad fundamental de las proporciones. Ten en cuenta que: $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$.

62. $\frac{x + y}{y} = \frac{w + z}{z}$ 63. $\frac{w - x}{x} = \frac{z - y}{y}$

Resuelve. Si la razón entre las medidas de $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ es de 2 a 3:

64. Escribe tres posibles medidas para $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$.

65. Determina las medidas de $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$, si se sabe que son ángulos complementarios.

66. Determina las medidas de $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$, si se sabe que son ángulos suplementarios.

Demuestra.

67. Si $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, entonces, $\frac{x + 2y}{y} = \frac{a + 2b}{b}$.

68. Si $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, entonces, $\frac{x + y}{x - y} = \frac{a + b}{a - b}$.

Soluciona.

69. Una cinta de 100 cm se divide en dos segmentos cuyas longitudes están en razón de 1 a 3. ¿Cuál es la longitud de los dos segmentos?

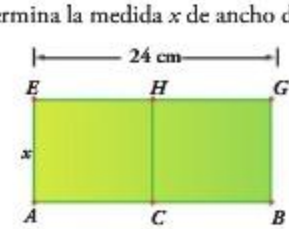
70. Encuentra las medidas de los ángulos internos de un triángulo, si se sabe que están en la razón de 2 a 3 y de 3 a 4.

71. Si dos ángulos suplementarios están en razón $\frac{3}{5}$, ¿cuál es la medida de los dos ángulos?

72. La razón de dos segmentos es de 6 a 7. Si un segmento mide 6 cm más que el otro, ¿cuál es la medida de cada segmento?

Un diseñador debe realizar un folleto de 24 cm de largo, de tal manera que al doblarlo por la mitad, las nuevas dimensiones de largo y de ancho sean proporcionales a las medidas de largo y de ancho del folleto original.

73. Determina la medida x de ancho del folleto.



3.3 Razón entre dos segmentos

La **razón entre dos segmentos** es el cociente entre las medidas de los dos segmentos, expresadas en la misma unidad de medida.

Por ejemplo, si $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, entonces, la razón entre AB y BC es $\frac{5}{3}$, porque $\frac{AB}{BC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

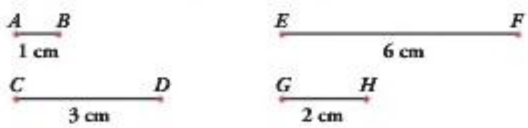
3.4 Segmentos proporcionales

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **proporcionales** a los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, si la razón entre AB y CD es igual a la razón entre EF y GH. Es decir,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

EJEMPLOS

1. Comparar las medidas de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ para establecer las razones respectivas y determinar los segmentos proporcionales que resultan.



A partir de las medidas de los segmentos dados, se pueden establecer las siguientes razones.

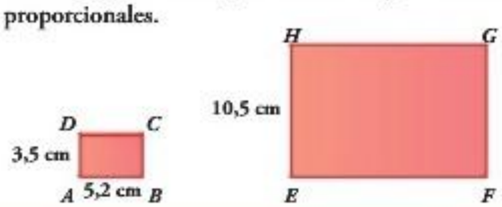
$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{CD}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{AB}{EF} = \frac{1}{6}$

$\frac{CD}{GH} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{AB}{GH} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{GH}{EF} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Luego, los segmentos proporcionales que se obtienen son:

$\frac{AB}{CD} = \frac{GH}{EF} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{AB}{GH} = \frac{CD}{EF} = \frac{1}{2}$

2. Encontrar la medida del lado $\overline{EF}$ del rectángulo que aparece en la figura, si las bases y las alturas de los rectángulos *ABCD* y *EFGH* son respectivamente proporcionales.



En el rectángulo *ABCD* se tiene que:

$AB = 5,2$ cm $\qquad AD = 3,5$ cm

En el rectángulo *ABCD* se tiene que:

$EH = 10,5$ cm

Como las bases y las alturas de los rectángulos son respectivamente proporcionales, se puede establecer la siguiente proporción:

$\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH}$ Se plantean los segmentos proporcionales.

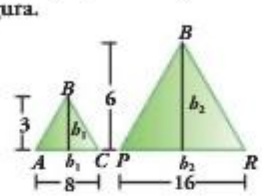
$\frac{5,2}{EF} = \frac{3,5}{10,5}$ Se remplazan las medidas de *AB*, *AD* y *EH*.

$5,2 \cdot 10,5 = 3,5 \cdot EF$ Se aplica la propiedad de las proporciones.

$EF = \frac{5,2 \cdot 10,5}{3,5} = \frac{54,6}{3,5} = 15,6$

Por tanto, la medida del lado $\overline{EF}$ es 5,6 cm.

3. Determinar la proporción que se forma en la siguiente figura.

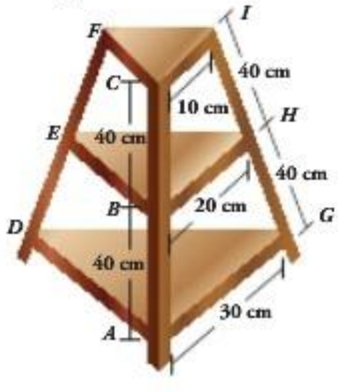


Cuando se establece entre las medidas de las bases y las alturas se tienen: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{6}$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Observa la figura. Luego, determina la razón entre cada par de segmentos.



74. AC y AB.

75. GI y BC.

76. AG y BH.

77. CI y BH.

Dibuja pares de segmentos que están en la razón que se indica.

78. $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$

79. $\frac{JK}{LM} = \frac{3}{4}$

80. $\frac{EF}{GH} = \frac{1}{4}$

81. $\frac{XY}{ZW} = \frac{2}{5}$

El segmento $\overline{AC}$ de 12 cm está dividido por el punto B, en dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cuyas medidas están en las razones indicadas. Determina la medida de cada segmento.

82. 1 a 2

83. 2 a 3

84. 3 a 5

85. 3 a 7

Determina las medidas de dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ teniendo en cuenta la información indicada.

86. $AB - BC = 12$ cm y $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{2}$

87. $AB + BC = 20$ cm y $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$

88. $AB + BC = 1 + \sqrt{2}$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resuelve. Dos segmentos están en la razón de 3 a 1. Si el segmento más corto mide 5 cm:

89. Determina la medida del otro segmento.

90. Dibuja los dos segmentos.

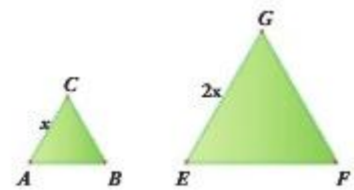
Responde. Si M es el punto medio de un segmento AB.

91. ¿Cuál es la razón entre AM y AB?

92. ¿Cuál es la razón entre MB y AB?

93. ¿Cuál es la proporción que puedes establecer? Explica tu respuesta.

Los triángulos ABC y DEF son triángulos equiláteros.



94. Halla la razón entre las medidas de sus lados.

95. Halla la razón entre sus perímetros.

96. Determina la proporción que se establece entre los triángulos. Explica tu respuesta.

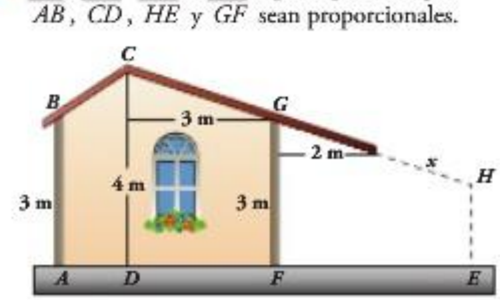
97. Completa la siguiente tabla que muestra la relación entre la medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

Longitud del cuadrado	1	1,5	2	2,5	3
Perímetro					

Escribe la razón entre la medida del lado del cuadrado y su perímetro. Si el perímetro de un cuadrado es 27,2 cm, ¿cuánto mide de lado?

Se desea prolongar el alero de un techo para construir una terraza que cubra 225 cm desde la pared.

98. Determina el valor de x para que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{HE}$ y $\overline{GF}$ sean proporcionales.



3.5 Teorema de Tales

Enlace web

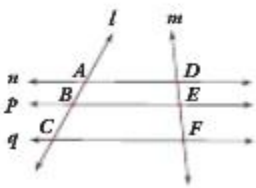


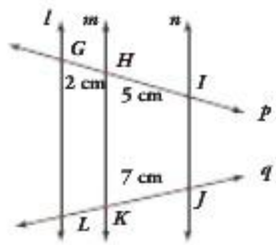
Figura 2.

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes, entonces, los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales.

Es decir, si las rectas n, p y q son paralelas y las rectas l y m son secantes se cumple que: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ (ver figura 2).

EJEMPLOS

1. Determinar la medida de $\overline{LK}$. Si las rectas l, m y n son paralelas y las rectas p y q son secantes, las medidas de $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ y $\overline{KJ}$ son 2 cm, 5 cm y 7 cm, respectivamente.



Los datos que se conocen son:

$GH = 2$ cm, $HI = 5$ cm y $KJ = 7$ cm

Por el teorema de Tales se tiene:

$\frac{GH}{HI} = \frac{LK}{KJ}$ Se plantea la proporción.

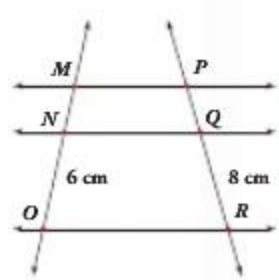
$\frac{2}{5} = \frac{LK}{7}$ Se remplazan las medidas de *GH*, *HI* y *KJ*.

$LK = \frac{2 \cdot 7}{5} = 2{,}8$ Se despeja *LK* y se resuelven las operaciones.

Por tanto, la medida de $\overline{LK}$ es 2,8 cm.

2. Hallar la medida de $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$, si $\overline{MP} \parallel \overline{NQ} \parallel \overline{OR}$, $\overline{PQ} = \overline{MN} + 1$, $\overline{NO} = 6$ cm y $\overline{QR} = 8$ cm.

Por el teorema de Tales se tiene:



$\frac{MN}{NO} = \frac{MN + 1}{QR}$ Se plantea la proporción.

$\frac{MN}{6} = \frac{MN + 1}{8}$ Se remplazan las medidas *NO* y *QR*.

$8MN = 6(MN + 1)$ Se aplica la propiedad de las proporciones.

$8MN - 6MN = 6$ Se multiplica y se resta $6MN$.

$2MN = 6$ Se resta.

$MN = 3$ Se divide entre 2.

$PQ = 3 + 1 = 4$

Por tanto, la medida de $\overline{MN}$ es 3 cm y la medida de $\overline{PQ}$ es 4 cm.

Recurso imprimible

Historia de las matemáticas

Tales de Mileto
630-545 a. C.

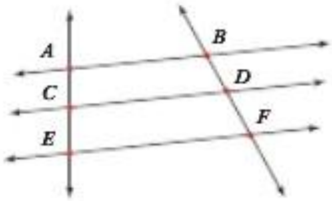
Tales de Mileto es considerado el primer filósofo griego y pensador de la historia, a quien se le atribuyen interesantes descubrimientos matemáticos. Uno de los teoremas asociados con el nombre de Tales es la proporción de segmentos de línea recta.

Afianzo COMPETENCIAS

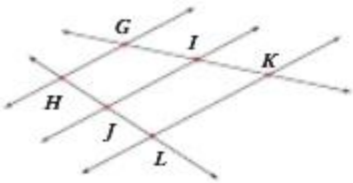
Interpreto • Argumento • Ejercito • Soluciono problemas

Escribe cinco proporciones entre los segmentos que aparecen en cada figura.

99.

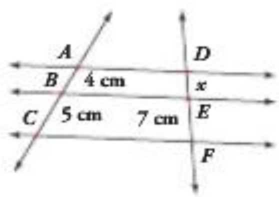


100.

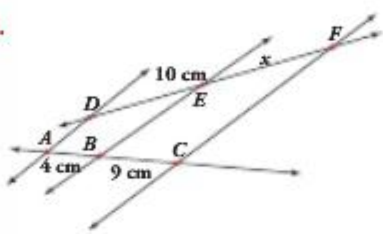


Determina el valor de x de acuerdo con las medidas que se indican. Si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$.

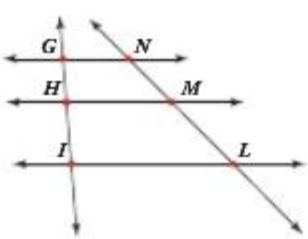
101.



102.



En el gráfico se tiene que $\overleftrightarrow{GN} \parallel \overleftrightarrow{HM} \parallel \overleftrightarrow{IL}$. Determina la medida de $\overline{ML}$ teniendo en cuenta las condiciones dadas para cada caso.



103. $GI = 15$ cm

$HI = 6$ cm

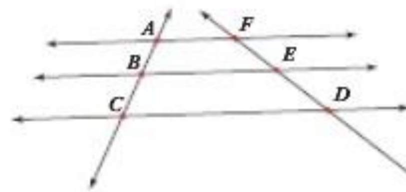
$MN = 12$ cm

104. $GI = 12$ cm

$MN = 7{,}5$ cm

$\dfrac{GH}{HI} = \dfrac{1}{2}$

Observa la figura y resuelve.

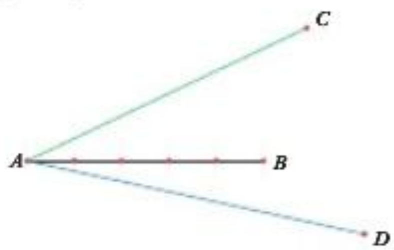


105. Determina las medidas de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{FE}$ y $\overline{ED}$ si se cumple que $\overleftrightarrow{AF} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $AC = 9$ cm, $FD = 12$ cm y $AB + FE = 14$ cm.

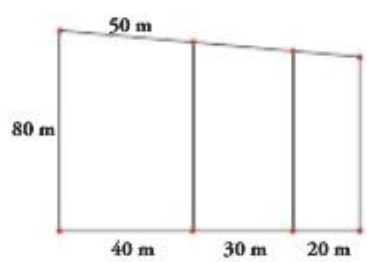
106. Escribe las condiciones necesarias para hallar las medidas FE y ED.

Resuelve.

107. El segmento $\overline{AB}$ está dividido en cinco partes iguales. Usa este segmento y el teorema de Tales para dividir los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ en cinco partes iguales.



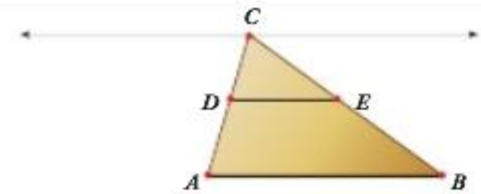
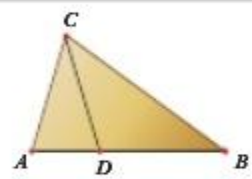
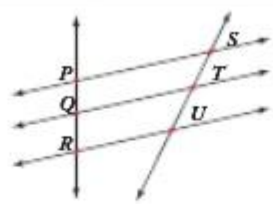
108. Determina el perímetro de un lote como el que se indica en la figura, si se sabe que se dividió en tres partes, por medio de perpendiculares a uno de sus lados.



3.6 Consecuencias del teorema de Tales

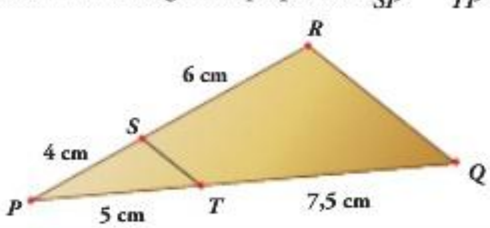
Enlace web

El **teorema de Tales** se aplica para demostrar otros teoremas relacionados con la proporcionalidad.

Teorema fundamental de la proporcionalidad	Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y es paralela al tercer lado, entonces, los segmentos en que divide los dos lados son proporcionales.	 En el $\triangle ABC$, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ se traza por el vértice C una paralela a $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$. Por el teorema de Tales se puede afirmar que: $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$
Teorema de la bisectriz	La bisectriz de un ángulo interno de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo.	 En el triángulo ABC, si $\overleftrightarrow{CD}$ es la bisectriz del $\measuredangle C$, entonces, $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$.
Recíproco del teorema de Tales	Si varias rectas son cortadas por dos secantes y los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales, entonces, las rectas son paralelas.	 Si $\frac{PQ}{QR} = \frac{ST}{TU}$, entonces, $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{QT} \parallel \overleftrightarrow{RU}$.

EJEMPLOS

La recta ST es paralela a $\overline{RQ}$ e interseca a los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ en el $\triangle PQR$, de tal forma que quedan divididos en segmentos con las medidas que se indican. Comprobar que se satisface la siguiente proporción $\frac{RP}{SP} = \frac{QP}{TP}$.



Para verificar si se satisface la proporción se realiza lo siguiente:

Primero, se remplazan las medidas de los lados y de los segmentos correspondientes.

$$\frac{RP}{SP} = \frac{QP}{TP}$$

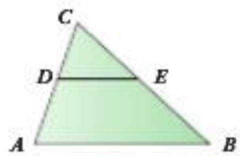
$$\frac{10 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 2{,}5 \text{ y } \frac{12{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 2{,}5$$

Como las razones son iguales, los lados del triángulo intersecados por la recta ST y los segmentos que se forman también son proporcionales.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono

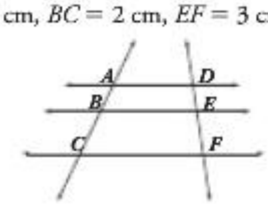
En $\triangle ABC$, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Completa las proporciones indicadas.



109. $\dfrac{CD}{DA} = \dfrac{\square}{EB}$ **110.** $\dfrac{CA}{DA} = \dfrac{\square}{BE}$

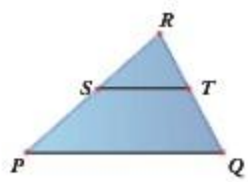
En la siguiente figura $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$.

$AC = 8$ cm, $BC = 2$ cm, $EF = 3$ cm



111. Halla la medida de $\overline{DE}$.

En el $\triangle PQR$ determina en qué casos $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$. Ten en cuenta las medidas que se indican. Justifica tu respuesta.



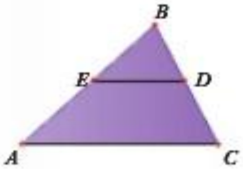
112. $PR = 9$ cm, $SR = 4$ cm, $QR = 12$ cm, $TR = 6$ cm

113. $PR = 9$ cm, $SR = 4$ cm, $QR = 22{,}5$ cm, $TR = 10$ cm

114. $PR = 9$ cm, $SR = 4$ cm, $QR = 13{,}5$ cm, $TR = 6$ cm

115. $PR = 9$ cm, $SR = 4$ cm, $QR = 20$ cm, $TR = 10$ cm

116. Calcula las medidas de $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ del $\triangle ABC$, donde $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.



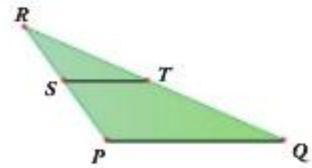
$AE = x + 1$

$EB = x$

$CD = 10$ cm

$DB = 8$ cm

En el $\triangle PQR$, $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$. Encuentra la medida que falta.



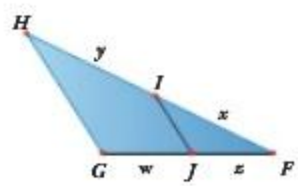
117. $RS = 6$ cm, $SP = 14$ cm, $RT =$ ____ cm, $TQ = 21$ cm

118. $PR = 10$ cm, $RS = 3$ cm, $QR = 15$ cm, $RT =$ ____ cm

119. $RS = 3$ cm, $SP = 7$ cm, $RT = 4{,}5$ cm, $TQ =$ ____ cm

120. $PR = 10$ cm, $SP = 7$ cm, $QR =$ ____ cm, $RT = 4{,}5$ cm

En el $\triangle FGH$, $\measuredangle FJI \cong \measuredangle JGH$, encuentra el valor que se indica en cada caso.



121. $z = 6$ cm

$w = 14$ cm

$x = 9$ cm

$y =$ ____ cm

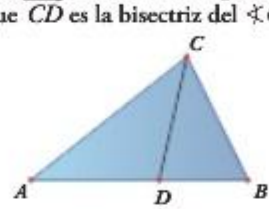
122. $x + y = 19$ cm

$y = 10$ cm

$z + w = 38$ cm

$w =$ ____ cm

Encuentra la medida del segmento que se indica en cada caso, teniendo en cuenta que en el $\triangle ABC$ se cumple que $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\measuredangle C$.



123. $AC = 9$ cm

$AD = 6$ cm

$CB = 10$ cm

$DB =$ ____ cm

124. $BC = 8$ cm

$DB = 6$ cm

$AC = 14$ cm

$AD =$ ____ cm

4. Polígonos semejantes

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma.

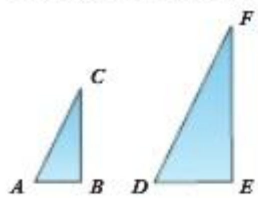
Un mapa a escala es semejante a la región geográfica que representa.

Dos polígonos son **semejantes** si hay una correspondencia entre los vértices de tal manera que:

- Los ángulos correspondientes son congruentes.
- Los lados correspondientes son proporcionales.

La relación de semejanza entre dos polígonos se simboliza con "$\sim$" que significa "es semejante a".

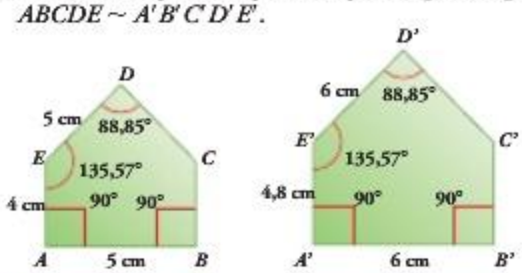
En la siguiente figura, si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se puede establecer la semejanza debido a:



- La congruencia de los ángulos correspondientes:
  $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle F$
- La proporcionalidad de los lados correspondientes:
  $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

EJEMPLOS

1. Observar la siguiente figura. Luego, comprobar que $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.



Primero, se verifica la congruencia de los ángulos.

Como los ángulos correspondientes tienen la misma medida, se tiene que:

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ $\quad \measuredangle B \cong \measuredangle B'$ $\quad \measuredangle C \cong \measuredangle C'$

$\measuredangle D \cong \measuredangle D'$ $\quad \measuredangle E \cong \measuredangle E'$

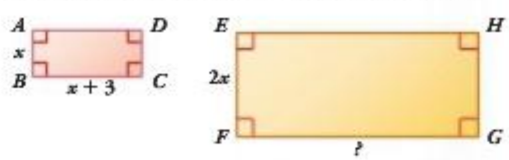
Luego, se comprueba la proporcionalidad de los lados correspondientes.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{5}{6}$$

Finalmente, como las razones son iguales, los lados son proporcionales y la razón de semejanza es $\frac{5}{6}$.

Por tanto, $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

2. Dados dos rectángulos $ABCD$ y $EFGH$ que son semejantes, escribir la razón entre sus perímetros.



Primero, se halla el valor del lado de $EFGH$.

$$\frac{x}{x+3} = \frac{2x}{?}$$

$$? = \frac{2x(x+3)}{x}$$

$$? = 2x + 6$$

Luego, se plantea la razón entre sus perímetros así:

$$\frac{\text{Perímetro}_{ABCD}}{\text{Perímetro}_{EFGH}} = \frac{4x+6}{8x+12}$$

$$= \frac{2(2x+3)}{4(2x+3)}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Finalmente, la razón entre los perímetros es $\frac{1}{2}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina el valor de verdad de cada proposición. Muestra un contraejemplo si la proposición es falsa.

125. Todos los rectángulos son semejantes.

126. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

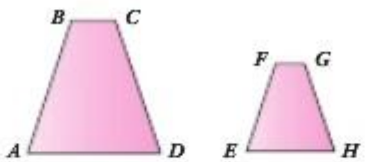
127. Todos los polígonos congruentes son semejantes.

128. Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

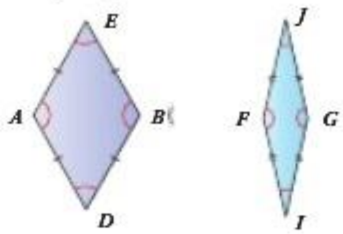
129. Todos los polígonos regulares son semejantes.

Determina si los siguientes pares de polígonos son o no semejantes.

130. *ABCD* y *EFGH*

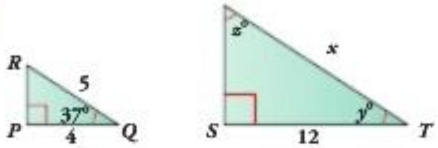


131. *ADBE* y *FIGJ*

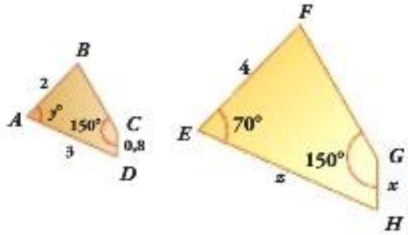


Los siguientes pares de polígonos son semejantes. Determina los valores de *x*, *y* y *z* en cada gráfica.

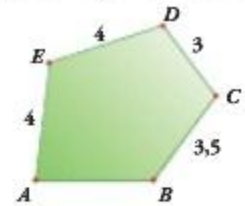
132.



133.



134. **Dibuja un polígono que sea semejante al polígono *ABCDE*, de tal manera que la razón entre los lados correspondientes sea de 3 a 4.**



Resuelve.

135. Los planos son representaciones a escala de un lugar. La escala es la razón entre la medida de una distancia en el plano y la distancia real. En la elaboración del plano de un apartamento se usó una escala $\frac{1}{25}$. Si las dimensiones de una habitación son 4,3 m de ancho y 6,8 m de largo, ¿cuáles son las dimensiones de la representación de la habitación en el plano?

136. Determina la escala a la que está dibujado el plano de la fachada de un edificio de 30 m de altura, si el dibujo mide 12 cm.

137. En un mapa se utilizó la escala 1:150.000. Si la distancia entre dos puntos que indican dos pueblos es 13 cm, ¿cuál es la distancia real?

138. Se hizo una ampliación de un mapa de 9 cm de largo y 6 cm de ancho. Si la medida del largo en la ampliación es de 40,5 cm, determina la medida del ancho.

Un fotógrafo quiere ampliar las siguientes fotografías aplicando diferentes escalas.

139. ¿Qué dimensiones tendrá cada fotografía si se amplía a una escala de 1:20?

140. ¿Qué dimensiones tendrán si se amplían a una escala 1:9?

4.1 Semejanza de triángulos

Actividad · Ampliación multimedia

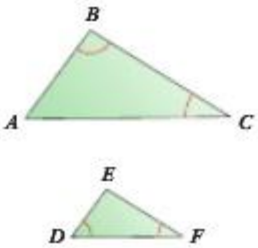


Figura 3.

Dos triángulos son semejantes si se cumple que: los ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo, si el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle DEF$ (figura 3), se escribe $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, y se cumple:

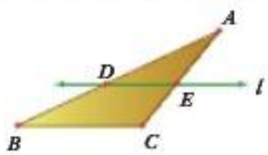
Los ángulos correspondientes son congruentes $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

Los lados correspondientes son proporcionales $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

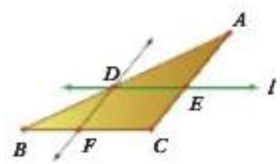
Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

Si una recta interseca dos lados de un triángulo y es paralela al tercer lado, entonces, determina un triángulo semejante al triángulo dado.

Por tanto, si la recta l interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$ en los puntos D y E, de tal forma que $l \parallel \overline{BC}$ se cumple que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, como se muestra en la figura.



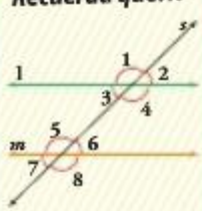
Para realizar la demostración se hace una construcción auxiliar, por el punto D se traza una recta paralela a $\overline{AC}$.



Proposición	Justificación
1. $\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FC}$	Teorema de Tales
2. $\frac{BD + DA}{DA} = \frac{BF + FC}{FC}$	Propiedad de proporcionalidad
3. $\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{FC}$	Suma de las medidas de los segmentos
4. $FC = DE$	Lados opuestos en paralelogramo $DECF$
5. $\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DE}$	Remplazando FC por DE (en paso 3 por paso 4)
6. $\frac{BA}{DA} = \frac{CA}{EA}$	Teorema de Tales y propiedad de proporcionalidad
7. $\frac{BC}{DE} = \frac{BA}{DA} = \frac{CA}{EA}$	Por pasos 5 y 6
8. $\measuredangle ADE \cong \measuredangle DBC$ y $\measuredangle AED \cong \measuredangle ECB$	Ángulos correspondientes entre paralelas
9. $\measuredangle A \cong \measuredangle A$	Propiedad reflexiva
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$	Definición de triángulos semejantes (pasos 7, 8 y 9)

Por tanto, se cumple que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Recuerda que...



Si $l \parallel m$, los ángulos correspondientes son congruentes. Por ejemplo, el $\measuredangle 2$ y el $\measuredangle 6$ son correspondientes, entonces, $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$.

Criterios de semejanza de triángulos

Actividad

Para comprobar que dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar siempre que los tres ángulos son congruentes y que los tres lados son proporcionales; existen algunos criterios que permiten comprobar la semejanza con menos condiciones.

Criterio lado-lado-lado (LLL)

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces, los triángulos son semejantes. Así, no hay necesidad de comprobar que los ángulos correspondientes son congruentes.

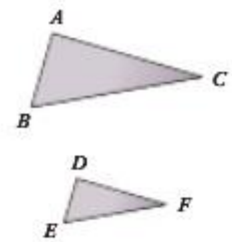
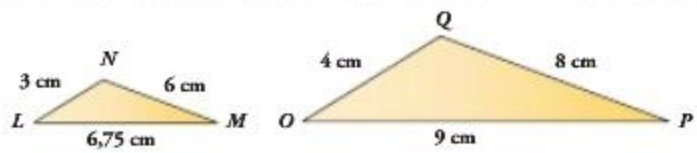


Figura 4.

Esto es, si en la figura 4 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Por ejemplo, para determinar que $\triangle LMN \sim \triangle OPQ$, se verifica la proporcionalidad entre los tres lados. Para esto se establecen las razones entre las medidas de los lados así:



$\frac{LN}{OQ} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ $\qquad \frac{NM}{QP} = \frac{6}{8} = 0{,}75$ $\qquad \frac{LM}{OP} = \frac{6{,}75}{9} = 0{,}75$

Como las razones son iguales, los lados correspondientes son proporcionales y, en consecuencia, $\triangle LMN \sim \triangle OPQ$.

Criterio lado-ángulo-lado (LAL)

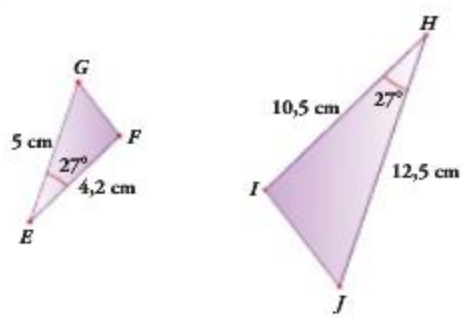
Ampliación multimedia

Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes entre ellos son congruentes.

Por tanto, para comprobar que el $\triangle ABC$ es semejante con el $\triangle DEF$, basta con verificar que AB y AC son proporcionales con DE y DF, respectivamente, y que el $\measuredangle A \cong \measuredangle D$.

Esto es, si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Por ejemplo, para establecer si $\triangle EFG \sim \triangle HIJ$, se comprueba la proporcionalidad entre los dos lados así:



$\frac{EF}{HJ} = \frac{4{,}2}{10{,}5} = 0{,}4$ $\qquad \frac{EG}{HJ} = \frac{5}{12{,}5} = 0{,}4$

Como los lados son proporcionales y el $\measuredangle E \cong \measuredangle H$, los triángulos EFG y HIJ son semejantes.

Criterio ángulo-ángulo (AA) Actividad

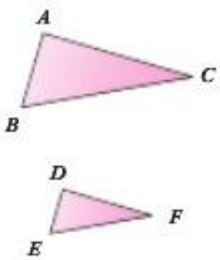
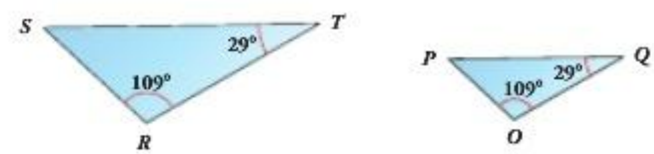


Figura 5.

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos correspondientes son congruentes.

Por tanto, para comprobar que el $\triangle ABC$ es semejante con el $\triangle DEF$, basta con probar que el $\sphericalangle A$ y el $\sphericalangle B$ son congruentes con el $\sphericalangle D$ y el $\sphericalangle E$, respectivamente. Esto es, si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$ y $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$, entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (figura 5).

Por ejemplo, el $\triangle RST$ es semejante con el $\triangle OPQ$, porque $\sphericalangle R \cong \sphericalangle O$ y $\sphericalangle T \cong \sphericalangle Q$.

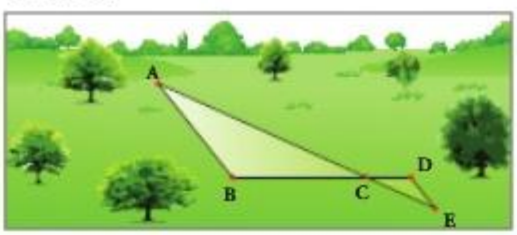


En este caso no es necesario probar que $\sphericalangle S \cong \sphericalangle P$ para garantizar que los triángulos son semejantes, ya que esta congruencia se deduce directamente del hecho de que "la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es 180°".

Cuando se utiliza la notación geométrica para indicar la semejanza de triángulos es importante tener en cuenta el orden en que se escriben los vértices, puesto que estos indican la correspondencia entre los ángulos congruentes y los lados proporcionales.

EJEMPLOS

1. Determinar la distancia entre los campamentos representados por las letras A y B, si se conoce que $BC = 36$ m, $CD = 12$ m y $DE = 16$ m. Además, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.



En la figura se observa que:

$\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle DCE$ Por opuestos por el vértice.

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CED$ Por alternos internos entre paralelas.

Luego, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ por el criterio AA.

Ahora, se halla AB como sigue:

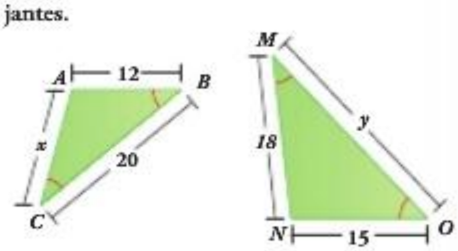
$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$ Se plantea la proporción entre los lados.

$\frac{AB}{16} = \frac{36}{12}$ Se remplazan BC, ED y DC.

$AB = 48$ Se despeja AB.

Por tanto, la distancia entre los campamentos es de 48 metros.

2. Hallar el valor de x y y si los triángulos son semejantes.



En el $\triangle ABC$ se tiene que:

$AB = 12$ cm , $BC = 20$ cm, $x = CA$

En el $\triangle NMO$ se tiene que:

$MN = 18$ cm, $ON = 15$ cm, $y = MO$

Como $\triangle ABC \sim \triangle NMO$, se tiene que:

$\frac{CA}{ON} = \frac{AB}{MN}$ Se plantea la proporción entre los lados.

$\frac{x}{15} = \frac{12}{18}, x = 10$ Se remplazan CA, AB, MN, ON y se despeja x.

$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{MO}$ Se plantea la proporción entre los lados.

$\frac{12}{18} = \frac{20}{y}, y = 30$ Se remplazan AB, BC, MN, MO y se despeja y.

Por tanto, $x = 10$ y $y = 30$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Explica, mediante un ejemplo, cada criterio para la semejanza de triángulos.

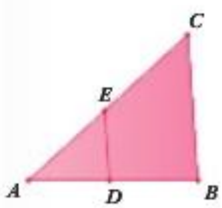
141. Criterio LLL. **142.** Criterio LAL.

143. Responde: ¿Por qué los triángulos equiláteros son semejantes?

Determina el criterio que permite establecer la semejanza entre cada par de triángulos. Explica tu respuesta.

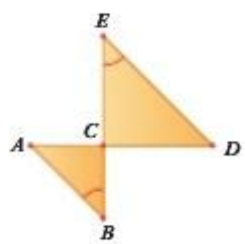
144. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



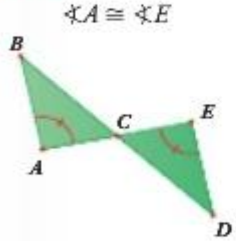
145. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\measuredangle E \cong \measuredangle B$



146. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

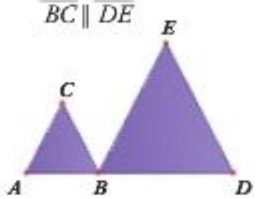
$\measuredangle A \cong \measuredangle E$



147. $\triangle ABC \sim \triangle BDE$

$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$

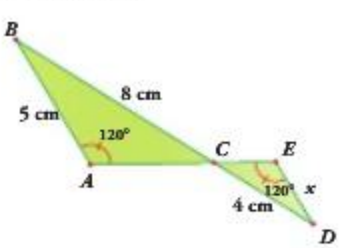
$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$



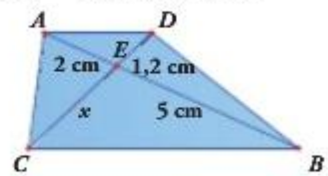
148. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Se construye otro semejante a él, cuyo lado menor mide 15 cm. Halla la longitud de sus otros dos lados.

Comprueba la semejanza de los triángulos. Luego, calcula el valor de *x*.

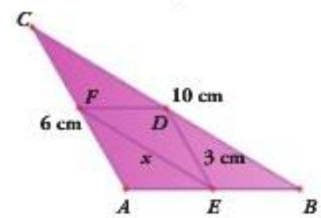
149. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$



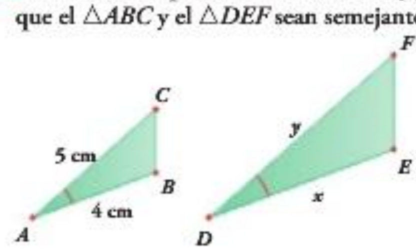
150. $\triangle AED \sim \triangle CEB$, $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$



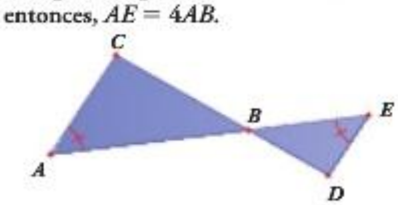
151. $\triangle ABC \sim \triangle FDE$ y *D*, *F*, *E* son puntos medios de los lados del triángulo.



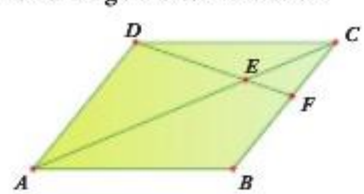
152. Encuentra dos posibles medidas de *x* y *y* para que el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ sean semejantes.



153. Comprueba que si $DE = 3AC$ y $\measuredangle A \cong \measuredangle E$, entonces, $AE = 4AB$.



154. Realiza la siguiente demostración.



Hipótesis: *ABCD* es paralelogramo.

$\overline{AC}$ es una diagonal del paralelogramo.

Tesis: $\triangle AED \sim \triangle CEF$

Semejanza de triángulos rectángulos

Recurso imprimible

Recuerda que...

En un triángulo rectángulo a los lados se les llama catetos e hipotenusa.

Dos triángulos rectángulos son semejantes si cumplen alguno de los siguientes criterios:

Tienen un ángulo agudo congruente. Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente, entonces, los triángulos son semejantes. Esto es consecuencia del criterio AA de semejanza de triángulos, ya que los ángulos correspondientes que son congruentes son el ángulo agudo y el ángulo recto.

Las medidas de sus catetos son proporcionales. Si los catetos correspondientes de dos triángulos rectángulos son congruentes, los triángulos son semejantes. Esto es consecuencia del criterio LAL de semejanza, puesto que los catetos son proporcionales y los ángulos rectos comprendidos entre estos son congruentes.

Las medidas de uno de los catetos y las hipotenusas son proporcionales. Si la razón entre un par de catetos correspondientes y la razón de las hipotenusas es igual, entonces, los triángulos son semejantes. En este caso, la proposición no es consecuencia directa de los criterios de semejanza, por tanto, es necesario hacer la demostración.

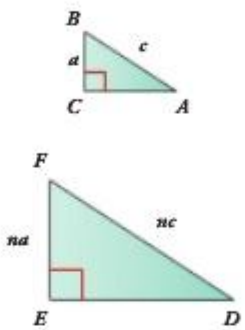


Figura 6.

En la demostración de la proposición se plantea que $BC = a$, $BA = c$ y que la razón entre las medidas de los catetos correspondientes y las medidas de las hipotenusas es n (figura 6).

Es decir, $\dfrac{FE}{BC} = n$ y $\dfrac{FD}{BA} = n$. Luego, $FE = na$ y $FD = nc$.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

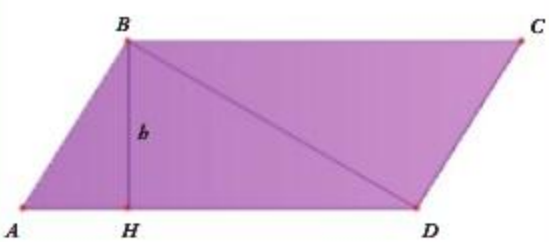
$$CA = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ y } ED = \sqrt{(nc)^2 - (na)^2} = \sqrt{n^2(c^2 - a^2)} = n\sqrt{c^2 - a^2}.$$

Así, la razón entre ED y CA es $\dfrac{ED}{CA} = \dfrac{n\sqrt{c^2 - a^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}} = n$.

Por tanto, los lados de los $\triangle CBA$ y $\triangle EFD$ son proporcionales y de acuerdo con el criterio LLL los triángulos son semejantes.

EJEMPLO

Hallar la altura h del paralelogramo $ABCD$, si $AB = 16$ cm, $BC = 32$ cm y m$\measuredangle BDC = 90°$.



$ABCD$ paralelogramo, tal que $AB = CD = 16$ cm, $BC = AD = 32$ cm y m$\measuredangle BDC = 90°$.

m$\measuredangle ABD = 90°$ por alternos internos entre paralelas.

Para hallar la altura h, primero se encuentra la medida de $\overline{BD}$, aplicando el teorema de Pitágoras en el $\triangle ABD$, así:

$$BD = \sqrt{(AD)^2 - (AB)^2} = \sqrt{32^2 - 16^2}$$

$$BD = \sqrt{768} = 16\sqrt{3}$$

Los triángulos rectángulos AHB y ABD son semejantes porque $\measuredangle BAH \cong \measuredangle BAD$.

Como los lados de los $\triangle ABH$ y $\triangle ADB$ son proporcionales, se tiene:

$\dfrac{BH}{DB} = \dfrac{AB}{AD}$ Se establece la proporción

$\dfrac{h}{16\sqrt{3}} = \dfrac{16}{32}$ Se remplazan BH, DB, AB y AD.

$$h = \frac{(16)(16\sqrt{3})}{32} = 8\sqrt{3}$$

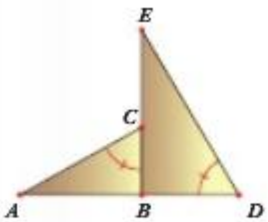
Por tanto, la altura del paralelogramo es $8\sqrt{3}$.

Afianzo COMPETENCIAS

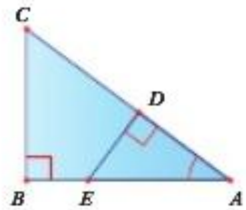
Interpreto • Argumento • Propongo • Razono • Soluciono problemas

Determina el criterio que permite establecer la semejanza entre cada par de triángulos. Luego, establece la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

155. $\triangle ABC \sim \triangle EBD$



156. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$



Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta con un ejemplo.

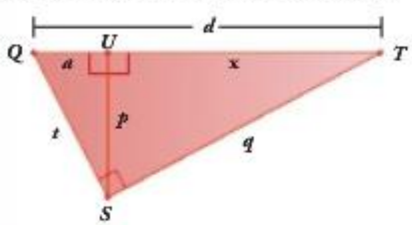
157. Si dos triángulos rectángulos tienen un lado común, entonces, los triángulos son semejantes.

158. Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes.

159. Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente entre sí, entonces, los triángulos son semejantes.

160. Si la relación entre las hipotenusas de dos triángulos rectángulos es 2:1, entonces, los triángulos son semejantes.

Resuelve de acuerdo con la siguiente figura.



161. Determina los triángulos que son semejantes.

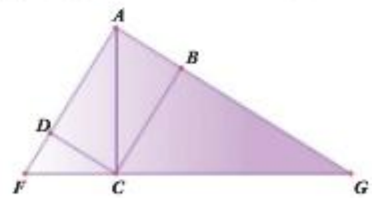
162. Establece las proporciones entre los lados de los triángulos semejantes.

163. Expresa p en términos de x y a.

164. Determina el valor de t y q, si $a = 2$ cm y $x = 6$ cm.

165. Encuentra la medida de p, si $t = 12$ cm y $q = 13$ cm.

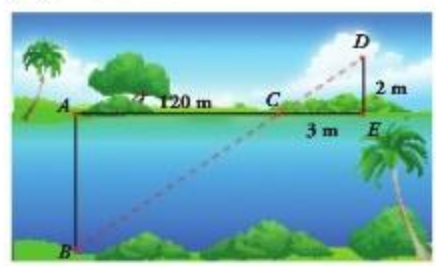
166. **Si el polígono $ABCD$ es un rectángulo, tal que $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{FG}$, como se muestra en la figura, demuestra que el área del rectángulo es $\sqrt{DF \cdot AD \cdot AB \cdot BG}$.**



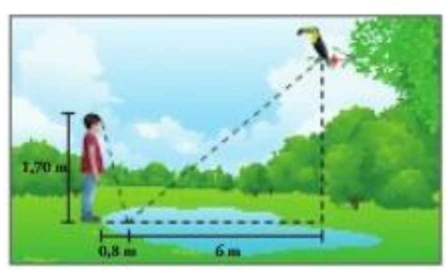
Resuelve.

167. Determina la altura que tiene la escalera para subir al avión.

168. Calcula el ancho de un río a partir del esquema que se muestra en la figura sabiendo que en los triángulos formados, los lados $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ son perpendiculares a $\overline{AE}$.

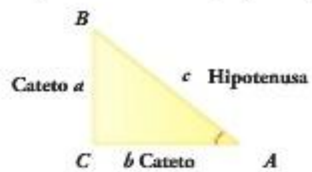


169. Calcula la altura a la que se encuentra el ave si Juan ve su reflejo como se muestra en la figura.

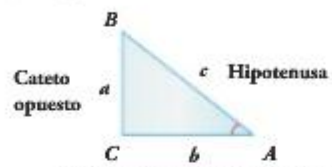


4.2 Razones trigonométricas

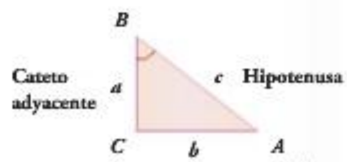
Un triángulo rectángulo está formado por un ángulo recto y dos ángulos agudos. Los lados que componen el ángulo recto se denominan **catetos** y el lado opuesto a este ángulo se denomina **hipotenusa**. Así en el $\triangle ABC$, el ángulo C es recto y los ángulos A y B son ángulos agudos. Además, los catetos son a, b y la hipotenusa c.



Además, según el ángulo agudo al que se hace referencia, los catetos se denominan **cateto opuesto** y **cateto adyacente**. Por ejemplo, si se hace referencia al ángulo A, el cateto adyacente es b y el opuesto a, pero si se hace referencia al ángulo B el cateto adyacente es a y el opuesto es b.



Cateto adyacente, respecto al ∢A



Cateto opuesto, respecto al ∢B

Por otra parte, existen seis razones que se pueden plantear entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, estas son: $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ y $\frac{c}{b}$. Estas razones se denominan **razones trigonométricas**. Cada razón trigonométrica recibe un nombre de acuerdo con el ángulo que se seleccione. Así, la razón $\frac{a}{c}$ con respecto al ángulo A se denomina seno del ángulo A.

Las razones trigonométricas correspondientes al ∢A son:

$$\text{seno } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \text{cotangente } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{coseno } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \text{secante } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

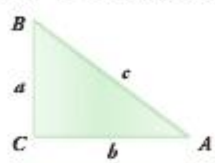
$$\text{tangente } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} \qquad \text{cosecante } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

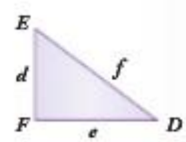
Generalmente, cada función se escribe en forma abreviada de tal forma que seno B se escribe como sen B, coseno B se escribe cos B, y así sucesivamente utilizando las primeras tres letras del nombre de la razón trigonométrica. En el caso de cosecante del ∢A se escribe csc A, para no confundirlo con coseno del ∢A.

Las razones trigonométricas en triángulos semejantes son iguales, sin importar las medidas de los lados. Así, si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y son rectángulos se cumple que:

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$$

sen A = sen D





Así mismo, se cumple la igualdad entre las otras razones trigonométricas.

Historia de las matemáticas

Trigonometría

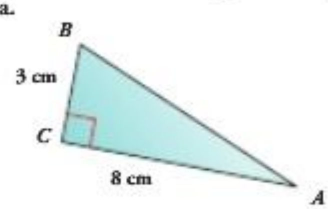
La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre las medidas de un triángulo. Históricamente, la trigonometría se desarrolló muy ligada a problemas de astronomía, agrimensura y navegación.

Hiparco (190-125 a. C.) fue un astrónomo famoso por haber catalogado aproximadamente 1.000 estrellas y calcular la distancia de la Tierra a la Luna, con un error inferior al 10%. Fue el primero en utilizar la relación entre las medidas de los lados y ángulos de un triángulo. Se le considera el precursor de la trigonometría.

Recurso imprimible

EJEMPLOS

1. Determinar el valor de las razones trigonométricas con respecto al ∢A del triángulo rectángulo que se muestra.



En el $\triangle ABC$ se observa que:

$BC = 3$ cm y $AC = 8$ cm

Para hallar el valor de las razones trigonométricas, se determina el valor de la hipotenusa AB, así:

$AB = \sqrt{(BC)^2 + (AC)^2}$	Se aplica el teorema de Pitágoras.
$= \sqrt{3^2 + 8^2}$	Se remplazan BC y AC.
$= \sqrt{73}$	Se resuelven las operaciones.
$\approx 8,5$	Se extrae la raíz.

Respecto al ∢A, los catetos opuesto y adyacente son:

Cateto opuesto: BC.

Cateto adyacente: AC.

Por tanto, las razones trigonométricas respecto al ∢A son:

$$\text{sen } A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{8,5} = 0,35$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{8,5} = 0,94$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{8} = 0,37$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{3} = 2,66$$

$$\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{8,5}{8} = 1,06$$

$$\csc A = \frac{AB}{BC} = \frac{8,5}{3} = 2,83$$

2. Usar la calculadora para hallar el valor de cada expresión.

a. sen 50°

Para hallar sen 50° se realizan los siguientes pasos:

Primero, se confirma que la calculadora esté en el modo deg $\boxed{\text{D}}$.

Luego, se digita $\boxed{\text{sin}}$ y el valor del ángulo.

Es decir, sin 50.

Finalmente, se obtiene la respuesta al dar clic en $\boxed{\text{EXE}}$ o $\boxed{=}$.

Por tanto, sen 50° = 0,766044443 ≈ 0,77.

b. cos 75°

Para hallar cos 75° se realizan los siguientes pasos:

Primero, se digita $\boxed{\text{cos}}$ y el valor del ángulo.

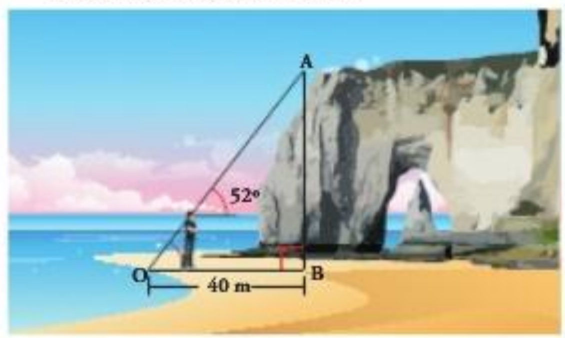
Es decir, cos 75.

Luego, se obtiene la respuesta al dar clic en $\boxed{\text{EXE}}$ o $\boxed{=}$.

Finalmente, cos 75° = 0,258819045 ≈ 0,26.

3. Para medir la altura de un acantilado AB, cuya base se encuentra en un terreno llano y horizontal, un topógrafo fija el punto O, como se muestra en la figura, y mide el ángulo AOB y la distancia OB, consiguiendo 52° y 40 m, respectivamente.

Hallar la altura del acantilado.



En el $\triangle ABO$ se tiene:

m∢$OBA = 90°$, m∢$AOB = 52°$, $OB = 40$ m.

Respecto al ∢O, los catetos opuesto y adyacente son:

Cateto opuesto: AB.

Cateto adyacente: OB.

Ahora, se determina la medida de AB, así:

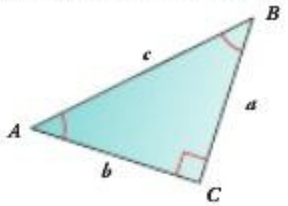
$\tan O = \frac{AB}{OB}$	Se aplica la razón tangente.
$\tan 52° = \frac{AB}{40}$	Se remplazan el ∢O y OB.
$AB = \tan 52° \cdot 40$	Se despeja AB.
$AB \approx 51,2$	Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la altura del acantilado es 51,2 m.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

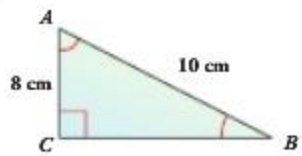
Completa cada espacio de acuerdo con la figura.



170. sen $A =$ ______ **172.** tan ______ $= \frac{b}{a}$

171. cos $A =$ ______ **173.** sec ______ $= \frac{c}{b}$

Escribe el valor de las razones trigonométricas que se indican.



174. sen A

175. cos B

176. tan A

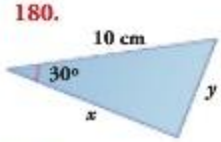
177. cot B

178. sec A

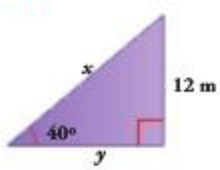
179. csc B

Halla los valores de x y y en cada triángulo rectángulo.

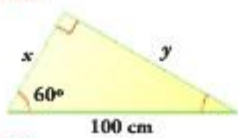
180.



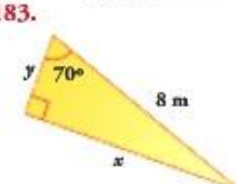
181.



182.



183.



Realiza el dibujo de un triángulo rectángulo que cumpla las condiciones. Si no es posible dibujar el triángulo, entonces, justifica tu respuesta.

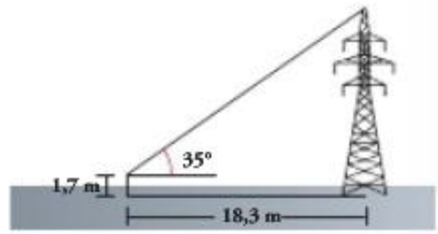
184. sen $A = \frac{4}{5}$, cos $A = \frac{3}{5}$

185. cos $B = \frac{8}{3}$, tan $B = \frac{4}{3}$

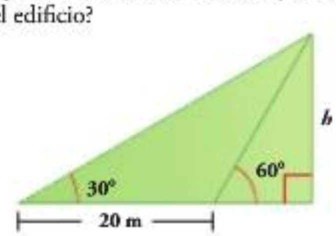
186. tan $A = \frac{12}{5}$, cos $B = \frac{5}{13}$

Resuelve.

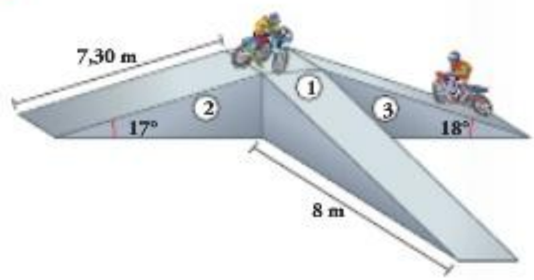
187. Determina la altura de la torre.



188. Juan observa a su amigo en la terraza del edificio con un ángulo de elevación de 30°. Luego, se acerca 20 m al edificio y, en ese momento, el ángulo de elevación es de 60°. ¿Cuál es la altura del edificio?



Observa y responde.

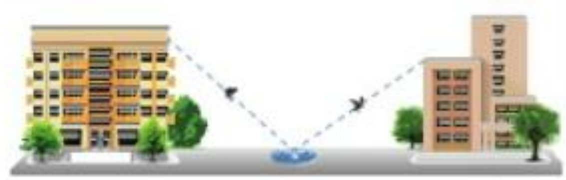


189. ¿Cuál es la altura de las rampas?

190. ¿Cuál es la longitud de la rampa 1?

191. ¿Cuál es la longitud de la rampa 3?

192. **Propón y resuelve un problema relacionado con el dibujo.**



5. Circunferencia

Ampliación multimedia

Dado un punto C y un número positivo r, el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia r del punto C se denomina circunferencia de centro C y radio r.

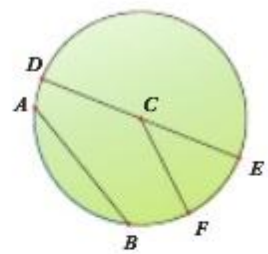


Figura 7.

Algunos elementos de la circunferencia son:

Arco: son los puntos de la circunferencia comprendidos entre dos puntos que pertenecen a esta.

Cuerda: es el segmento cuyos puntos extremos son dos puntos de la circunferencia.

Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Radio: es un segmento cuyos puntos extremos son el centro y un punto de la circunferencia. Es importante tener en cuenta que la palabra radio de una circunferencia se utiliza sin distinción alguna, es decir, se utiliza para referirse al segmento y también para indicar la medida de este.

Semicircunferencia: es un arco de circunferencia cuyos extremos son también los extremos de un diámetro.

Por ejemplo, en la circunferencia de la figura 7 con centro en C y radio r, se pueden observar los siguientes elementos:

Centro: C	Cuerda: $\overline{AB}$
Radio: $\overline{CF}$	Arco: $\widehat{AB}$
Diámetro: $\overline{DE}$	Semicircunferencia: $\widehat{DE}$

Entre los elementos de la circunferencia se pueden establecer las siguientes relaciones:

- La cuerda de mayor longitud en una circunferencia es el diámetro.
- La circunferencia está formada por dos semicircunferencias que tienen en común el mismo diámetro.
- La medida del diámetro es el doble de la medida de un radio.

5.1 Longitud de la circunferencia

La **longitud de la circunferencia** L se determina mediante la expresión $L = 2\pi r$. Donde r es el radio de la circunferencia y $\pi \approx 3{,}14159\ldots$

Cuando se realiza el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, la razón siempre es la misma. Este valor constante es el número *pi*, caracterizado por ser un número decimal no periódico infinito, es decir, un número irracional.

El número *pi* se simboliza con la letra griega π y su valor aproximado es $3{,}1415926\ldots$ aunque generalmente solo se utilizan las dos o tres primeras cifras decimales del número. Así, $\pi \approx 3{,}14$.

Como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es igual a π, se escribe $\frac{L}{d} = \pi$. Luego, se despeja L, con lo cual $L = d\pi$. Finalmente, se remplaza d por $2r$, donde r es el radio de la circunferencia, y se obtiene $L = 2\pi r$.

Historia de las matemáticas

Circunferencia y π

Desde la aparición de la rueda, el hombre ha utilizado las circunferencias. El concepto de redondez se adquirió al observar el Sol, la Luna y otros cuerpos celestes. Uno de los primeros en estudiar la circunferencia fue Arquímedes, quien se interesó por el diámetro y la longitud de la circunferencia, obtuvo el valor de $\pi = 3{,}1416$ del que ahora se conocen más de 10 millones de decimales, gracias a la tecnología informática. Los babilonios habían observado que el valor de π estaba comprendido entre $\frac{25}{8}$ y $\frac{22}{7}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde y explica tu respuesta.

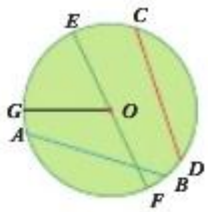
193. ¿Cuáles son los elementos de una circunferencia?

194. ¿A qué equivale el número π?

195. ¿Cómo se determina la longitud de una circunferencia de radio r?

196. ¿Cuál es la relación entre el diámetro y el radio de una circunferencia?

Observa la siguiente circunferencia. Luego, escribe el nombre de los elementos indicados.



197. $\overline{AB}$ =

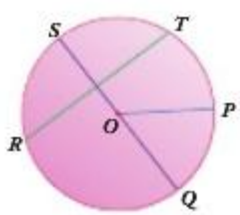
198. $\overline{CD}$ =

199. $\widehat{CD}$ =

200. $\overline{OG}$ =

201. $\widehat{EF}$ =

Determina el valor de verdad de cada proposición teniendo en cuenta la siguiente figura. Justifica tu respuesta.



202. R es un punto de la circunferencia.

203. $\overline{OP}$ es una cuerda de la circunferencia.

204. $\overline{OS}$ es un radio de la circunferencia.

205. $\overline{SQ}$ es una cuerda de la circunferencia.

206. $\overline{RT}$ es un diámetro de la circunferencia.

207. La mayor cuerda de la circunferencia es el diámetro.

Determina la longitud de la circunferencia en cada caso, si r es el radio y d el diámetro.

208. $r = 13$ cm

209. $d = 8{,}6$ m

210. $d = \sqrt{3}$ m

211. $r = \frac{7}{4}$ cm

Halla el dato desconocido.

212. Si la longitud de la circunferencia es 20 cm, ¿cuánto mide el diámetro?

213. Si la longitud de la circunferencia es $\frac{81}{2}$ m, ¿cuánto mide el radio?

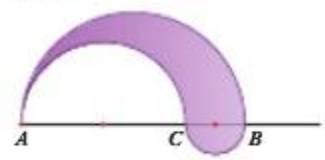
214. La razón entre las longitudes de los radios de dos circunferencias es de 2 a 3. Determina la razón entre las longitudes de las circunferencias.

215. Responde: ¿Cuáles son los elementos mínimos para dibujar una circunferencia?

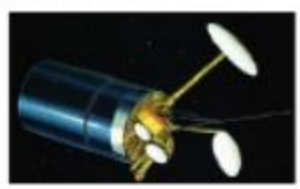
Soluciona.

216. Una agencia de publicidad creó un logotipo para una marca de tablas de *surf*, como muestra la figura.

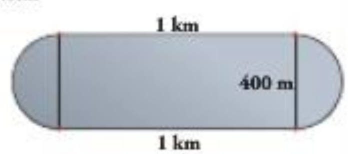
Calcula el perímetro de la figura, si $AC = 6$ cm y $CB = 2$ cm.



217. El satélite Intelsat-6 fue colocado en una órbita de 36.000 km del centro de la Tierra, permaneciendo en la órbita geoestacionaria. Es decir, su velocidad es igual a la velocidad de rotación de la Tierra. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia que describe este satélite?



218. Una pista de automóviles está formada por dos semicircunferencias conectadas con dos vías rectas de 1 km. Determina la longitud total de la pista.



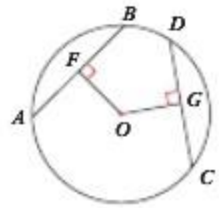
5.2 Propiedades de las cuerdas

Recurso imprimible

Algunas propiedades de las cuerdas son:

En una circunferencia, si dos cuerdas son congruentes, entonces, las cuerdas equidistan del centro.

En la figura, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces, $OF = OG$.



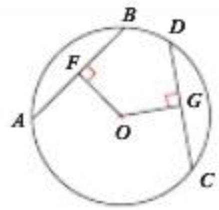
Recuerda que...

La distancia del centro a la cuerda es la medida del segmento perpendicular comprendido entre el punto y la cuerda.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

Si dos cuerdas equidistan del centro, entonces, las dos cuerdas son congruentes.

En la figura, si $OF = OG$, entonces, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



La mediatriz de una cuerda contiene el centro del círculo.

En la figura 8, O está en la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Si una recta pasa por el centro del círculo y corta a la cuerda perpendicularmente, entonces, la recta es la mediatriz de la cuerda. Esto es si O es el centro de la circunferencia y $\overline{OD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, entonces, $\overline{OD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

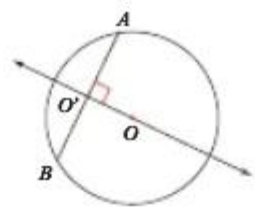
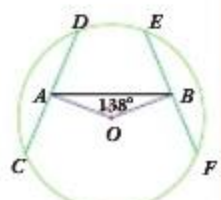


Figura 8.

EJEMPLO

Hallar la amplitud de $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$. En la siguiente circunferencia, las cuerdas CD y EF son congruentes y $m\measuredangle AOB = 138°$.



$\overline{CD} \cong \overline{EF}$	Dato conocido.
$\overline{AO} \cong \overline{OB}$	Se aplica la propiedad de las cuerdas.
$\measuredangle A \cong \measuredangle B$	Por $\triangle AOB$ es isósceles.
$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle O = 180°$	Se aplica la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.
$m\measuredangle A = m\measuredangle B$	Porque los ángulos son congruentes.
$m\measuredangle O = 138°$	
$m\measuredangle A + m\measuredangle A + 138° = 180°$	Se remplazan $m\measuredangle B$ y $m\measuredangle O$.
$2m\measuredangle A = 180° - 138°$	Se resta 138.
$m\measuredangle A = 21°$	Se despeja $m\measuredangle A$.

Por tanto, la amplitud de $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ es 21°.

Afianzo COMPETENCIAS

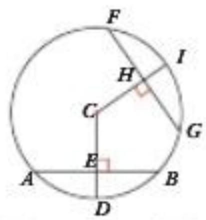
Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Completa cada enunciado.

219. Si dos cuerdas equidistan del centro, entonces, ________________________________.

220. La mediatriz de una cuerda contiene ________________________________.

Indica la definición o propiedad que justifica cada una de las siguientes proposiciones. Explica tu respuesta.



221. Si $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, entonces, $\overline{CE} \cong \overline{CH}$.

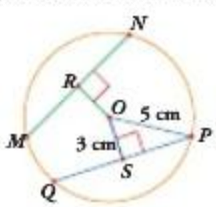
222. Si $\overline{HI} \cong \overline{DE}$, entonces, $\overline{AB} \cong \overline{FG}$.

223. Si $\overline{CE} \cong \overline{CH}$, entonces, $\overline{AB} \cong \overline{FG}$.

224. Si $\overline{CD}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, entonces, $AE = EB$.

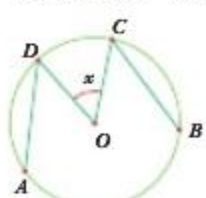
Halla.

225. La longitud de las cuerdas $\overline{QP}$ y $\overline{MN}$.



226. La medida del $\sphericalangle DOC$.

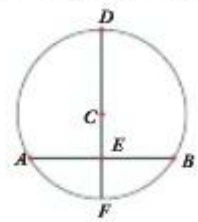
$m(\widehat{AB}) = 148°$, $m(\widehat{BC}) = 86°$, $\overline{DA} \cong \overline{CB}$



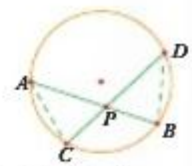
227. La longitud de una cuerda, si la circunferencia tiene un radio de 6 cm y dista 4 cm del centro.

228. El radio de una circunferencia, donde una cuerda de 15 cm de longitud está a una distancia de 3,5 cm del centro.

229. Encuentra la distancia de la cuerda $\overline{AB}$ al centro C de la circunferencia, teniendo en cuenta que la medida del radio es 10 cm, la cuerda $\overline{AB}$ mide 16 cm y $\overline{DF}$ es su mediatriz.



230. Completa la tabla de la demostración del siguiente teorema.

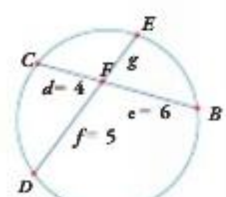


Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas de una circunferencia que se cortan en un punto P, además sabiendo que $m\sphericalangle ACP = m\sphericalangle DBP = 90°$, entonces:

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

Proposición	Justificación
$\sphericalangle BPD \cong \sphericalangle APC$	
$\sphericalangle CDB \cong \sphericalangle BAC$	
$\triangle APC \sim \triangle DPB$	
	Lados proporcionales

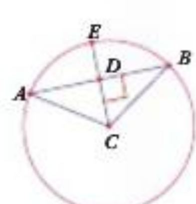
231. Determina la medida de g, aplicando la propiedad demostrada.



232. En una circunferencia, la cuerda $\overline{CD}$ es perpendicular al diámetro $\overline{AB}$ en el punto P. Si $PA \cdot PB = 3$, ¿cuál es la medida $\overline{CD}$?

233. Demuestra que:

Si $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, entonces, $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.



5.3 Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

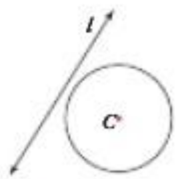
Enlace web

Según su posición, una recta puede ser exterior, secante o tangente a una circunferencia que se encuentre en el mismo plano.

Recta exterior a una circunferencia

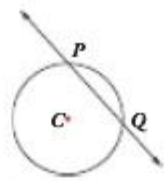
Una recta es exterior a una circunferencia si no tienen ningún punto en común, es decir, cuando la recta y la circunferencia no se intersecan.

En la figura, la recta l es exterior a la circunferencia de centro C.



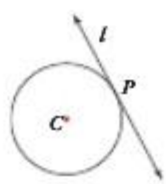
Recta secante a una circunferencia

Una recta es secante a una circunferencia cuando la interseca en dos puntos. De acuerdo con esto, toda recta que contenga una cuerda de la circunferencia es una recta secante de dicha circunferencia. Por ejemplo, en la siguiente figura, $\overline{PQ}$ es una cuerda de la circunferencia de centro C y la recta PQ es secante a la circunferencia.



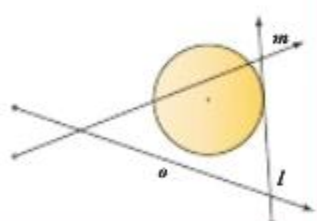
Recta tangente a una circunferencia

Una recta es tangente a una circunferencia cuando entre sí tienen solo un punto en común, es decir, cuando la recta interseca a la circunferencia exactamente en un punto. Por ejemplo, en la siguiente figura la recta l es tangente a la circunferencia de centro C, exactamente en el punto P.



EJEMPLO

Nombrar las rectas secante, tangente y exterior a la siguiente circunferencia.



Recta secante: m.

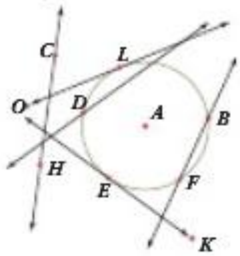
Recta tangente: l.

Recta exterior: o.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Razono · Soluciono problemas

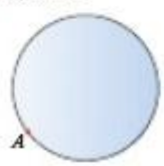
234. Observa la figura y resuelve.



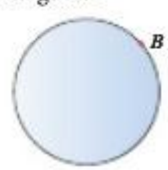
Nombra las rectas exteriores, las rectas secantes y las rectas tangentes a la circunferencia de centro *A*.

Traza la línea recta por el punto que se indica en cada caso.

235. Secante.



236. Tangente.

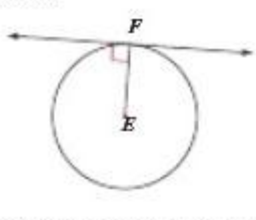


Responde cada pregunta realizando un dibujo o justificando la respuesta.

237. ¿Cuántas rectas secantes a la circunferencia pasan por su centro?

238. ¿Cuántas rectas exteriores a la circunferencia pasan por el centro de la circunferencia?

239. ¿Cuántas rectas tangentes a la circunferencia pasan por los extremos de una cuerda de la circunferencia?



Completa las siguientes proposiciones, a partir de la figura.

240. Si una recta es tangente a la circunferencia, entonces, ____________________.

241. Si una recta es perpendicular a un radio de la circunferencia, entonces, ________________.

Realiza el dibujo que corresponde a las condiciones en cada caso.

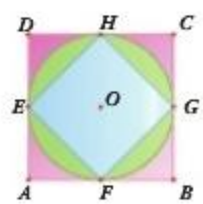
242. Dos rectas secantes a una circunferencia que no tengan puntos en común.

243. Dos rectas tangentes a una circunferencia que se corten en un punto.

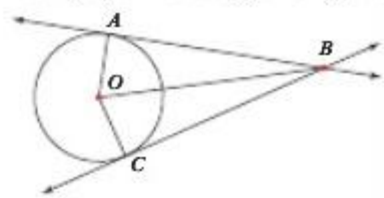
244. Tres rectas secantes a una circunferencia que se corten en un único punto.

245. En la figura, el radio de la circunferencia de centro *O* es de 5 cm.

Determina el área de los cuadrados *ABCD* y *EFGH*.



Determina las medidas que se indican para cada información, a partir de la siguiente figura.



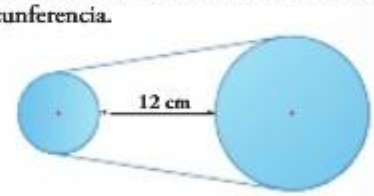
246. $AB = 4$, $AO = 3$ cm, OB.

247. $OB = 10$ cm, $AO = 6$ cm, BC.

248. $OC = 15$ cm, $m\sphericalangle OBC = 22°$, AB.

249. $m\sphericalangle AOB = 60°$, $m\sphericalangle OBC$.

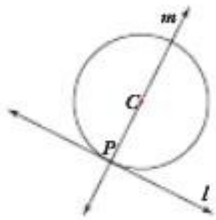
250. En la figura se observan dos poleas. La distancia entre sus centros es de 48 cm y la medida del radio de una es el doble de la medida de la otra. Determina la medida del radio de cada circunferencia.



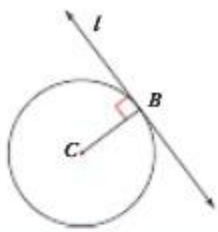
5.4 Propiedades de las tangentes

Cuando una recta es tangente a una circunferencia se tienen las siguientes propiedades:

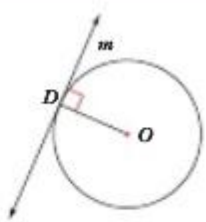
Si la recta l es tangente a la circunferencia en el punto P y la recta m es perpendicular a la recta l en el punto P, entonces, m contiene al centro de la circunferencia C.



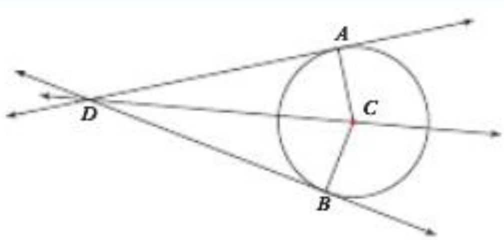
Si la recta l es perpendicular al radio $\overline{CB}$, de tal forma que el punto B pertenece a la circunferencia y a la recta, entonces, la recta l es tangente a la circunferencia.



Si la recta m es tangente a la circunferencia en el punto D, entonces, el radio $\overline{OD}$ es perpendicular a m.



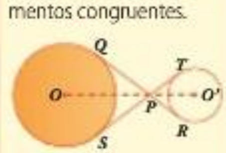
Si las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y BD son tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente, entonces, $\overline{CD}$ es la bisectriz del ángulo ADB y los segmentos de recta $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son congruentes.



Las chispas que se desprenden de la bengala, siguen una trayectoria rectilínea tangente a la circunferencia.

Matemáticamente

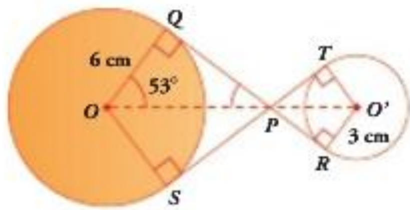
Demuestra que dos tangentes internas comunes a dos circunferencias trazadas desde un punto exterior P, determinan segmentos congruentes.



$\overline{QR} \cong \overline{ST}$

EJEMPLO

Determinar la medida de $\overline{ST}$, a partir de la figura.



En el $\triangle OQP$ se tiene:

$m\measuredangle QOP = 53°$, $m\measuredangle OPQ = 37°$.

Si $OQ = 6$ cm, entonces:

$\tan 53° = \dfrac{QP}{OQ} = \dfrac{QP}{6}$ Se plantea la razón trigonométrica.

$(\tan 53°) \cdot 6 = QP$ Se despeja QP.

$QP = 8$ Se resuelven las operaciones.

En el $\triangle PRO'$ se tiene que:

$m\measuredangle PO'R = 53°$, $m\measuredangle RPO' = 37°$.

Si $O'R = 3$ cm, entonces:

$\tan 53° = \dfrac{PR}{RO'} = \dfrac{PR}{3}$ Se plantea la razón trigonométrica.

$(\tan 53°) \cdot 3 = PR$ Se despeja PR.

$PR = 4$ Se resuelven las operaciones.

Como $\overline{QR} \cong \overline{ST}$, entonces:

$QR = QP + PR = 8 + 4 = 12$.

Luego, $QR = ST = 12$ cm.

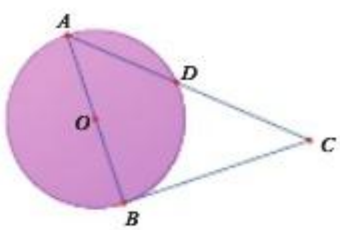
Por tanto, $ST = 12$ cm.

Afianzo COMPETENCIAS

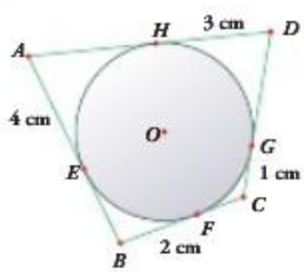
Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

251. **Explica, mediante un ejemplo, las propiedades de las tangentes a una circunferencia.**

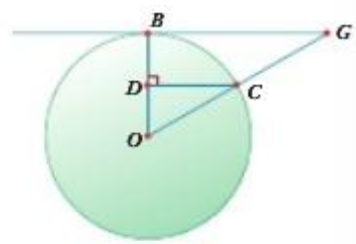
252. **El triángulo ABC es rectángulo en B. AB diámetro de la circunferencia de radio 6 cm. $BC = 12$ cm. Calcula AD.**



253. **El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito en la circunferencia. Calcula el perímetro del cuadrilátero.**



En la circunferencia de centro O, $\overleftrightarrow{GB}$ es tangente y $\overline{DC}$ es perpendicular a $\overline{OB}$. Resuelve.

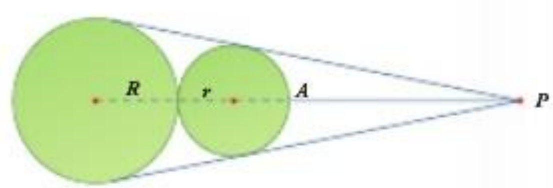


254. Si $OD = 5$ cm y $OG = 12$ cm, $OB = ?$

255. Si $BG = 12$ cm y $OG = 13$ cm, $CG = ?$

256. Si $OC = 9$ cm y $OD = 3$ cm, $GB = ?$

257. **Dos circunferencias de radio R y r, con $R > r$. Si las circunferencias son tangentes, como se muestra en la figura, determina PA.**



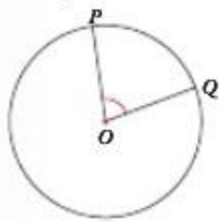
5.5 Ángulos de la circunferencia

Actividad Enlace web

Una circunferencia divide el plano en tres regiones: el *interior de la circunferencia*, el *exterior de la circunferencia* y la *circunferencia*. De acuerdo con esto, los ángulos de la circunferencia se clasifican en ángulo central, inscrito, semiinscrito, exterior e interior.

Ángulo central

Un ángulo es central si su vértice es el centro de la circunferencia. La medida del ángulo central es igual a la medida del arco que determina en la circunferencia.

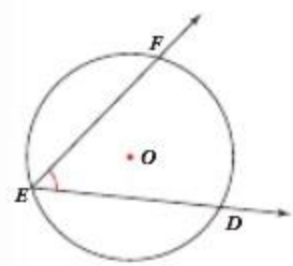


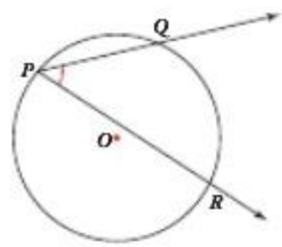
En la circunferencia de centro O, el $\sphericalangle POQ$ es un ángulo central y su medida es igual a la medida de $\widehat{PQ}$.

Ángulo inscrito

Un ángulo está inscrito en una circunferencia si su vértice es un punto de la circunferencia y sus dos lados contienen dos cuerdas de la circunferencia.

Un ángulo inscrito determina un arco llamado **arco interceptado**. Por ejemplo, $\sphericalangle DEF$ es un ángulo inscrito en la circunferencia y $\widehat{DF}$ es el arco interceptado.

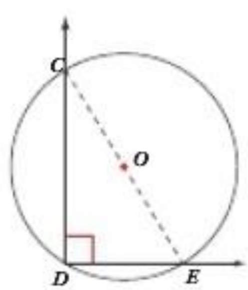




Un ángulo inscrito mide la mitad de la medida del arco que intercepta en la circunferencia. Así el $\sphericalangle DEF$ y el $\sphericalangle QPR$ son ángulos inscritos en la circunferencia y sus medidas son:

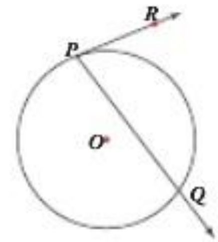
$$\text{m}\sphericalangle DEF = \frac{1}{2}\,\text{m}\sphericalangle DOF = \frac{1}{2}\,\text{m}\widehat{DF} \text{ y } \text{m}\sphericalangle QPR = \frac{1}{2}\,\text{m}\sphericalangle QOR = \frac{1}{2}\,\text{m}\widehat{QR}$$

Una consecuencia de esta propiedad es que si un ángulo está inscrito en una semicircunferencia, su medida es 90°, es decir, todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



Ángulo semiinscrito

Un ángulo está semiinscrito en una circunferencia si tiene su vértice en la circunferencia, un lado contiene una cuerda y el otro lado es tangente a la circunferencia.



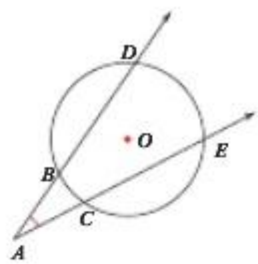
La medida de un ángulo semiinscrito es la mitad del arco que intercepta en la circunferencia.

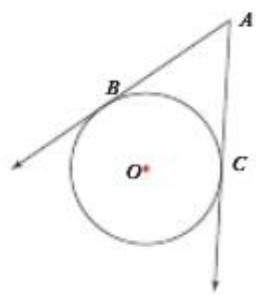
Así, el $\sphericalangle QPR$ está semiinscrito en la circunferencia y su medida es la mitad de la medida del arco interceptado. Así:

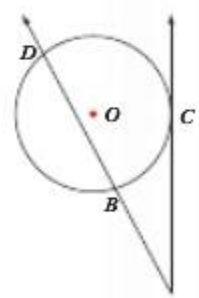
$$m\sphericalangle QPR = \frac{1}{2}\, m\sphericalangle QOP = \frac{1}{2}\, m\widehat{PQ}$$

Ángulo exterior

Un ángulo exterior a una circunferencia es un ángulo que tiene su vértice en el exterior de la circunferencia. Los lados del ángulo pueden ser ambos secantes, ambos tangentes o un lado secante y el otro tangente a la circunferencia.



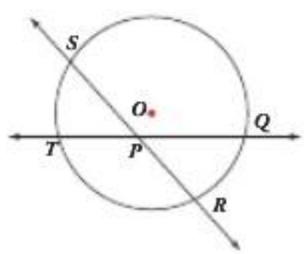




La medida del ángulo exterior corresponde a la mitad de la diferencia de la medida de los dos arcos interceptados. Por ejemplo, $m\sphericalangle DAE = \frac{1}{2}\left(m\widehat{DE} - m\widehat{BC}\right)$.

Ángulo interior

Un ángulo interior es un ángulo que tiene su vértice en el interior de la circunferencia. El vértice del ángulo es un punto diferente al centro. Cuando dos cuerdas se intersecan en un punto diferente del centro forman cuatro ángulos interiores.



La medida de un ángulo interior corresponde a la mitad de la suma de los arcos interceptados.

Por ejemplo, $m\sphericalangle SPT = \frac{1}{2}\left(m\widehat{ST} + m\widehat{QR}\right)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

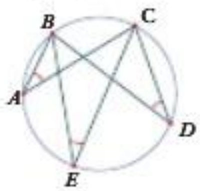
Realiza el dibujo del ángulo que se indica.

258. Ángulo inscrito con 50° de medida.

259. Ángulo exterior con 40° de medida.

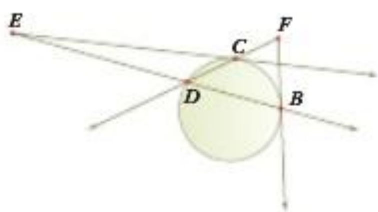
260. Ángulo interior con 150° de medida.

261. Determina la medida de los ángulos que se indican en la figura. Justifica tu respuesta.

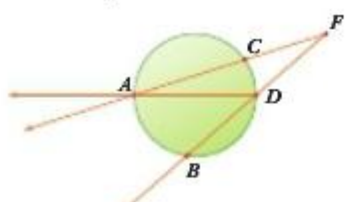


Determina las medidas de los datos que se indican en cada caso.

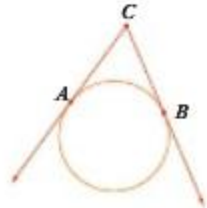
262. Si $\overset{\frown}{CB} = 90°$ y $\overset{\frown}{CD} = 30°$, halla la medida de $\measuredangle BEC$ y $\measuredangle DFB$.



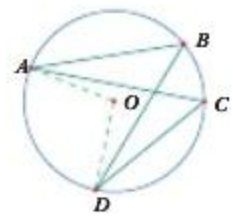
263. Si $\overset{\frown}{AB} = 90°$ y $\overset{\frown}{CD} = 60°$, determina las medidas de $\measuredangle BFA$ y $\measuredangle CAD$.



264. Si el arco menor $m\overset{\frown}{AB} = 80°$ y el arco mayor $m\overset{\frown}{AB} = 280°$, halla la medida de $\measuredangle ACB$.



En la figura, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$ son cuerdas de la circunferencia de centro O. Usa cada información para hallar la medida de los datos desconocidos.

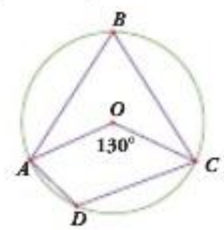


265. Si $m\overset{\frown}{AD} = 100°$, entonces, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.

266. Si $m\measuredangle C = 35°$, entonces, $\measuredangle B$ y $\overset{\frown}{AD}$.

267. Si $m\measuredangle D = 26°$, entonces, $\measuredangle D$ y $\overset{\frown}{BC}$.

Observa la figura. Luego, resuelve.

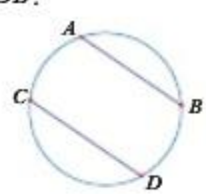


268. $m\measuredangle ADC$

269. $m\measuredangle AOB$

270. $m\measuredangle ABC$

271. Demuestra que si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces, $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DB}$.



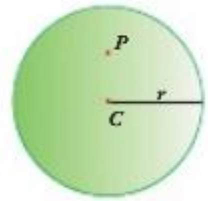
272. En una presentación de acrobacia aérea, un avión realiza un bucle circular en un plano vertical. Desde un punto P en el suelo, perteneciente al plano, se observa el movimiento del avión cuando se describe un arco $\overset{\frown}{AB}$ de 60° de medida.

Si $m\measuredangle APB = 45°$, calcula la medida del arco más grande $\overset{\frown}{CD}$, que describe el avión, sobre el mismo plano del $\measuredangle APB$.

6. Círculo

Un **círculo** es el conjunto de puntos de un plano, formado por los puntos de una circunferencia y por los puntos que están en su interior.

Los elementos principales del círculo son el centro C y el radio r. Además, si P es un punto que pertenece al círculo, se cumple que $CP \leq r$, es decir, que la distancia del centro al punto P siempre es menor o igual que el radio r.

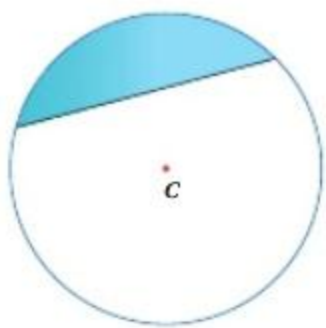


6.1 Regiones en el círculo

En un círculo se pueden determinar las siguientes regiones.

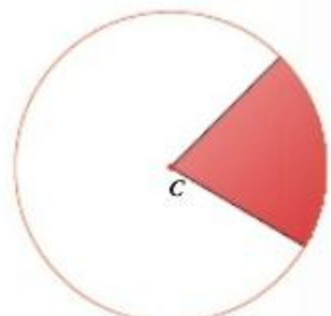
Segmento circular

Es la región del círculo limitada por una cuerda y por el arco de circunferencia correspondiente.



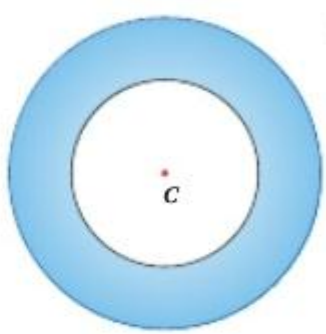
Sector circular

Es la región del círculo limitada por dos radios y por el arco de circunferencia comprendido entre ellos.



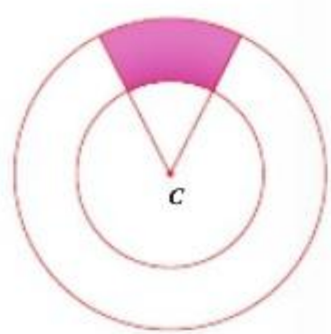
Corona circular

Es la región del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas (que tienen el mismo centro).



Trapecio circular

Es la región del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas y dos radios.



Recuerda que…

El segmento circular limitado por el diámetro del círculo y por la semicircunferencia se denomina *semicírculo*.

6.2 Área del círculo

El **área del círculo** se calcula mediante la expresión

$$A = \pi r^2$$

Donde r es el radio del círculo.

Para deducir la expresión $A = \pi r^2$, se inscriben en una circunferencia de radio r distintos polígonos regulares, de tal forma que el número de lados n, de cada polígono, sea cada vez mayor. Luego, se divide cada polígono regular en n triángulos como se muestra a continuación.

Si la altura de cada triángulo es h y la medida de cada lado del polígono es b, se tiene que

$$A_p = n\left(\frac{bh}{2}\right) = \frac{(nb)h}{2}$$

Donde A_p es el área de cada polígono. Como el número de lados de cada polígono va aumentando, la expresión nb, que corresponde al perímetro del polígono, se aproxima a la longitud de la circunferencia ($nb \approx 2\pi r$).

Así mismo, la altura de cada triángulo se aproxima al radio de la circunferencia ($h \approx r$), con lo cual el área del polígono también se aproxima al área del círculo ($A_p \approx A_c$).

Entonces, se deduce que el área del círculo es:

$$A_c = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$$

EJEMPLO

Calcular el área de un círculo que tiene 18 cm de diámetro.

Primero, se determina el radio r del círculo. Como el diámetro es 18 cm, se tiene que $r = 9$ cm.

$$2r = 18 \text{ cm}$$
$$r = 9 \text{ cm}$$

Luego, se remplaza el valor del radio en la expresión que permite calcular el área del círculo.

$$A = \pi(9)^2 = 81\pi$$

Finalmente, se aproxima el área del círculo.

$$A = 81\pi \approx 254{,}47$$

Por tanto, el área de un círculo es, aproximadamente, 254,47 cm^2 si tiene 18 cm de diámetro.

6.3 Áreas de las regiones circulares

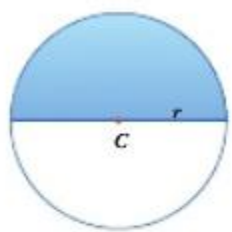
Enlace web

Las expresiones para calcular el área de las regiones circulares se deducen a partir de la fórmula del área del círculo. Para calcular el área del semicírculo, del sector circular, de la corona circular y del trapecio circular, se utilizan las siguientes expresiones.

Matemática*mente*

¿Cómo se deducen las fórmulas para calcular el área de un sector y de una corona circular, a partir de la expresión $A = \pi r^2$?

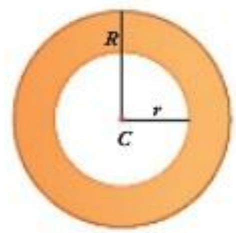
Semicírculo



r: radio

$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

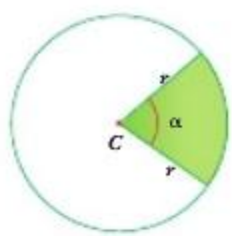
Corona circular



R: radio mayor $\quad$ r: radio menor

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

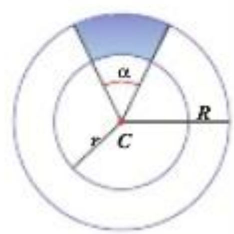
Sector circular



r: radio $\quad$ α: ángulo en grados

$$A = \frac{\alpha\pi}{360} \cdot r^2$$

Trapecio circular



R: radio mayor $\quad$ r: radio menor

$$A = \frac{\alpha\pi}{360} \cdot (R^2 - r^2)$$

EJEMPLO

Calcular el área de un sector circular cuyos radios forman un ángulo de 60° y miden 6 cm.

Primero, se identifican las variables. Se tiene que $\alpha = 60°$ y $r = 6$ cm.

Luego, se remplazan los valores en la expresión que permite calcular el área de un sector circular.

$$A = \frac{60\pi}{360} \cdot (6)^2 = 6\pi$$

Finalmente, se aproxima el área. Por tanto, el área del sector circular es

$$A \approx 18{,}85 \text{ cm}^2.$$

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Explica tu respuesta.

273. El círculo lo conforman únicamente el conjunto de puntos que están en el interior de la circunferencia.

274. El área de un círculo de radio r está dada por la expresión $A = \pi r^2$.

275. Una corona circular es la región comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente.

276. Un semicírculo es un segmento circular limitado por el diámetro y la semicircunferencia.

Calcula el área aproximada de cada círculo, en centímetros cuadrados, a partir de su radio r o de su diámetro d.

277. $r = 7$ cm

278. $r = 8{,}5$ cm

279. $r = 19$ cm

280. $r = 0{,}12$ m

281. $d = 18$ cm

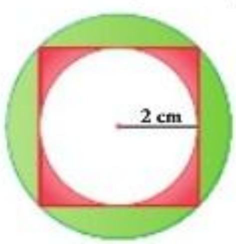
282. $d = 21$ cm

283. $d = 12{,}5$ cm

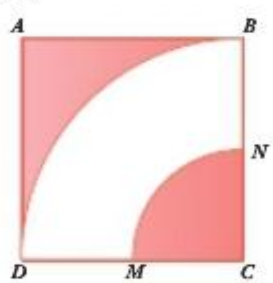
284. $d = 0{,}31$ m

Responde.

285. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la superficie verde y el área de la superficie roja?

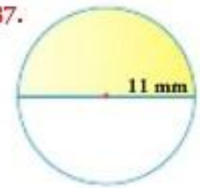


286. Si cada lado del cuadrado $ABCD$ mide 16 cm y M, N son puntos medios de los lados CD y BC, respectivamente, ¿cuál es el área de la región sombreada?

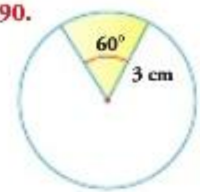


Calcula el área de las siguientes regiones circulares.

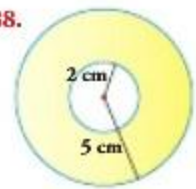
287.



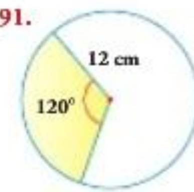
290.



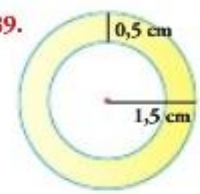
288.



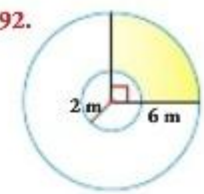
291.



289.

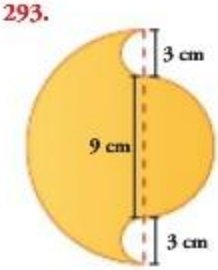


292.

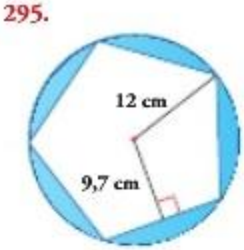


Calcula el área de cada región sombreada.

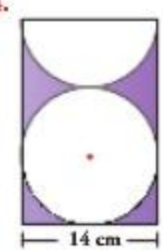
293.



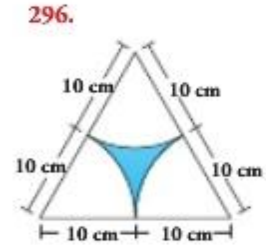
295.



294.



296.



297. Escribe el procedimiento para resolver la siguiente situación.

Si el área de una corona circular es 50 cm² y uno de los radios mide 3 cm, ¿cuál es la medida del otro radio?

EJERCICIOS PARA REPASAR

Proposiciones lógicas

Simboliza la negación de las siguientes proposiciones. Luego, escribe la negación en lenguaje natural y determina su valor de verdad.

298. Algunos triángulos escalenos tienen un par de lados congruentes.

Negación: ______________________

__________ Valor de verdad: __________

299. Todos los rectángulos son paralelogramos.

Negación: ______________________

__________ Valor de verdad: __________

Teoría de la demostración

Escribe el siguiente teorema de la forma $p \rightarrow q$. Luego, escribe su contrarrecíproca.

300. Dadas dos rectas que se intersectan, hay exactamente un plano que las contiene.

$p \rightarrow q$: ______________________

$\neg q \rightarrow \neg p$: ______________________

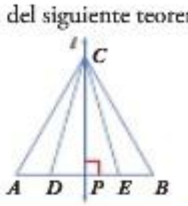
301. Completa la demostración del siguiente teorema:

Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\overline{CD} \cong \overline{CE}$

l es mediatriz de $\overline{AB}$

Tesis: $\triangle ADC \cong \triangle BEC$



Proposición	Justificación
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Hipótesis
$\overline{CD} \cong \overline{CE}$	
l es mediatriz de $\overline{AB}$	
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA$	
$\sphericalangle CDE \cong \sphericalangle CED$	
	Son suplementos de ángulos congruentes
$AP = BP$	
$DP = EP$	
$AD = BE$	
$\triangle ADC \cong \triangle BEC$	

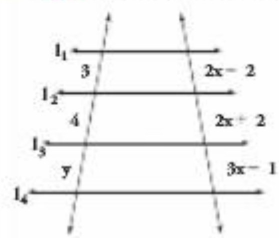
Resuelve.

302. Demuestra el teorema anterior en tu cuaderno sin la hipótesis: "l es mediatriz de $\overline{AB}$".

303. Dibuja un polígono que sirva como contraejemplo para refutar la siguiente proposición: "todo pentágono que tenga dos ángulos internos rectos es convexo".

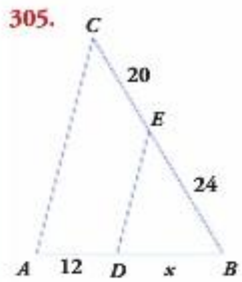
Razones y proporciones

304. Calcula $x + y$, si $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$.

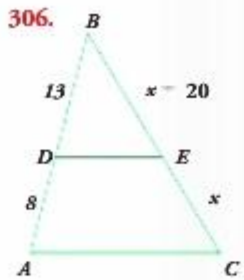


Calcula el valor de x en cada caso, si $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.

305.



306.



Completa.

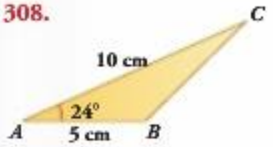
307. En dos triángulos semejantes se verifica que la proporción de sus lados es de 1 a 3. Si la suma de ambas áreas es 15 cm^2 el área en cada uno es…

Semejanza

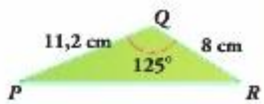
Halla las medidas de los lados y de los ángulos que hacen falta teniendo en cuenta que

$$\triangle ABC \sim \triangle PRQ.$$

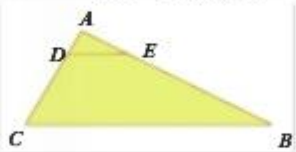
308.



309.



310. Calcula la razón entre el área del $\triangle ADE$ y el área del trapecio $BCDE$, si $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, $AD = 2$ cm y $AC = 8$ cm.



311. Lee la hipótesis y la tesis. Luego, realiza la demostración en tu cuaderno.

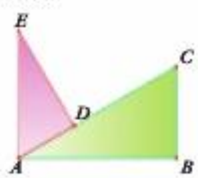
Hipótesis:

$\overline{AE} \perp \overline{AB}$,

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$ y

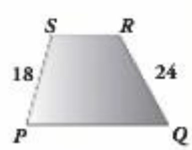
$\overline{ED} \perp \overline{AC}$

Tesis: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$



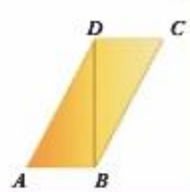
Lee y responde.

312. El cuadrilátero $PQRS$ es un trapecio tal que $SR \parallel PQ$. Si sen $\measuredangle P = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de sen $\measuredangle Q$?



____

313. En el paralelogramo $ABCD$ se cumple que $\overline{BD} \perp \overline{AB}$. Si $AB = 10$ cm y tan $\measuredangle A = 1$, ¿cuál es el área de $ABCD$?



____

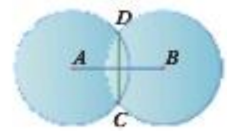
Circunferencia

314. Lee y completa.

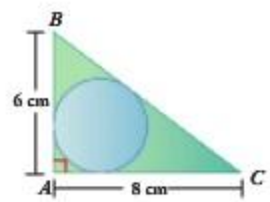
El radio de las circunferencias cuyos centros son A y B mide 16 cm.

$CD = 24$ cm

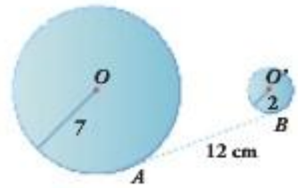
$AB =$ ________



315. Calcula la medida del radio de la circunferencia, si es tangente a los tres lados del $\triangle ABC$.



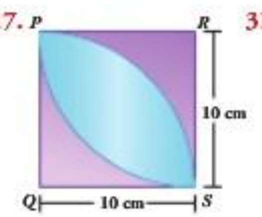
316. En la siguiente figura $\overline{AB}$ es tangente en A y en B, a las circunferencias de centros O y O', respectivamente. Halla la distancia entre O y O'.



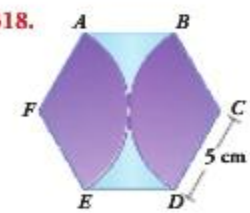
Círculo

Calcula el área de la región coloreada de azul en cada caso.

317.



318.

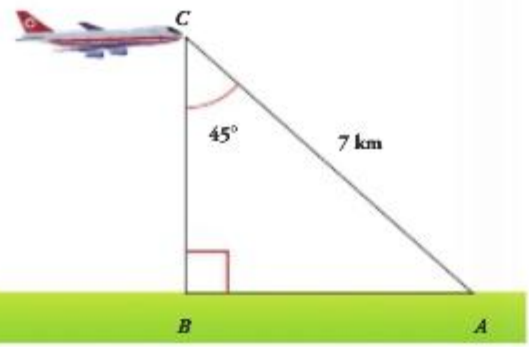


F es el centro de $\widehat{AE}$.
C es el centro $\widehat{BD}$.

PROBLEMAS PARA REPASAR

Desde un punto C un piloto observa un punto A a 7 km en el cual inicia la pista de aterrizaje como se muestra en la figura.

¿A qué altura en relación con la pista del aeropuerto está el avión?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿A qué altura en relación con la pista del aeropuerto está el avión?

¿Cuáles son los datos del problema?

La distancia desde un punto C en el aire, hasta un punto A en tierra es 7 km.

El ángulo $\measuredangle BCA$ es 45°.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determina qué dato es el que se debe hallar con relación a la figura. En este caso, lo que se quiere hallar es la distancia x desde C hasta B.

Segundo, se determina cuáles datos del triángulo son los que se tienen y cuál es el que se va hallar.

Se tienen la hipotenusa y el ángulo adyacente al lado CB y se debe hallar el lado adyacente al ángulo de 45°.

Finalmente, se calcula el lado adyacente conociendo los otros datos, mediante la razón trigonométrica del coseno, así:

$$\cos 45° = \frac{x}{7} \quad \text{Se plantea la razón.}$$

$$x = 7 \cos 45° \quad \text{Se despeja } x.$$

$$x = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$x \approx 4{,}95 \quad \text{Se realizan operaciones.}$$

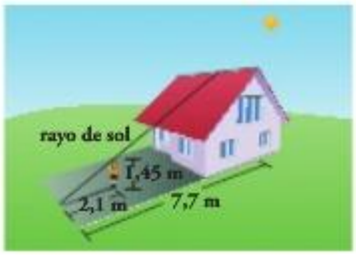
Paso 3 Verifica la respuesta.

Se verifica que las operaciones se hayan realizado correctamente.

Luego, se tiene que el avión está a 4,95 km de la pista del aeropuerto.

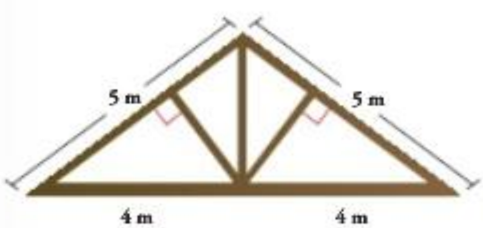
Resuelve.

319. Johanna quiere calcular la altura de su casa a partir de la proyección de su sombra y la de la casa, como se muestra en la siguiente figura.



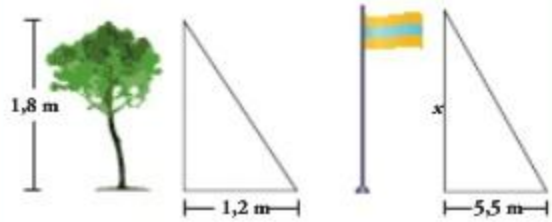
¿Cuál es la altura de la casa?

320. Un carpintero diseñó la siguiente estructura en madera como soporte para el tejado de una casa, que está conformada por seis vigas. ¿Cuántos metros en total tienen las seis vigas de madera?

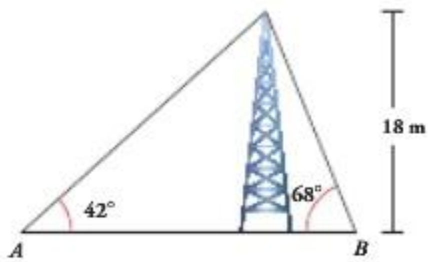


321. Un turista ubicado a 60 m de la base de la Torre Eiffel observa su parte más alta con un ángulo de elevación de 80°. ¿Cuál es la altura aproximada de la torre?

322. Si un árbol de 1,8 m de altura proyecta una sombra de 1,2 m de longitud, ¿cuál es la altura de un mástil de bandera que a la misma hora proyecta una sombra de 5,5 m de longitud?



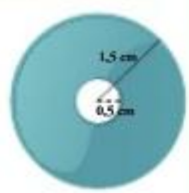
323. Observa la siguiente antena. Luego, responde.



¿Cuál es la longitud de los cables que sostienen la antena?

324. Un artesano elabora portavasos como el que se muestra en la imagen y los vende en juegos de seis. Calcula la cantidad de material necesario para elaborar cada juego de portavasos.

325. Una placa de acero rectangular de 60 cm por 30 cm se utiliza para elaborar arandelas con las dimensiones que se muestran en la imagen. ¿Qué área, en centímetros cuadrados, de la placa será utilizada para elaborar las arandelas?



Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para comprender la construcción de túneles en ingeniería civil.

Galería de imágenes

En nuestro país las formaciones rocosas y las cordilleras que lo atraviesan conforman el 33% del territorio, ya que este cuenta con un gran sistema montañoso andino formado por las tres cordilleras y los valles interandinos que lo rodean. Por esta razón, la comunicación terrestre entre ciudades se hace difícil. Para ello, los ingenieros, en los últimos años, han decidido construir diferentes túneles en el territorio nacional.

Existen túneles como el de Buena Vista-Misael Pastrana Borrero con una longitud de 4.560 m, que une las ciudades de Villavicencio y Bogotá, o el túnel Sumapaz, con una longitud de 4.173 m, que une las ciudades de Bogotá y Melgar. También existen proyectos como el túnel de La Línea que, con una longitud total de 8.600 m, pretende atravesar la cordillera Central convirtiéndose en el túnel más largo construido en el país.

Uno de los problemas de la construcción de túneles radica en que la excavación que se hace en un punto finalice satisfactoriamente donde se desea. Este problema se puede resolver aplicando la semejanza de triángulos como se muestra en los siguientes pasos:

Primero, se hace un esquema mostrando el punto inicial del túnel A y el punto final B, desde una vista superior como se observa en la figura 1.

Luego, se traza una línea poligonal $ACDEB$ teniendo en cuenta que los ángulos C, D y E son rectos. Además, se trazan líneas paralelas a CD y DE que pasen por los puntos A y B, y que se intersequen en el punto T. De esta manera se forma un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 2.

Figura 1.

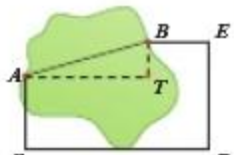


Figura 2.

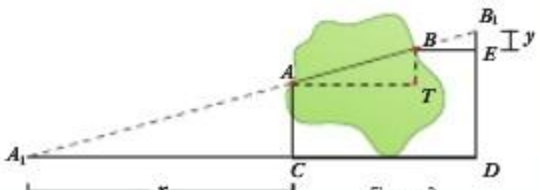


Figura 3.

Finalmente, se prolonga el $\overline{AB}$ de tal forma que se interseque con $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{DC}$ en los puntos B_1 y A_1, respectivamente. De esta manera se forman cuatro triángulos semejantes como se muestra en la figura 3.

Conociendo las medidas de BA, AC, CD, DE y BE se pueden hallar las longitudes x y y, y así conocer la ubicación exacta de los puntos A_1 y B_1. Siguiendo en línea recta la trayectoria A_1A y B_1B se logra cavar correctamente para que la salida del túnel sea en el lugar deseado.

1. **En una hoja milimetrada, realiza la construcción geométrica a escala de los triángulos semejantes para realizar un túnel de 4.500 m de longitud.**

2. **Para el túnel de La Línea se construyen las líneas poligonales cuyas medidas son $AC = 1.000$ m, $CD = 8.728{,}6$ m; $DE = 3.500$ m; $EB = 500$ m y $A_1B_1 = 13.000$ m.**
   - **a.** Realiza la construcción geométrica a escala.
   - **b.** Calcula el valor de x y de y.

3. **Algunos de los túneles no van necesariamente en línea recta desde el inicio hasta el final.**
   - **a.** ¿El análisis de triángulos semejantes, puede ser válido para la construcción de estos túneles? Explica tu respuesta.
   - **b.** ¿Cómo se podría plantear la relación de triángulos semejantes para este caso?

...También sirve para comprender las dimensiones de algunas estructuras arquitectónicas.

La divina proporción o proporción áurea es una proporción numérica específica que se utiliza para describir matemáticamente estándares de belleza a partir de la geometría. Esta proporción está dada por la expresión:

$$\frac{A}{B} = \frac{(A + B)}{A}$$

Donde A y B son las medidas de diferentes segmentos, tales que $A > B$. Cuando se resuelve la ecuación para $B = 1$ se obtiene la siguiente expresión:

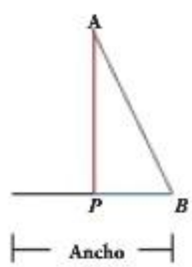
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618034...$$

Donde ϕ es conocido como el número áureo, el cual se encuentra en muchas relaciones de la naturaleza, como en la proporción de abejas macho y hembra que hay en un panal y la disposición de los pétalos en una flor.

En arquitectura, se diseñan espacios proporcionales con el cuerpo humano a partir de triángulos y rectángulos áureos. Un rectángulo áureo es aquel en el que el ancho y el largo cumplen la proporción áurea. Muchas obras arquitectónicas se han diseñado con base en rectángulos áureos, tales como el Partenón de Atenas y el Arco del Triunfo de Constantino en Roma.

Para construir un rectángulo áureo se trazan dos segmentos perpendiculares cuyas medidas sean iguales al ancho del rectángulo y se unen dos de sus puntos extremos para formar un segmento AB. Luego, se construye el largo del rectángulo a partir del segmento AB y de la mitad del ancho como se muestra en la figura de la derecha.

Las distancias entre las espiras de la concha del *nautilus* cumplen la proporción áurea.



Rectángulo áureo

1. **Busca elementos en tu casa o colegio que conserven la proporción áurea.**
2. **La distancia entre los pilares de la Torre Eiffel es 100 metros y constituye el ancho de un rectángulo áureo. Si se colocan dos rectángulos áureos con este mismo ancho se logra la altura total de la torre como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura aproximada de la Torre Eiffel?**

3. **Construye los rectángulos áureos cuyos anchos son 3 cm, 5 cm y 7 cm.**
4. **Si necesitaras diseñar una ventana rectangular para tu casa, de tal forma que cumpliera la proporción áurea, ¿cuáles podrían ser las medidas del ancho y del largo?**
5. **En el mundo, muchos artistas, especialmente pintores, han trabajado la proporción áurea. Averigua dos obras artísticas que tengan la proporción áurea.**

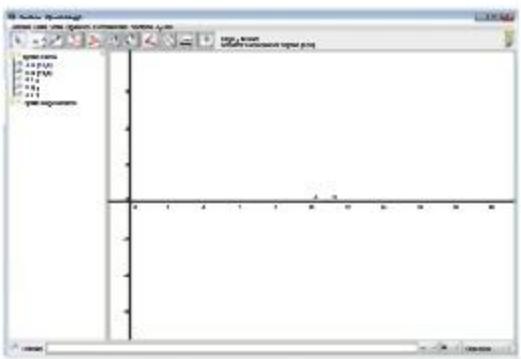
Trabaja con GeoGebra

Objetivo: aplicar el concepto de circunferencias tangentes en la construcción de lugares geométricos.

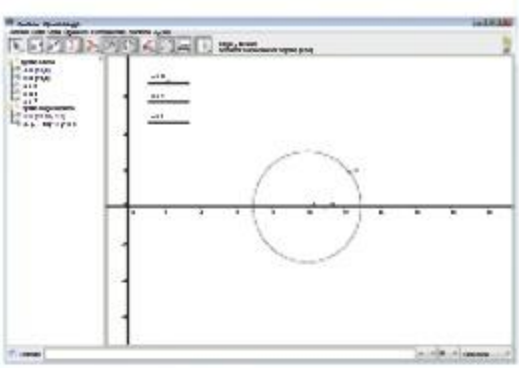
Concepto: un lugar geométrico es el conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad, la cual se define en términos de la distancia a puntos, rectas, circunferencias o en términos del valor de un ángulo. Por ejemplo, la epicicloide es el lugar geométrico que describe un punto de una circunferencia al girar en el exterior de otra circunferencia de radio fijo.

1 En el cuadro **Entrada** ingresa uno por uno los siguientes datos:

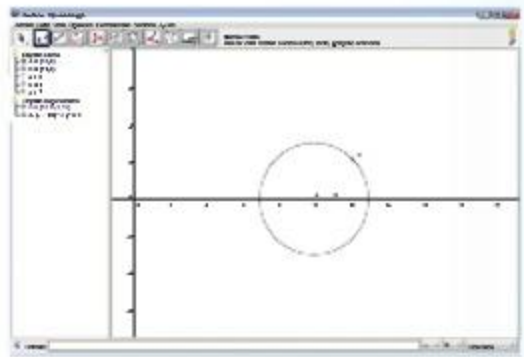
(10, 0)	Se define el punto A.
(11, 0)	Se define el punto B.
3	Se define el número $a = 3$.
1	Se define el número $b = 1$.
1	Se define el número $c = 1$.



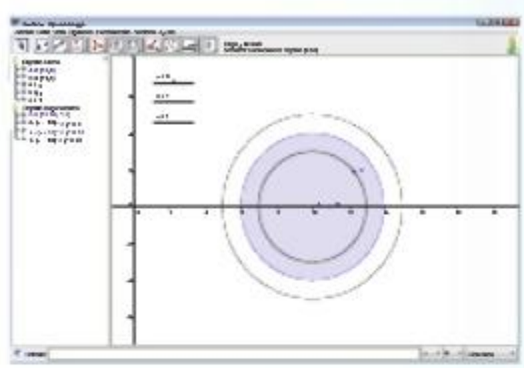
2 Activa la herramienta **Circunferencia dados su Centro y Radio** para trazar una circunferencia con centro A y radio a. Luego, selecciona **Nuevo punto**, para ubicar el punto C en esta circunferencia.



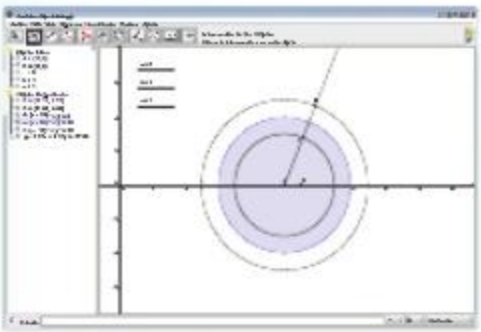
3 Haz clic en los botones que aparecen en la parte izquierda de a, b y c para que aparezcan los deslizadores correspondientes a cada número. Luego, haz clic derecho en el deslizador a y elige **Propiedades**; escribe 0 en **mín** y 6 en **máx** para configurarlo en el intervalo [0, 6]. Realiza el mismo procedimiento para configurar los deslizadores de b y de c en los intervalos $[-3, 3]$ y $[0, 6]$, respectivamente.



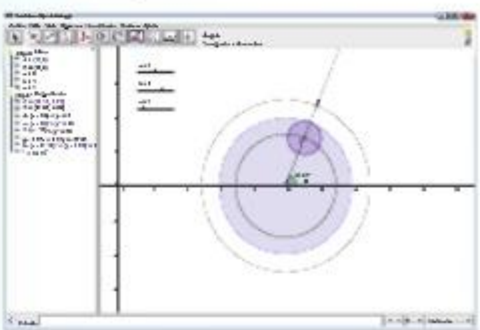
4 Traza dos circunferencias con centro en A, una con radio $a + b$ y la otra con radio $a + b + c$. Puedes dar color azul a la circunferencia de radio $a + b$, haciendo clic derecho sobre ella, eliges **Propiedades** y luego **Color y Estilo**.



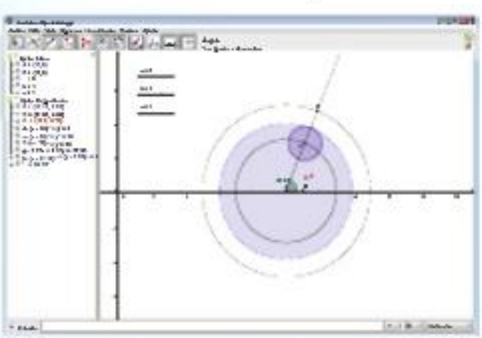
5. Activa la herramienta **Semirrecta** que pasa por **dos puntos** para trazar la semirrecta AC. Luego, selecciona **Intersección de dos objetos** para ubicar el punto de intersección D entre la circunferencia de radio $a + b + c$ y AC.



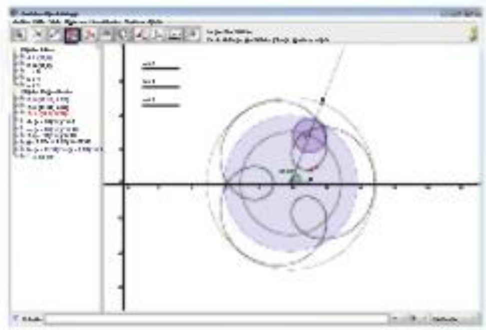
6. Traza una circunferencia con centro en C y radio *abs* (b). Luego, selecciona la herramienta **Ángulo** y haz clic en los puntos B, A, C, para definir el ángulo BAC.



7. Activa la herramienta **Rota objeto en torno a punto**, el **Ángulo indicado** y haz clic en el punto D y en seguida en el punto C. Luego, escribe en ángulo 3α y aparecerá el punto D', el cual indica la rotación del punto D.

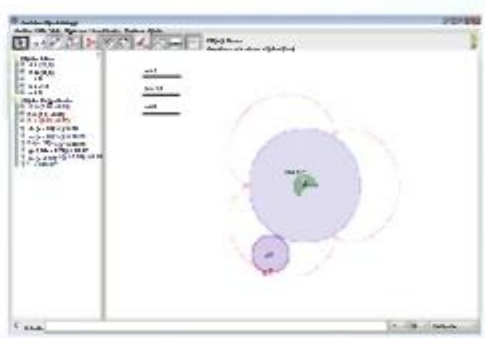


8. Activa la herramienta **Lugar Geométrico**. Luego, haz clic en el punto D' y en seguida en el punto C, para determinar el lugar geométrico que genera el punto D' cuando se mueve el punto C.



9. Haz clic derecho en el lugar geométrico, elige **Propiedades** y colorea de rojo. Luego, desaparece los ejes haciendo clic en **Vista - Ejes** y desaparece otros elementos para observarlo con claridad.

10. Mueve los puntos de los deslizadores de tal forma que $a = 6$, $b = 21{,}5$ y $c = 3$. Luego, observa la epicicloide que se forma.



9 Cuerpos geométricos

Estándares: pensamientos espacial y métrico

→ Tu plan de trabajo...

- Conocer cuáles son los **cuerpos redondos** y determinar algunas medidas como su área y su volumen.
- Identificar los **poliedros** y sus elementos. Calcular algunas medidas como su área y su volumen.
- Conocer otros **cuerpos geométricos** el tronco de cono, el tronco de pirámide y sus elementos.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

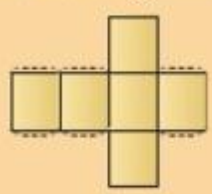
✓ De desempeño ✓ Prueba PISA

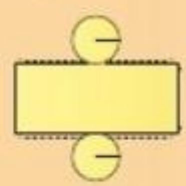
- **2** Multimedia
- **1** Galerías
- **6** Actividades
- **1** Audios
- **6** Imprimibles
- **3** Enlaces web

Lo que sabes...

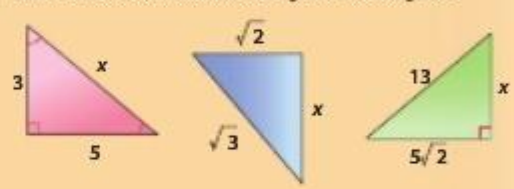
1. Escribe el nombre de los sólidos que conforman el siguiente cuerpo geométrico.

2. Determina cuáles cuerpos geométricos se pueden formar con las siguientes plantillas.





3. Halla el valor x en cada triángulo rectángulo.



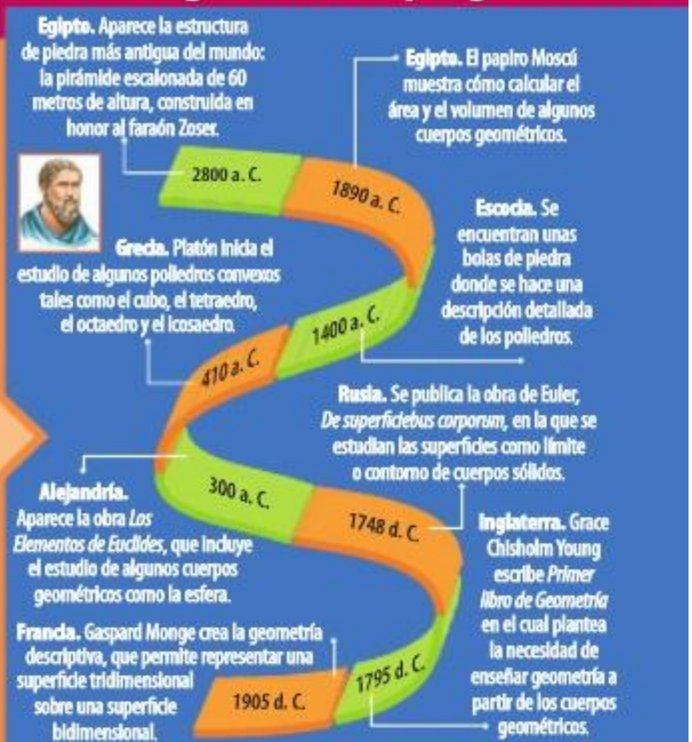
Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer cómo el concepto de la esfera se aplica en la fabricación de una pelota.

La pelota de cuero fue inventada en el siglo IV antes de Cristo por Fu Hi, un gobernante de la antigua China quien formó un sólido parecido a una esfera con raíces duras cubiertas con cuero crudo. En la actualidad, una gran cantidad de deportes se practican con una pelota, la cual puede estar hecha de diferentes materiales y cuya forma, en la mayoría de los casos, se asemeja a la de una esfera.

Lee más acerca de este tema en la página 290.

Cronología de los cuerpos geométricos



1. Cuerpos redondos

Recurso imprimible

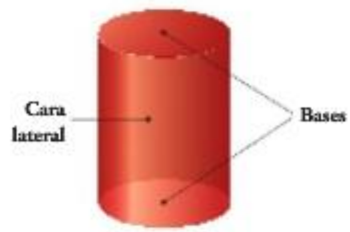
Un **cuerpo redondo** es un sólido limitado por superficies curvas o por superficies curvas y planas. Los principales cuerpos redondos son el cilindro, el cono y la esfera.

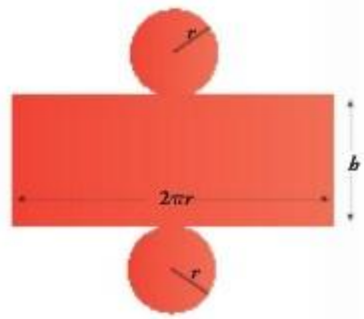
La Torre inclinada de Pisa es una construcción en forma de cilindro que tiene aproximadamente 56 m de alto, 15,5 m de diámetro exterior y 7,4 m de diámetro interior. Fue construida entre 1173 y 1372.

1.1 Cilindro

Un **cilindro** es un sólido limitado por dos caras circulares y por una superficie curva. La superficie curva se denomina cara lateral y las dos caras circulares se denominan bases.

En el desarrollo de un cilindro aparecen las dos bases de radio r y un rectángulo cuyo ancho es la altura del cilindro (h) y el largo es la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$).





En un cilindro se pueden calcular las siguientes medidas:

Área lateral: es el área del rectángulo que aparece en el desarrollo del cilindro. Está dada por la expresión $A_L = (2\pi r) \cdot h$.

Área total: es la suma del área lateral y el área de las dos bases del cilindro. Está dada por la expresión $A_T = A_L + 2A_B = (2\pi r) \cdot h + 2\pi r^2 = (2\pi r)(h + r)$.

Volumen: es el producto del área de una de las bases por la altura del cilindro. Está dado por la expresión $V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.

EJEMPLO

Calcular el área total y el volumen de un cilindro cuyo radio de la base mide 6 cm y cuya altura es 0,12 m.

Primero, se expresan el radio y la altura en la misma unidad de medida. Así, $r = 6$ cm y $h = 12$ cm.

Luego, se remplazan los valores en las expresiones que permiten calcular el área total y el volumen del cilindro.

$$A_T = (2\pi r)(h + r) = (2\pi(6))(12 + 6) = 216\pi$$

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi(6)^2 \cdot 12$$

$$V = 432\pi$$

Finalmente, se aproximan los valores del área total y el volumen. Por tanto, se tiene que $A_T = 678{,}58\ \text{cm}^2$ y $V = 1.357{,}17\ \text{cm}^3$.

Recuerda que...

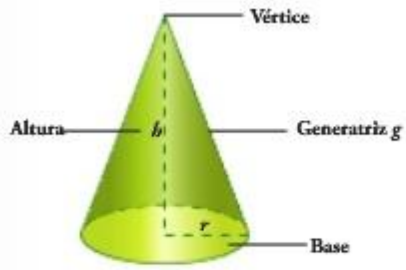
El rectángulo que aparece en el desarrollo de un cilindro corresponde a su cara lateral.

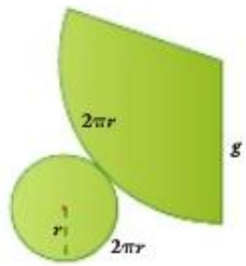
1.2 Cono

Recurso imprimible

Un **cono** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y por una cara plana circular.

Los elementos de un cono se pueden observar en la ilustración.





Los conos tienen muchos usos, por ejemplo, este gorro de piñata.

En un cono se pueden determinar las siguientes medidas:

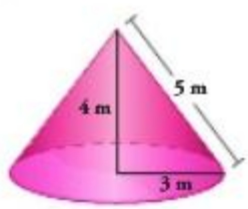
Área lateral: es el área del sector circular que aparece en el desarrollo del cono. Se calcula mediante la expresión $A_L = \pi rg$.

Área total: es la suma del área lateral y del área de la base. Se calcula mediante la expresión $A_T = A_L + A_B = \pi rg + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

Volumen: es un tercio del área de la base por la altura. Se calcula mediante la expresión $V \pi \frac{1}{3} A_B \cdot h \pi \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$.

EJEMPLOS

1. Calcular el área lateral, el área total y el volumen del siguiente cono.



Como $r = 3$ m, $h = 4$ m y $g = 5$ m, se realizan los siguientes pasos:

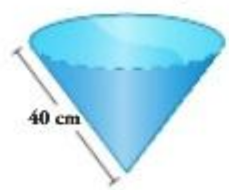
$A_L = \pi(3)(5) = 15\pi$ Se calcula el área lateral.

$A_T = \pi(3)(5 + 3) = 24\pi$ Se calcula el área total.

$V \pi \frac{1}{3} \pi(3)^2 \cdot (4) \pi 12\pi$ Se calcula el volumen.

Luego, se aproximan los resultados. Por tanto, se tiene que el área lateral es 47,12 m², el área total es 75,4 m² y el volumen es 37,7 m³.

2. Hallar el volumen del siguiente cono, teniendo en cuenta que el área lateral es 0,19 m².



Se tiene que la generatriz g es igual a 40 cm que equivalen a 0,4 m y que el área lateral A_L es 0,19 m². Luego, se realizan los siguientes pasos:

$r = \frac{A_L}{\pi g} = \frac{0{,}19}{\pi(0{,}4)} \approx 0{,}15$ Se halla el radio de la base.

$h = \sqrt{(0{,}4)^2 - (0{,}15)^2} \approx 0{,}37$ Se halla la altura.

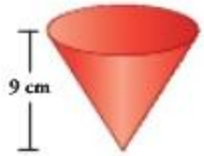
$V \pi \frac{1}{3} \pi(0{,}15)^2 \cdot (0{,}37) \pi 0{,}008717$ Se calcula el volumen.

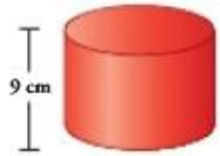
Finalmente, el volumen del cono es aproximadamente 0,008717 m³, que equivalen a 8.717 cm³.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde las preguntas a partir de las siguientes imágenes.





1. Si el radio de la base del cono es igual al radio de las bases del cilindro, ¿qué fracción del volumen del cilindro es igual al volumen del cono?

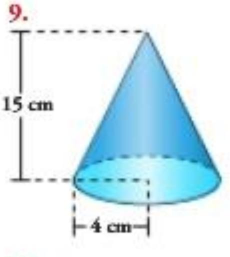
2. Si el radio de la base del cono es el doble del radio de las bases del cilindro, y la generatriz del cono es igual a 41 cm, ¿cuál es el área total del cilindro?

Calcula el área lateral, el área total y el volumen de cada cilindro, a partir del radio r y de la altura h.

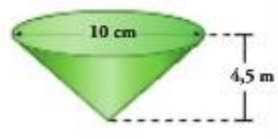
3. $r = 3$ cm; $h = 8$ cm
4. $r = 5$ cm; $h = 10$ cm
5. $r = 0{,}4$ m; $h = 0{,}75$ m
6. $r = 2$ m; $h = 0{,}5$ m
7. $r = 80$ cm; $h = 2{,}2$ m
8. $r = 0{,}2$ m; $h = 70$ cm

Calcula el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes conos.

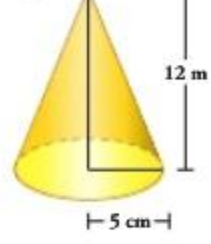
9.



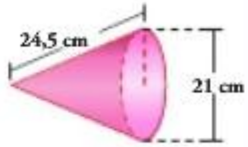
11.



10.



12.



Responde.

13. Si el radio de un cono disminuye el 50%, ¿en qué porcentaje disminuye el área lateral?

14. Si el radio de un cilindro aumenta el 20%, ¿en qué porcentaje aumentará su volumen?

Resuelve los ejercicios 15 y 16 de acuerdo con la siguiente información.

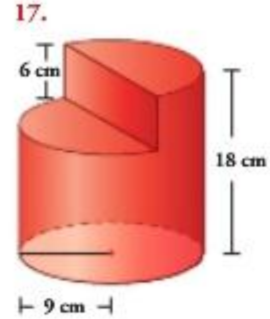
Un cilindro de radio r tiene una altura de 17,5 cm y está inscrito en un cono de 35 cm de altura, cuya generatriz mide 37 cm.

15. Calcula el área total del cilindro.

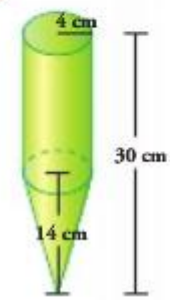
16. Halla la diferencia entre el volumen del cono y el volumen del cilindro.

Determina el área total y el volumen de los siguientes cuerpos.

17.



18.



19. **Lee y resuelve.**

El recipiente metálico que se muestra en la fotografía contiene pintura. Si 1.000 cm³ equivalen a un litro, ¿cuántos litros de pintura contiene el recipiente?

20. **Escribe el primer paso para resolver la siguiente situación.**

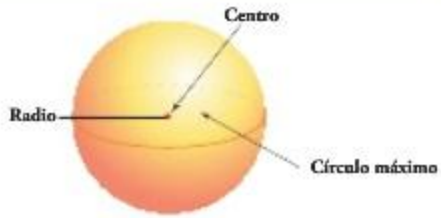
Santiago quiere hacer 10 gorros de piñata de 14 cm de diámetro y 24 cm de altura cada uno. Si utiliza un pliego de cartulina de 70 cm por 100 cm para hacer los 10 gorros, aproximadamente, ¿cuántos centímetros cuadrados del pliego de cartulina le sobran a Santiago?

1.3 Esfera

Recurso imprimible

Una **esfera** es un cuerpo redondo limitado solo por una superficie curva cuyos puntos equidistan de un punto fijo llamado centro.

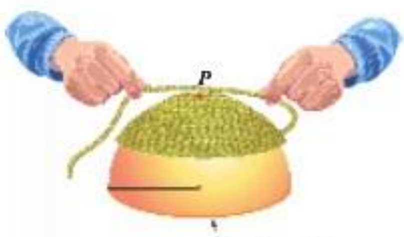
La distancia del centro C a un punto P de la superficie de la esfera se denomina **radio**, y la intersección entre la esfera y el plano que contiene al centro se denomina **círculo máximo.**



El Spaceship Earth de Epcot es una estructura en forma de esfera, que está construida a partir de tetraedros. Pertenece a uno de los parques de Walt Disney en Orlando, Florida. Mide 50 m de diámetro.

Para hallar el área de la superficie de la esfera de una forma práctica no rigurosa, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se enrolla una pita desde el punto P, de tal forma que cubra toda la superficie de la semiesfera.
- **Luego,** se mide la longitud de la pita utilizada.
- **Finalmente,** se enrolla la pita en forma de espiral desde el centro C del círculo máximo y se mide.



Al comparar las medidas se puede observar que la longitud de la pita utilizada para cubrir la superficie del círculo máximo, es el doble de la longitud de la pita que se utilizó para cubrir la superficie de la semiesfera. Por tanto, si πr^2 es el área del círculo máximo, entonces, el área de la superficie de la semiesfera es $A_S = 2\pi r^2$, de donde se deduce que el área total de la superficie de la esfera es $A_T = 4\pi r^2$.

EJEMPLOS

1. Calcular el área de la superficie de una esfera de dos metros de radio.

Se realizan los siguientes pasos:

$A_T = 4\pi(2)^2$ Se remplaza el radio.

$A_T = 4\pi(4)$ Se eleva al cuadrado.

$A_T = 16\pi$ Se efectúan las operaciones.

$A_T = 50{,}27$ Se aproxima el área.

Por tanto, la superficie de una esfera de dos metros de radio es, aproximadamente, 50,27 m^2.

2. Hallar el radio de una esfera, si el área de su superficie es 113 cm^2.

Primero, se remplaza el área de la superficie de la esfera.

$$113 = 4\pi r^2$$

Luego, se despeja el radio.

$$r = \sqrt{\frac{113}{4\pi}}$$

Finalmente, se simplifica, con lo cual se obtiene que la medida del radio es, aproximadamente, 3 cm.

Volumen de una esfera

Actividad

Para deducir la expresión que permite calcular el volumen de una esfera, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se construyen n pirámides triangulares congruentes, de tal forma que sus vértices coincidan con el centro de la esfera.

Segundo, se calcula la suma de los volúmenes de las pirámides.

$$S=\frac{1}{3}A_{B_1}h+\frac{1}{3}A_{B_2}h+\ldots+\frac{1}{3}A_{B_n}h$$ Donde h es la altura de cada pirámide.

Luego, se factoriza.

$$S=\frac{1}{3}h\cdot(A_{B_1}+A_{B_2}+\ldots+A_{B_n})$$

Finalmente, se relaciona la suma de los volúmenes de las pirámides con el volumen de la esfera. Si se aumenta el número de pirámides congruentes, la suma de las áreas de las bases de las pirámides tiende a ser igual al área de la superficie de la esfera. Así mismo, la altura de cada pirámide se aproxima al radio de la esfera. Por tanto, el volumen de la esfera es:

$$V=\frac{1}{3}r\cdot(4\pi r^2)\,\pi\,\frac{4}{3}\pi r^3$$

El volumen V de una esfera de radio r se calcula mediante la expresión:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

EJEMPLO

Calcular el volumen de una esfera de 14 cm de diámetro.

Primero, se halla la medida del radio. Como el diámetro es de 14 cm, el radio equivale a 7 cm.

Luego, se remplaza el radio en la expresión que permite calcular el volumen y se realizan las operaciones.

$$V=\frac{4}{3}\pi(7)^3=\frac{1.372}{3}\pi$$

Finalmente, el volumen de la esfera es, aproximadamente, 1.436,75 cm³.

Historia de las matemáticas

La esfera en la Antigüedad

En el libro XI de *Los elementos*, Euclides (325-265 a. C.) definió la esfera como un sólido de revolución que se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

Tiempo después, Arquímedes (287-212 a. C.) descubrió que el volumen de una esfera es exactamente dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

Recurso imprimible

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

21. ¿Qué es una esfera?

22. ¿Cuáles son las expresiones que permiten calcular el área de la superficie de una esfera y su volumen?

Calcula el área de la superficie de cada esfera a partir de su radio r.

23. $r = 3$ cm

24. $r = 8$ cm

25. $r = 12$ cm

26. $r = 11$ m

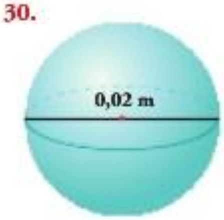
27. $r = 2{,}4$ m

28. $r = 0{,}015$ m

Calcula el volumen de las siguientes esferas.

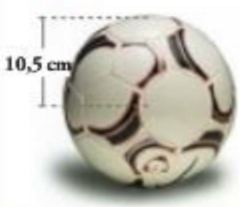
29.

30.

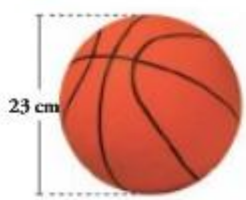


Calcula el área de la superficie de cada balón y su volumen.

31.



32.



Responde.

33. Si el radio de una esfera mide 0,3 m, ¿cuál es el área de la superficie de la esfera en centímetros cuadrados?

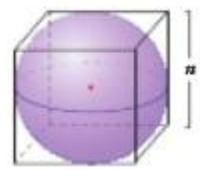
34. Si el área de la superficie de una esfera equivale a 36π cm^2, ¿cuántos metros mide el diámetro de la esfera?

35. Si el volumen de una esfera es 972π cm^3, ¿cuál es el área de la superficie de la esfera en metros cuadrados?

36. Si el área de la superficie de una esfera corresponde a 676π m^2, ¿cuál es el volumen de la esfera en centímetros cúbicos?

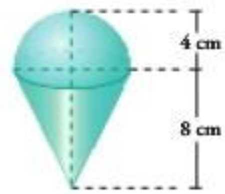
Resuelve.

37. Una esfera se inscribe en un cubo de arista n, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la diferencia entre el volumen del cubo y el volumen de la esfera?



38. Halla la expresión que permite calcular el volumen de una esfera circunscrita en un cubo de arista a.

39. Halla el volumen y el área de la superficie del siguiente cuerpo geométrico.



Responde las preguntas 40 y 41 de acuerdo con la siguiente información.

En un recipiente cilíndrico se colocan cuatro pelotas de tenis como se muestra en la figura. Si cada pelota tiene un diámetro aproximado de 67 milímetros:

40. ¿Cuál es el volumen de una pelota de tenis?

41. ¿Cuál es el volumen del recipiente cilíndrico en centímetros cúbicos?

Lee y resuelve.

La Géode es un cinema con forma de esfera de 36 metros de diámetro, situado en el parque de la Villette en París. Está conformado por una pantalla semiesférica de 26 metros de diámetro.

42. Calcula el volumen aproximado de *La Géode*.

43. Halla el área aproximada de la pantalla de *La Géode*.

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás los poliedros. Consulta qué es la fórmula de Euler y qué relación tiene con los poliedros.

2. Poliedros

Enlace web

Ampliación multimedia

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos no coplanares, denominados caras. Los lados y vértices de las caras son, respectivamente, las aristas y los vértices del poliedro.

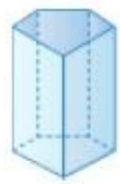
Recuerda que…

Un polígono es **convexo** cuando todos sus ángulos internos miden menos de 180°.

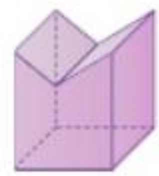
Un polígono es **cóncavo** cuando al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180°.

Un polígono es **regular** si todos sus lados y todos sus ángulos tienen la misma medida.

Los poliedros pueden ser convexos o cóncavos. Un poliedro es convexo cuando todas sus caras son polígonos convexos. En cambio, un poliedro es cóncavo si alguna de sus caras es un polígono cóncavo.



Poliedro convexo



Poliedro cóncavo

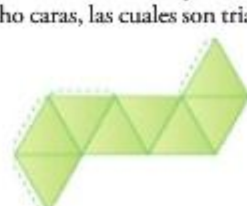
Los poliedros convexos se clasifican a su vez en regulares e irregulares. Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras. Por el contrario, un polígono es irregular si sus caras no son todas congruentes o no concurren el mismo número de caras en cada vértice.

Los cinco poliedros regulares son:

Actividad

Tetraedro **Cubo** **Octaedro** **Dodecaedro** **Icosaedro**

El desarrollo de un poliedro es la figura plana que, al doblarse, permite obtener nuevamente el poliedro original. El desarrollo del poliedro muestra la cantidad de caras que lo conforman y la forma de cada una de ellas. La siguiente figura muestra el desarrollo del octaedro. El octaedro tiene ocho caras, las cuales son triángulos equiláteros congruentes.



Matemática*mente*

Averigua si existen poliedros cóncavos en los que se cumpla la fórmula de Euler.

En un poliedro convexo (sin orificios ni entrantes) se cumple la fórmula de Euler, dada por la expresión:

$$C + V = A + 2$$

Donde C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas.

Por ejemplo, para verificar que un octaedro cumple la fórmula de Euler, se realizan los siguientes pasos:

$C + V = A + 2$ Se plantea la fórmula de Euler.

$8 + 6 = 12 + 2$ Se remplaza la cantidad de caras, de vértices y de aristas.

$14 = 14$ Se efectúa la suma.

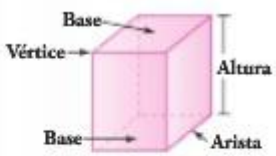
Actividad

2.1 Prisma

Ampliación multimedia | Recurso imprimible | Actividad | Enlace web

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes y paralelos llamados bases y varios paralelogramos llamados caras laterales.

Los prismas se clasifican según el polígono que corresponde a sus bases. Por tanto, hay prismas triangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros. Además, los prismas se pueden clasificar en rectos y oblicuos. Un prisma recto es aquel en el que sus caras laterales son perpendiculares a las bases. En cambio, si las caras laterales no son perpendiculares a las bases, el prisma es oblicuo.



Elementos del prisma

Prisma hexagonal recto

Prisma pentagonal oblicuo

En un prisma se pueden calcular las siguientes medidas:

Área lateral (A_L): es la suma de las áreas de las caras laterales, la cual equivale al producto de la altura del prisma por el perímetro de una de sus bases. Está dada por la expresión:

$$A_L = P_B \cdot h$$

Área total (A_T): es la suma del área de las dos bases y el área lateral del prisma. Está dada por la expresión:

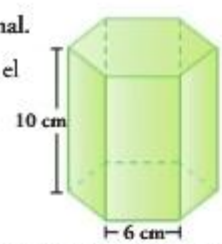
$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Volumen (V): es el producto del área de la base por la altura del prisma. Está dado por la expresión:

$$V = A_B \cdot h$$

EJEMPLOS

Calcular el área total y el volumen del siguiente prisma hexagonal.



Primero, se calcula el área lateral del prisma multiplicando el perímetro de una de las bases por la altura.

$$\begin{aligned} A &= P \times h \\ &= 36 \times 10 \\ &= 360 \end{aligned}$$

Segundo, se calcula el área de la base multiplicando el perímetro por la apotema y dividiendo entre dos.

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(36)(3\sqrt{3})}{2} = 54\sqrt{3}$$

Luego, se halla el área total sumando el área lateral y el área de las bases.

$$A_T + A_L + 2A_B = 360 + 108\sqrt{3} \approx 547 \text{ cm}^2$$

Finalmente, se calcula el volumen del prisma multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_B h = (54\sqrt{3})(10) = 540\sqrt{3} \approx 935{,}3 \text{ cm}^3$$

Matemática*mente*

¿La siguiente figura puede ser el desarrollo de un prisma? Justifica tu respuesta.

Recuerda que...

Una expresión que se aplica para calcular la apotema de un polígono regular es:

$$a = \frac{L}{2} \tan\left(\frac{90°(n-2)}{n}\right)$$

Donde L es la medida de cada lado del polígono y n es el número de lados.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

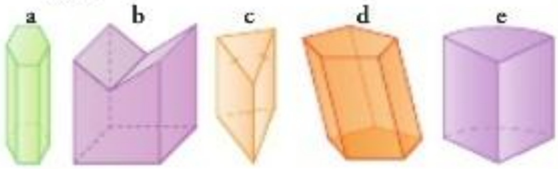
Responde las siguientes preguntas.

44. ¿Cuáles son los elementos de un poliedro?

45. ¿Cómo se clasifican los poliedros?

46. ¿Qué es un prisma?

Observa los siguientes cuerpos geométricos. Luego, escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa.



47. Todos los sólidos son poliedros. ( )

48. Algunos sólidos son poliedros cóncavos. ( )

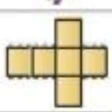
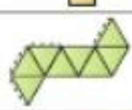
49. El sólido b es un prisma recto. ( )

50. El sólido d es un prisma pentagonal oblicuo. ( )

51. Los sólidos b y e no son poliedros. ( )

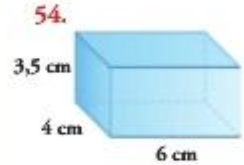
52. Los sólidos a y c son prismas rectos. ( )

53. Completa el siguiente cuadro. Luego, verifica que se cumpla la fórmula de Euler.

Desarrollo del cuerpo geométrico	No. de caras	No. de vértices	No. de aristas
			
			
			
			
			

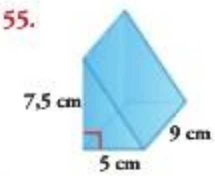
Calcula el área total y el volumen de los siguientes prismas. Ten en cuenta la expresión de la página 279 para calcular la apotema de un polígono regular.

54.



56.

55.



57.

Calcular la medida de la arista de cada uno de los siguientes sólidos.

58. Un tetraedro de área total $16\sqrt{3}$ cm^2.

59. Un octaedro de área total $18\sqrt{3}$ cm^2.

60. Un icosaedro de área total $20\sqrt{3}$ cm^2.

Lee y responde.

61. Dos prismas hexagonales tienen la misma base. Si la razón entre sus alturas es de 2 a 3, ¿cuál es la razón entre sus volúmenes?

62. El volumen de un prisma oblicuo es de 135 cm^3. Si la altura es de 7,5 cm, ¿cuál es el área de la base?

63. Verifica si el poliedro formado por un tetraedro y un octaedro cumple la fórmula de Euler. Luego, calcula el área total del poliedro.

64. Calcula cuánto mide la arista de un cubo si su diagonal mide $\sqrt{27}$ m. Luego, calcula cuánto mide la diagonal de una de sus caras.

65. Calcula el área de una cara y el área total de un octaedro regular cuya arista mide 4 cm.

66. Una caja de bolsas de té tiene forma de prisma rectangular recto de 15 cm de largo, 6,5 cm de ancho y 8 cm de altura.

Calcula el volumen de una de las cajas en las que se empacan las bolsas de té.

2.2 Pirámide

Enlace web Actividad

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una sola base poligonal y por varias caras laterales con forma triangular que tienen un vértice en común.

Las pirámides se clasifican según el polígono de su base en triangulares, cuadradas, pentagonales, entre otras. Además, una pirámide puede ser recta u oblicua. Una pirámide es recta si todas sus caras laterales son triángulos isósceles y es oblicua si alguna de sus caras laterales no es un triángulo isósceles.

En una pirámide se puede calcular el área lateral, el área de la base, el área total y el volumen.

El área lateral (A_L): es la suma de las áreas de las caras laterales. Por tanto, en una pirámide recta, si la base es un polígono regular de n lados y A es el área de una de las caras laterales, se tiene que:

$$A_L = nA$$

El área total (A_T): es la suma del área de la base y el área lateral. Por tanto, si A_B es el área de la base se tiene que:

$$A_T = A_L + A_B$$

El volumen (V): es la tercera parte del producto del área de la base por la altura de la pirámide. Por tanto, si h es la altura se tiene que:

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$$

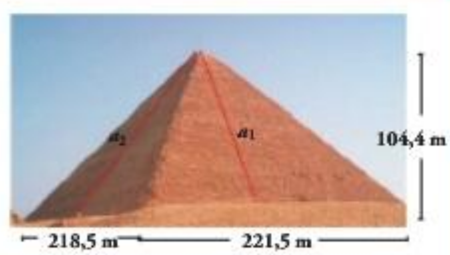
Elementos de una pirámide

Matemática*mente*

¿Cuál es el volumen de la pirámide Roja de Egipto?

EJEMPLO

Observar las dimensiones de la pirámide Roja de Egipto. Luego, calcular su área total.



Primero, se calcula la apotema (a_1) de una de las caras laterales, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a_1^2 + (104,4)^2 + \left(\frac{218,5}{2}\right)^2 \qquad a_1 = \sqrt{22.834,92} \approx 151,11$$

Segundo, se calcula la apotema (a_2) de otra de las caras laterales.

$$a_2^2 + (104,4)^2 + \left(\frac{221,5}{2}\right)^2$$

$$a_2 = \sqrt{23.164,92} \approx 152,2$$

Luego, se calculan las áreas de las caras laterales (A_1 y A_2).

$$A_1 = \frac{a_1 \cdot (221,5)}{2} \qquad A_2 = \frac{a_2 \cdot (218,5)}{2}$$

$$A_1 = \frac{(151,11) \cdot (221,5)}{2} \qquad A_2 = \frac{(152,2) \cdot (218,5)}{2}$$

$$A_1 \approx 16.735,43 \qquad A_2 \approx 16.627,85$$

Finalmente, se calcula el área lateral (A_L), sumando las áreas de las caras laterales.

$$A_L = 2A_1 + 2A_2$$

$$= 2(16.735,43) + 2(16.627,85) = 66.726,56$$

Por tanto, el área lateral de la pirámide Roja se aproxima a 66.726,56 m^2.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

67. ¿Cuál es el nombre de la pirámide que tiene una base poligonal y siete caras laterales?

68. ¿Cómo se calcula el área lateral de una pirámide, a partir de su altura y de las dimensiones de su base?

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdades y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

69. Todas las caras laterales de cualquier pirámide son triángulos rectángulos.

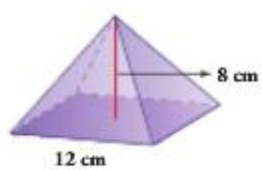
70. El área lateral de cualquier pirámide se calcula mediante la expresión $A_L = nA$, donde n es el número de lados de la base y A el área de una de las caras laterales.

71. El volumen de una pirámide se puede calcular mediante la expresión $V = \frac{1}{3}(A_T - A_L)\,h$, donde A_T es el área total, A_L el área lateral y h la altura.

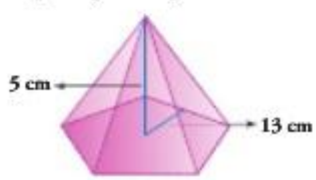
72. Todas las pirámides triangulares son tetraedros.

Calcula el área lateral y el volumen de las siguientes pirámides.

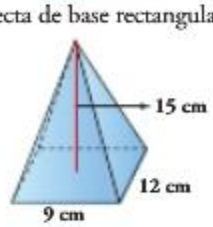
73. Pirámide de base cuadrada.



74. Pirámide pentagonal regular recta.

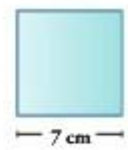


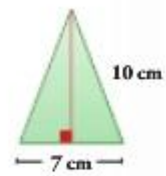
75. Pirámide recta de base rectangular.



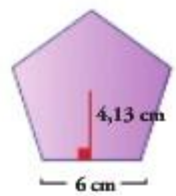
Halla el área total y el volumen de cada pirámide a partir de su base y de una de sus caras laterales.

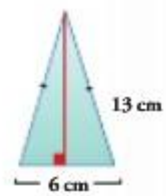
76. Base — Cara lateral





77. Base — Cara lateral



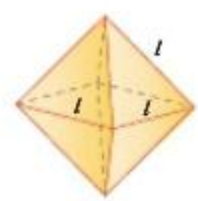


Realiza lo que se indica.

78. Escribe una fórmula para calcular el volumen de una pirámide cuadrada cuyas caras laterales son triángulos equiláteros de lado x.

79. Determina la razón entre los volúmenes de dos pirámides de base cuadrada cuya altura es la misma.

80. Halla la expresión para calcular el área lateral del siguiente octaedro.



La pirámide Cestia es una pirámide cuadrada de estilo egipcio que se encuentra en Roma. El lado de su base mide cerca de 30 metros y su altura aproximada es de 36,4 metros. Aunque su estructura interna está elaborada en ladrillo, la parte externa está recubierta de mármol.

81. Calcula el volumen de la pirámide Cestia.

82. Determina cuántos metros cuadrados de la pirámide Cestia están recubiertos de mármol.

3. Otros cuerpos geométricos

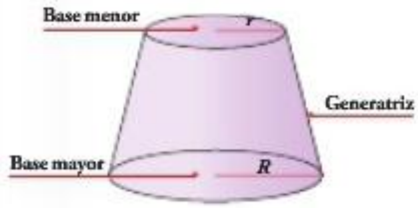
Actividad

A partir del cono y de la pirámide se pueden definir otros cuerpos geométricos.

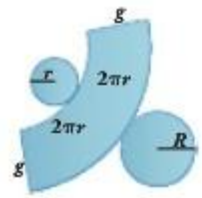
3.1 Tronco de cono

Un **tronco de cono** es la parte de un cono comprendido entre la base y la sección transversal determinada por un plano paralelo a la base.

Los elementos de un tronco de cono son la base mayor de radio R, la base menor de radio r, la generatriz (g) y la altura (h).



Elementos de un tronco de cono



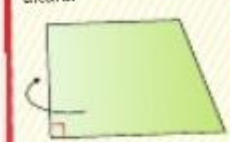
Desarrollo de un tronco de cono

Las expresiones que se utilizan para calcular el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de cono son los siguientes:

Área lateral	Área total	Volumen
$A_L = \pi \cdot g(R + r)$	$A_T = \pi \cdot [g(R + r) + R^2 + r^2]$	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

Recuerda que...

Un tronco de cono se forma al girar un trapecio rectángulo en torno a su altura.



EJEMPLO

Una empresa fabrica lámparas para mesas de noche, de tal forma que el bombillo está rodeado por una tela dispuesta en forma de tronco de cono. Si las medidas de cada lámpara son las que se muestran en la siguiente figura, ¿cuántos metros cuadrados de tela se emplean en la fabricación de 5 lámparas?

Primero, se halla la medida de la generatriz (g), aplicando el teorema de Pitágoras.

$$g^2 = x^2 + (20)^2$$
$$g^2 = (30 - 15)^2 + (20)^2$$
$$g^2 = 225 + 400$$
$$g^2 = 625$$
$$g = 25$$

Luego, se calcula el área lateral del tronco de cono que forma la tela.

$$A_L = \pi \cdot (25)(30 + 15)$$
$$A_L = \pi(25)(45)$$
$$A_L = 1.125\pi$$
$$A_L \approx 3.534,3$$

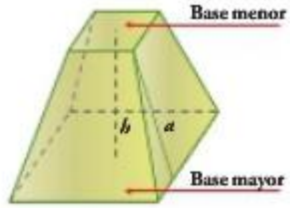
Finalmente, se multiplica el área lateral por 5 para hallar la cantidad C en centímetros cuadrados, de tela necesaria en la fabricación de las cinco lámparas.

Por tanto, $C \approx 17.671,45$ cm^2, es decir, que se emplean aproximadamente 1,77 m^2 de tela en la fabricación de las 5 lámparas.

3.2 Tronco de pirámide

Un **tronco de pirámide** es una parte de la pirámide comprendida entre la base y la sección transversal determinada por un plano que interseca las aristas laterales.

El tronco de pirámide tiene una base mayor y otra menor. Sus caras laterales son trapecios cuya altura corresponde al apotema (a) del tronco de la pirámide. Además, la altura (h) del tronco de pirámide es la distancia entre las dos bases.



Elementos de una pirámide truncada

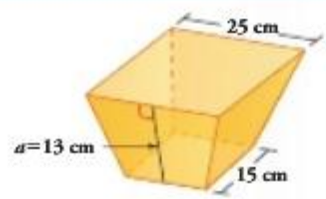
Desarrollo de una pirámide truncada

Si P y A son el perímetro y el área de la base mayor, y P' y A' son el perímetro y el área de la base menor, para calcular el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de pirámide se utilizan las siguientes expresiones:

Área lateral	Área total	Volumen
$A_L = \frac{P + P'}{2} \cdot a$	$A_T = \frac{P + P'}{2} \cdot a + A + A'$	$V = \frac{h}{3}\left(A + A' + \sqrt{A \cdot A'}\right)$

EJEMPLO

Calcular la cantidad aproximada de tierra, en centímetros cúbicos, que cabe en una matera con forma de pirámide truncada de bases cuadradas, como se muestra en la siguiente figura.



Primero, se calcula el área de la base mayor y el área de la base menor.

$A = 25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$ $\qquad A' = 15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$

Luego, se halla la altura del tronco de pirámide, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{(a^2) - \left(\frac{25 - 15}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{169 - 25} = 12$$

Finalmente, se aplica la fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide.

$$V = \frac{h}{3}\left(A + A' + \sqrt{A \cdot A'}\right)$$

$$V + \frac{12}{3}\left(620 + 225 + \sqrt{(625)(225)}\right)$$

$$V = 4.880$$

Por tanto, a la matera le caben aproximadamente 4.880 cm^3 de tierra.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

83. ¿Cuántas aristas, vértices y caras laterales tiene un tronco de pirámide cuyas bases son cuadradas?

84. ¿Cuáles figuras geométricas conforman el desarrollo de un tronco de cono ?

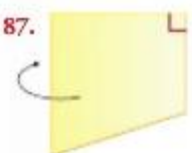
85. Explica, con un ejemplo, cómo se deduce que la expresión $A_L = \dfrac{P + P'}{2} \cdot a$ sirve para calcular el área lateral de un tronco de pirámide.

Determina con cuáles de las siguientes figuras se forma un tronco de cono al efectuar el giro indicado. Justifica tu respuesta.

86.

88.

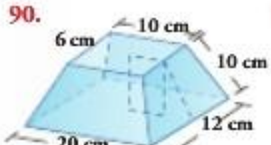
87.



89.

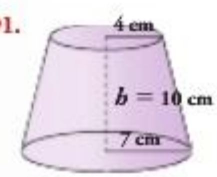
Calcula el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

90.

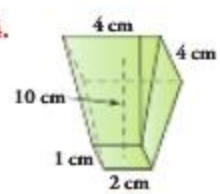


93.

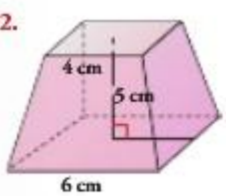
91.



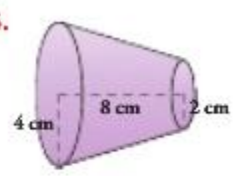
94.



92.



95.



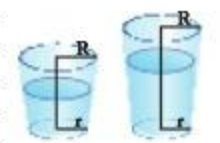
Resuelve.

96. Halla el área lateral de un tronco de pirámide cuya altura es 4 cm y cuyas bases cuadradas tienen 16 cm² y 100 cm² de área.

97. Calcula el área total de un tronco de pirámide con bases cuadradas si la arista de la base menor mide 5 cm, la de la base mayor mide 8 cm y su apotema mide 4 cm.

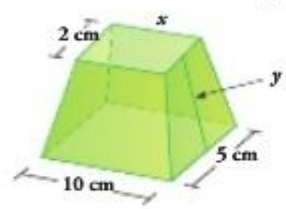
Resuelve.

98. En un restaurante se utilizan dos tipos de vasos con forma de tronco de cono de tal forma que los radios correspondientes de las bases son iguales.



Escribe la razón entre los volúmenes de los vasos si la razón entre las alturas es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

99. Escribe dos posibles valores para x y y. Luego, calcula el volumen del tronco de pirámide.

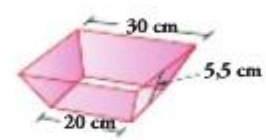


En el Parque de las Naciones en Lisboa hay una fuente volcán de agua con forma de tronco de cono. Si los radios de las bases miden 0,6 m y 1,8 m, y la altura aproximada es de 4 m, calcula:

100. El área lateral de la fuente volcán de agua.

101. El volumen de la fuente volcán de agua.

Una empresa fabrica recipientes en aluminio con forma de tronco de pirámide con bases cuadradas, como se muestra en la figura.



102. Calcula el volumen de cada recipiente.

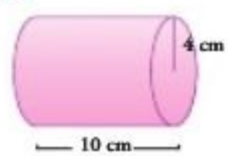
103. Si la empresa quiere fabricar 100 recipientes, ¿cuántos centímetros cuadrados de aluminio se necesitan?

EJERCICIOS PARA REPASAR

Cuerpos redondos

Escribe el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

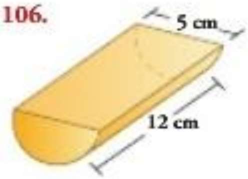
104.



$A_T =$ ____________

$V =$ ____________

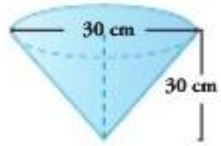
106.



$A_T =$ ____________

$V =$ ____________

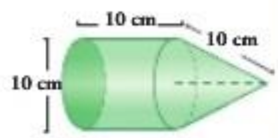
105.



$A_T =$ ____________

$V =$ ____________

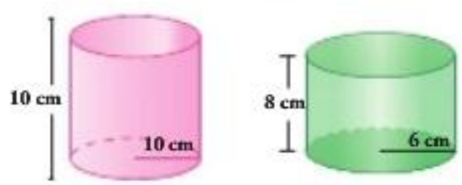
107.



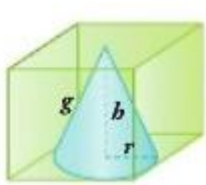
$A_T =$ ____________

$V =$ ____________

108. Halla la diferencia entre las áreas totales de los siguientes cilindros. Luego, determina la razón entre sus volúmenes.



109. Calcula el área lateral y el volumen del siguiente cono inscrito en un paralelepípedo de 16 cm de lado, si su altura es 8 cm.



Completa.

110. Si el volumen de un cilindro oblicuo es 144π cm³ y el diámetro de su base mide 12 cm, entonces, la altura del cilindro es ____________.

111. Si el volumen de una esfera es 2.304π cm³, entonces, su diámetro mide ____________.

112. Si el volumen de un cono es 15π cm³ y su altura es 5 cm, entonces, el área total es ____________.

113. Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 8 cm de altura que está inscrito en un cono cuya generatriz mide 15 cm y cuya altura mide 12 cm, como se muestra en la siguiente figura.

Responde las preguntas 114 y 115 de acuerdo con el siguiente enunciado.

En un cilindro se triplican simultáneamente el radio de su base y su altura.

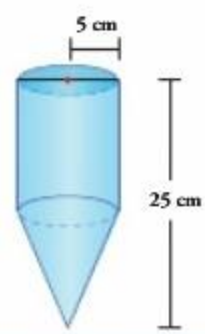
114. ¿En qué porcentaje aumenta su área total?

____

115. ¿En qué porcentaje aumenta su volumen?

____

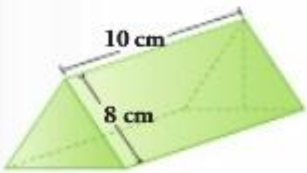
116. Determina el volumen de la siguiente figura, teniendo en cuenta que la razón entre la altura de la figura completa y la altura de la sección cónica es 2:1.



Poliedros

Calcula el área total y el volumen de los siguientes prismas.

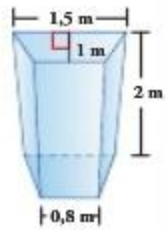
117.



$A_T =$ ________

$V =$ ________

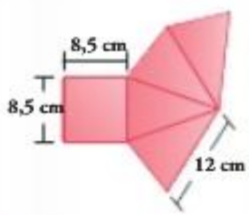
118.



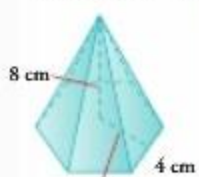
$A_T =$ ________

$V =$ ________

119. Calcula el área total y el volumen de la pirámide a partir de su desarrollo.



120. Calcula el área total y el volumen de la siguiente pirámide hexagonal.

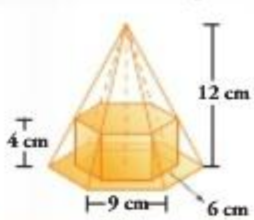


$ap = 2\sqrt{3}$ cm

121. Calcula la diferencia entre el volumen de la pirámide y el volumen del prisma si sus bases son polígonos regulares.

Área base del prisma: 144 cm^2.

Área base de la pirámide: 216 cm^2.



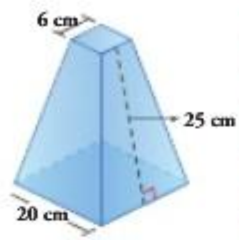
Sobre cada cara de un cubo de 5 cm de arista se pega una pirámide de base cuadrada cuya altura es igual a la arista del cubo y cuya base coincide exactamente con la cara del cubo.

122. ¿Cuál es el área total del poliedro que se forma?

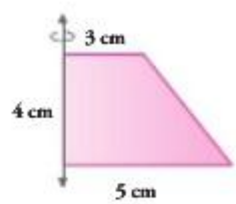
____

Otros cuerpos geométricos

123. Halla el volumen del tronco de pirámide si sus bases son cuadrados.

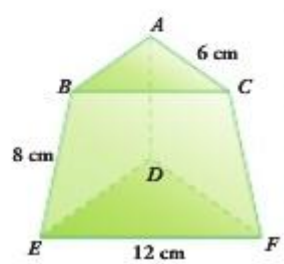


124. Calcula el área lateral y el volumen del tronco de cono que se origina al hacer girar el siguiente trapecio rectángulo.



Un tronco de pirámide está hecho de vidrio y tiene las dimensiones que se muestran en la siguiente figura.

125. Calcula la masa del tronco de pirámide si 1 cm^3 de vidrio tiene una masa de 2,5 gramos.



PROBLEMAS PARA REPASAR

El radar Don-2N es un radar multifuncional ubicado en Pushkino (región de Moscú), el cual tiene forma de pirámide truncada. Sus bases tienen aproximadamente 130 m y 96 m de lado y su altura es de 47 m. En cada cara lateral tiene una antena circular de 16 m de diámetro.

Si se quiere cubrir las caras laterales del radar Don-2N con un material especial, sin cubrir las antenas, ¿cuántos metros cuadrados de este material se requieren?

Paso 1 Comprender el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

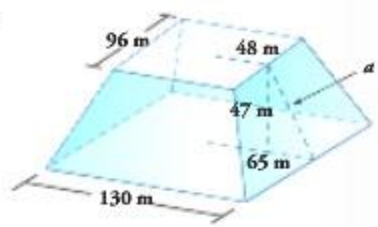
¿Cuántos metros cuadrados de material se requieren para cubrir las caras laterales con excepción de las antenas?

¿Cuáles son los datos del problemas?

El radar Don-2N tiene forma de tronco de pirámide con bases cuadradas cuyas medidas son 130 m y 96 m de lado y 47 m de altura.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se realiza un dibujo con los datos que sirvan como guía para resolver el problema.



Segundo, se halla la apotema (a) del tronco de pirámide.

$$a^2 = (65 - 48)^2 + (47)^2$$
$$a^2 = 2.498$$
$$a \approx 49{,}97$$

Tercero, se aplica la expresión para calcular el área del tronco de pirámide.

$$A_L = \frac{P + P'}{2} \cdot a, \text{ donde } P \text{ y } P' \text{ son los perímetros de las bases.}$$
$$A_L + \left(\frac{520 + 384}{2}\right)(49{,}97) = 22.586{,}44$$

Luego, se calcula el área (A) de una de las antenas circulares.

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi(8)^2$$
$$A \approx 201{,}06 \text{ m}^2$$

Finalmente, se le resta al área lateral el área de las cuatro antenas circulares.

$$C = A_L - 4A \text{ donde } C \text{ es la cantidad de material.}$$
$$C = 22.586{,}44 - 804{,}24 = 21.782{,}2$$

Paso 3 Verifica y redacta tu respuesta.

Se verifican las operaciones. Luego, se tiene que la cantidad de material necesario para cubrir las caras laterales del radar Don-2N, con excepción de las antenas, es aproximadamente de 21.782,2 m².

126. Completa. El volumen del radar Don-2N es aproximadamente ______________.

Responde las preguntas 127 y 128 de acuerdo con la siguiente información.

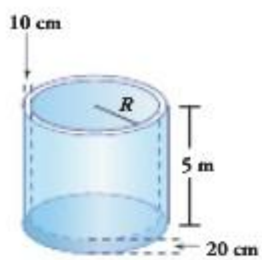
La cúpula del Planetario Distrital de Bogotá tiene 23 metros de diámetro.

127. ¿Cuál es el volumen de la cúpula?

128. Supón que se quiere pintar la cúpula del planetario, ¿cuántos litros de pintura se necesitan? (Ten en cuenta que para pintar 1 cm^2 se necesita 1 mL.)

Responde las preguntas 129 y 130 de acuerdo con el siguiente enunciado.

Una fábrica tiene un tanque de agua que puede almacenar 600.000 litros de agua, cuyas medidas se muestran en la figura.

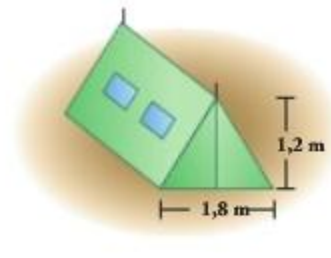


129. ¿Cuál es la medida del radio R del tanque?

____

130. Si 5 galones de pintura cuestan \$80.000 y alcanzan para pintar 10 m^2, ¿cuánto cuesta pintar el tanque por fuera?

131. Una empresa desea fabricar carpas con las dimensiones que se muestra en la figura. Si se cuenta con 16,56 m^2 de lona para elaborar toda la carpa, tapas, base y techo, ¿cuál debe ser la profundidad de cada carpa para aprovechar al máximo la lona?



____

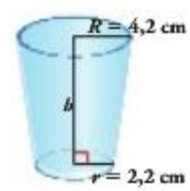
Lee y completa.

La pirámide de Keops tiene una altura de 146 m y una base cuadrada de 230 m de lado.

132. Su volumen es ______________.

133. Su área lateral es ______________.

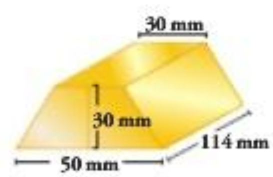
134. Un vaso tiene forma de tronco de cono como se muestra en la figura. Si su capacidad es de 0,47 litros, ¿cuál es su altura?



____

Responde las preguntas 135 y 136 de acuerdo con la siguiente información.

Ciertos lingotes tienen forma de pirámide truncada cuyas medidas aproximadas pueden ser las que se muestran en la figura.



135. ¿Cuál es el volumen del lingote?

136. Supón que se funde una pieza de 30 kg para hacer lingotes de plata como el de la figura, ¿cuántos lingotes de plata se pueden obtener? (Ten en cuenta que la densidad de la plata es 10,5 g/cm^3.)

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para conocer cómo el concepto de la esfera se aplica en la fabricación de una pelota.

La pelota de cuero fue inventada en el siglo IV antes de Cristo por Fu Hi, un gobernante de la antigua China quien formó un sólido parecido a una esfera con raíces duras cubiertas con cuero crudo. En la actualidad, una gran cantidad de deportes se practican con una pelota, la cual puede estar hecha de diferentes materiales y cuya forma, en la mayoría de los casos, se asemeja a la de una esfera.

El tamaño, el material, la textura y la masa de una pelota pueden variar dependiendo de la intención o finalidad de cada deporte. Por ejemplo, las bolas de billar se fabrican con un compuesto químico conocido como resina fenólica, el cual permite que la bola se deslice fácilmente por el paño de la mesa de billar. El diámetro y la masa de una bola de billar se supervisan mediante un software. El diámetro se ajusta según el tipo de billar, que puede ser billar francés o americano. La diferencia entre la masa de dos bolas de billar no debe ser mayor a 2 gramos para que los golpes que generen sean similares.

En la siguiente tabla se muestran las medidas reglamentarias del diámetro de algunas pelotas en diferentes deportes.

Pelota	Bola de billar francés 	Pelota de béisbol 	Balón de baloncesto 	Balón de fútbol 	Pelota de tenis 
Diámetro máximo	6,15 cm	6,9 cm	24 cm	22 cm	6,67 cm

1. **Halla la diferencia entre el volumen de un balón de fútbol y el volumen de una pelota de béisbol.**
2. **Calcula la diferencia entre el área de la superficie de un balón de baloncesto y el área de la superficie de una pelota de tenis.**
3. **Supón que un balón de fútbol se asemeja exactamente a una esfera. ¿Cuántos metros cuadrados de cuero se necesitarían para fabricar 8 balones de fútbol?**
4. **Si la densidad de la resina fenólica es 1,07 g/cm^3, ¿cuál es la masa aproximada que una bola de billar obtiene de esta resina? (Ten en cuenta que la densidad es igual a la razón entre la masa y el volumen.)**
5. **Observa la fotografía. Luego, determina la diferencia entre el volumen de la caja y la suma de los volúmenes de las bolas de billar, sin considerar el grosor de la madera de la caja. (Ten en cuenta que el diámetro máximo de una bola de billar pool es 5,71 cm.)**

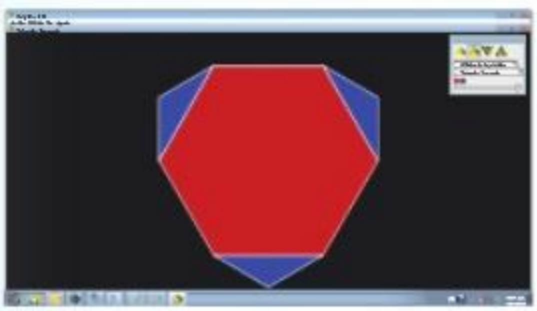
Trabaja con Poly Pro 1.11

Objetivo: identificar el desarrollo y los elementos de diferentes cuerpos geométricos.

Descripción: conocer otro tipo de cuerpos geométricos como los sólidos de Arquímedes y los antiprismas, a partir de su desarrollo y de su número de caras, aristas y vértices.

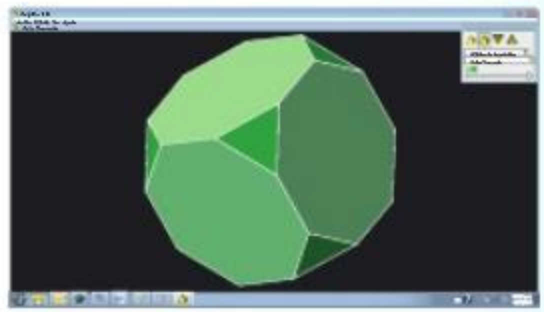
Para acceder a Poly Pro 1.11, ingresa y descarga el programa en poly-pro.softonic.com

1. Haz clic en el icono de Poly Pro 1.11, en el menú **Inicio** una vez lo hayas descargado.
2. Cambia la opción de **Sólidos Platónicos** a **Sólidos de Arquímedes**, para observar un tetraedro truncado. Maximiza la ventana en la que aparece el tetraedro truncado para que lo puedas observar mejor.



3. Cuenta el número de caras del tetraedro truncado, haciendo clic sobre él y moviéndolo en cualquier sentido.
4. Determina el desarrollo del tetraedro truncado secuencialmente, deslizando la barra que aparece en la parte inferior del nombre **Tetraedro Truncado**. También puedes obtener su desarrollo, haciendo clic en el desarrollo del tetraedro de color amarillo.

5. Cuenta las aristas y los vértices del tetraedro truncado a partir de su desarrollo.
6. En **Sólidos de Arquímedes**, selecciona la opción cubo truncado. Puedes cambiarle el color de las caras haciendo clic sobre los cuadros rojo y azul que aparecen debajo del nombre **Cubo Truncado**.



7. A partir del desarrollo del cubo truncado determina su número de caras, vértices y aristas. Luego, calcula su área total si su arista mide 8 cm y el apotema de las caras, que son octágonos regulares, mide 9,65 cm.

8. Consulta qué es un antiprisma. Luego, determina el número de caras, aristas y vértices de un antiprisma cuadrangular y de un antiprisma pentagonal utilizando Poly Pro 1.11.

10 Estadística y probabilidad

Estándar: pensamiento aleatorio

→ Tu plan de trabajo...

- Determinar los elementos necesarios para **caracterizar una variable cualitativa**.
- Caracterizar **dos variables cualitativas**.
- Caracterizar una **variable cuantitativa**.
- Conocer las **técnicas de conteo** y aplicarlas en el cálculo de la **probabilidad**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

5 Multimedia **1** Audios

1 Galerías **4** Imprimibles

6 Actividades **3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Resuelve con base en la siguiente información. Las edades de los invitados que asistieron a una fiesta de cumpleaños son:

10	11	12	11	12	11	12	10	12	13
13	12	11	10	10	11	11	12	13	10
12	11	12	12	11	12	12	11	10	12

   a. Elabora una tabla de frecuencias.

   b. ¿Cuántos invitados tienen más de 11 años?

   c. ¿Qué porcentaje de los invitados tienen edades menores que 12 años?

   d. ¿Cuál es la edad promedio de los invitados que asistieron a la fiesta?

2. En los cuartos de final de un campeonato de fútbol quedaron ocho equipos que se disputan las medallas de oro, plata y bronce. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir estas medallas?

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para diseñar juegos para los parques de diversiones.

¿Cómo se determina si un juego diseñado para un parque de diversiones se puede poner en funcionamiento?

El ingeniero mecánico de un parque de diversiones ha diseñado un nuevo juego que debe ser probado antes de ponerlo en funcionamiento.

Para tal prueba se estudiaron datos específicos de diez individuos que constituyeron una muestra (hombres y mujeres entre 18 y 35 años) de la población que frecuenta el parque.

Lee más acerca de este tema en la página 330.

Cronología de estadística y probabilidad

3000 a. C.
Babilonia. Se utilizan tabillas de barro para registrar datos sobre la producción agrícola.

594 a. C.
Grecia. Los griegos realizan censos para después cobrar impuestos.

200 d. C.
Roma. Se usan los dados para juegos de azar en el Imperio romano, pero su existencia data de los antiguos egipcios.

1520 d. C.
Italia. Cardano, en su libro *El libro de los juegos del azar,* comienza a construir una teoría matemática sobre los juegos de azar.

1650 d. C.
Francia. Pierre Fermat resuelve problemas relacionados con los juegos de azar, como la probabilidad de ganar una partida de cartas.

1812 d. C.
Francia. Pierre Laplace escribe un libro donde establece el análisis matemático de los juegos de azar e indica que este puede ser una herramienta para resolver problemas médicos.

1850 d. C.
Europa. Después de haberse establecido el método científico, los investigadores ven la necesidad de sintetizar la información cuantitativa en tablas y gráficas.

1900 d. C.
Inglaterra. Karl Pearson hace el desarrollo del chi cuadrado y lo aplica al estudio estadístico de la biología.

Enlace web

1. Análisis de una variable cualitativa

El objetivo central de la estadística es el análisis de datos a partir de la recopilación y organización de ellos. Esto permite tomar decisiones frente a diversos temas que requiere una empresa, compañía o entidad.

Cuando en una población se hace un estudio de gustos o preferencias se dice que se está analizando una variable cualitativa en dicha población.

Para analizar una variable cualitativa se hace una caracterización de ella. **Caracterizar una variable** tiene como objetivo presentar tablas de frecuencias que brinden información resumida; además, presentar diagramas en los cuales se pueda interpretar dicha información y determinar de manera general el o los datos de mayor frecuencia.

Así, el tipo de bebida hidratante que prefieren los deportistas que participan en las carreras 10K, la marca de harina que prefiere un fabricante de pastas, el género literario que prefiere un grupo de personas son, entre otras, variables cualitativas.

Una variable se caracteriza a partir de una determinada base de datos. Una base de datos es un conjunto de datos específico, que ha sido recolectado en una población y que se organiza para su posterior análisis.

Hay diferentes formas y modelos para conformar bases de datos, por ejemplo:

- Es posible adquirir una gran cantidad de datos comerciales y económicos gracias a organizaciones especializadas en reunirlos y actualizarlos. Así, las empresas tienen acceso a esas fuentes mediante acuerdos de compra de dicha información.
- En los últimos años, la Internet se ha convertido en una fuente importante de datos. Casi todas las personas poseen un sitio de Internet al cual tiene acceso el público; la gran mayoría de las personas poseen una cuenta de correo electrónico o pertenecen a una determinada comunidad virtual.

Matemática*mente*

¿Qué significa la palabra *variable* en el contexto de la estadística?

EJEMPLO

En una importante empresa exportadora de maquinaria se aplicó un estudio para determinar qué tipo de bebida consumían sus empleados en las horas laborales. El objetivo de dicho estudio era determinar de qué bebidas debería surtirse el dispensador automático de tal forma que el aprovechamiento del espacio fuera máximo. A continuación se presentan los resultados obtenidos al tomar una muestra de 50 empleados:

Jugo	Jugo	Malta	Limonada	Jugo
Agua	Malta	Jugo	Malta	Malta
Malta	Jugo	Jugo	Jugo	Agua
Agua	Limonada	Jugo	Malta	Jugo
Uva	Jugo	Malta	Limonada	Limonada
Uva	Jugo	Limonada	Jugo	Malta
Jugo	Malta	Jugo	Limonada	Agua
Uva	Agua	Malta	Uva	Jugo
Jugo	Malta	Jugo	Malta	Uva
Limonada	Jugo	Malta	Jugo	Limonada

Caracterizar la variable tipo de bebida.

Recuerda que...

Una muestra es un subconjunto representativo de la población a partir de la cual se pretende realizar inferencias respecto a la población de donde procede. Los elementos seleccionados con cierta técnica reúnen características que la hacen ser representativa, significativa y confiable.

Para caracterizar la variable se utilizan una tabla de distribución de frecuencias, un diagrama de barras y un diagrama circular:

Tabla de distribución de frecuencias para la variable tipo de bebida

Tipo de bebida	*f*	*fr*	*F*	%
Jugo	19	19/50	19	38
Agua	5	5/50	24	10
Limonada	8	8/50	32	16
Malta	13	13/50	45	26
Uva	5	5/50	50	10
Total	50	1	100	100

Diagrama de barras para la variable tipo de bebida

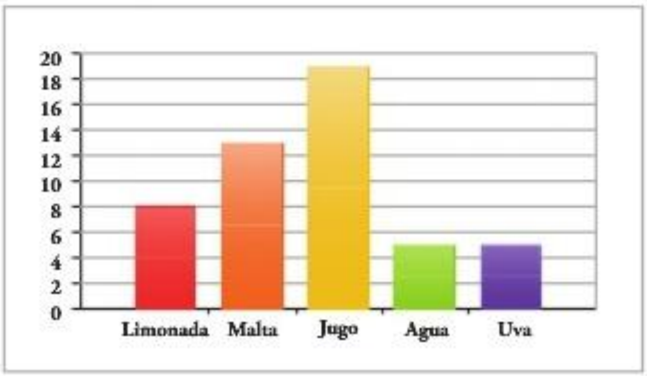
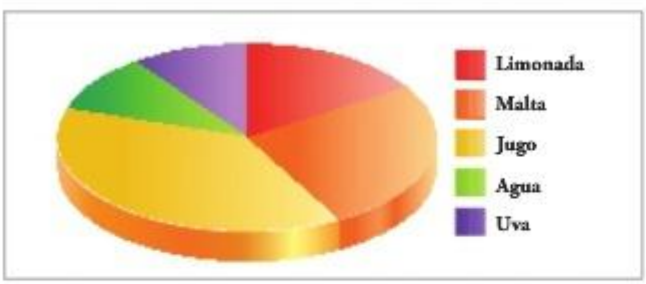


Diagrama circular para la variable tipo de bebida



Con base en la información planteada en la tabla y en las gráficas, se puede formular, entre otras conclusiones, que:

- El jugo es la bebida de mayor preferencia.
- Agua y uva son las bebidas menos preferidas en la población.
- La segunda bebida, en relación con las preferencias, es malta.

Así que, al tomar una decisión en relación con el surtido de la máquina, definitivamente la mayoría de las bebidas deben ser jugo.

Recuerda que…

f: frecuencia absoluta.
fr: frecuencia relativa
F: Frecuencia acumulada
%: porcentaje.

Matemática*mente*

¿Qué relación matemática se utiliza para determinar los sectores del diagrama circular?

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Razono • Ejercito

Determina cuatro opciones de respuesta para cada una de las siguientes variables cualitativas.

1. Calidad en el servicio de una entidad bancaria.
2. Tipos de salsas para acompañar las carnes rojas.
3. Deportes extremos que se practican en Colombia.
4. Nivel educativo de un aspirante a un cargo administrativo en una empresa.
5. Líneas de negocio de una fábrica de productos alimenticios a base de maíz.

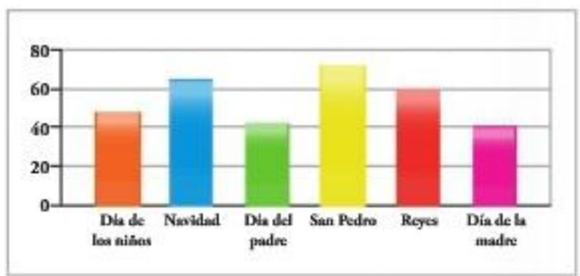
Caracteriza las variables planteadas en cada base de datos. Presenta tres conclusiones teniendo en cuenta dicha caracterización.

6. El gerente de un banco ha detectado que en el último mes ha bajado el número de clientes, por esto, realiza una encuesta a 90 clientes en una de sus sucursales y les pregunta cuál es el aspecto que el banco debe mejorar. Las respuestas son las siguientes:

Atención	Atención	Horarios	Servicios	Atención	Atención	Atención	Servicio	Horarios	Servicio
Cajeros	Atención	Servicio	Horarios	Atención	Horarios	Atención	Servicio	Atención	Cajeros
Horarios	Cajeros	Cajeros	Horarios	Atención	Cajeros	Atención	Servicio	Atención	Servicio
Servicio	Horarios	Cajeros	Atención	Cajeros	Atención	Servicio	Servicio	Atención	Cajeros
Atención	Horarios	Cajeros	Atención	Horarios	Atención	Horarios	Atención	Horarios	Atención
Atención	Horarios	Cajeros	Atención	Horarios	Cajeros	Horarios	Atención	Cajeros	Atención
Atención	Horarios	Atención	Servicio	Atención	Cajeros	Servicio	Atención	Servicio	Atención
Servicio	Horarios	Atención	Cajeros	Atención	Cajeros	Atención	Servicio	Horarios	Horarios
Horarios	Cajeros	Atención	Cajeros	Atención	Servicio	Atención	Horarios	Atención	Servicio

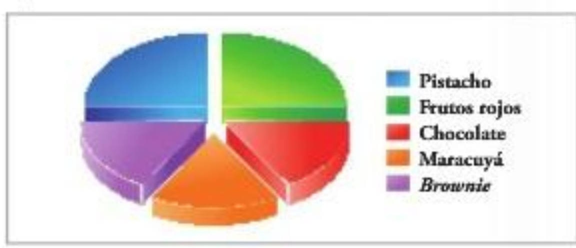
Reconstruye la tabla de frecuencias que dio origen al gráfico. Luego, plantea cinco conclusiones en relación con la población.

7. Un estudio sobre las preferencias en cuanto a las fiestas colombianas arrojó los resultados que se muestran a continuación.



Observa la gráfica que caracteriza a una población. Luego, determina la variable estudiada, la población y escribe cuatro conclusiones relacionadas con el estudio que se representó.

8. Un estudio sobre los sabores preferidos para una nueva malteada arrojó los resultados que se muestran a continuación.



2. Caracterización de dos variables cualitativas

Para caracterizar dos variables cualitativas, simultáneamente, es necesario utilizar tablas en las cuales se cruza la información que relaciona dichas variables.

2.1 Tabla cruzada o tabla de contingencia

Una **tabla cruzada** o **tabla de contingencia** es una matriz en la cual se cruza la información de dos variables cualitativas. Las filas corresponden a las categorías de una variable y las columnas a las categorías de la otra variable.

EJEMPLO

El rector de un colegio le preguntó a 75 de sus estudiantes sobre el tipo de transporte que usan para llegar al colegio. Las opciones de respuesta son: ruta escolar, transporte público y caminando. Además, al contestar las preguntas se debía marcar si el encuestado era hombre o mujer. Los resultados se muestran en la tabla.

	Tipo de transporte			
Género	**Ruta**	**Bus**	**Caminando**	**Total**
Hombre	27	8	15	50
Mujer	11	7	7	25
Total	38	15	22	75

Analizar la tabla cruzada. Elaborar la tabla de frecuencias con porcentajes y la gráfica de barras.

Ya que en la construcción de la tabla cualquiera de las dos variables puede ocupar el lugar de la fila o de la columna se realiza lo siguiente:

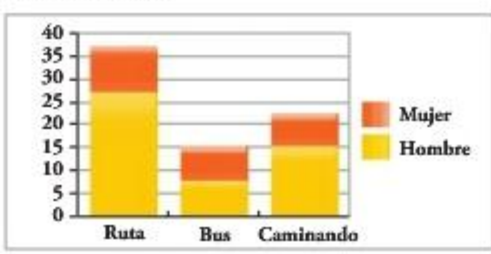
Primero, se debe entender e interpretar la información que brinda la tabla. Así: 27 estudiantes hombres van al colegio en ruta, 22 estudiantes van caminando, el total de estudiantes mujeres es 50% menos que el total de hombres y la mayoría de las mujeres van al colegio en ruta.

Luego, para realizar la tabla de frecuencias con porcentajes se divide cada dato correspondiente a la frecuencia absoluta entre la cantidad total de datos.

Por ejemplo, para obtener el dato correspondiente a la primera fila y la primera columna se divide 27 entre 75, esto corresponde al 36% del total de datos.

	Tipo de transporte			
Género	**Ruta**	**Bus**	**Caminando**	**Total**
Hombre	36%	10,7%	20%	66,7%
Mujer	14,7%	9,33%	9,31%	33,3%
Total	50,7%	20%	29,31%	100%

Finalmente, para realizar la gráfica de barras de la situación, se ubican los datos correspondientes a las frecuencias absolutas, como se muestra a continuación:



2.2 Tabla marginal

Una **tabla marginal** es una tabla cruzada, en la cual se muestran las frecuencias relativas con relación al total de cada fila o columna.

En la caracterización de dos variables, para cada tabla cruzada se generan dos tablas de contingencia.

A continuación, se presenta la tabla marginal correspondiente al tipo de transporte que usan los estudiantes para ir al colegio.

Género	Ruta	Bus	Caminando
Hombre	27/38	8/15	15/22
Mujer	11/38	7/15	7/22
Total	38/38	15/15	22/22

En forma similar, se construye la tabla en términos de porcentajes.

Género	Ruta	Bus	Caminando
Hombre	71%	53%	68,1%
Mujer	29%	47%	31,9%
Total	100%	100%	100%

Recuerda que...

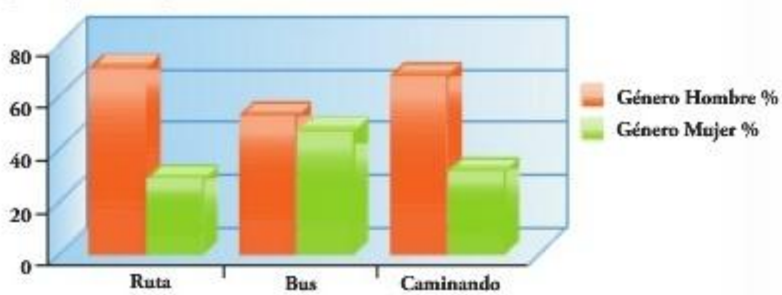
La **moda** es una medida que permite determinar cuál es el dato de mayor frecuencia en una distribución.

De acuerdo con este concepto se utiliza en la cotidianidad el término "está de moda".

Así, teniendo en cuenta la tabla de porcentajes se puede afirmar que:

- De los estudiantes que usan la ruta escolar para ir al colegio, el 71% son hombres y el 21% son mujeres.
- De los estudiantes que van en transporte público, el 53% son hombres y el 47% son mujeres.
- De los estudiantes que van caminando al colegio, el 68,1% son hombres y el 31,9% son mujeres.

La gráfica de barras para la correspondiente tabla marginal se presenta de manera similar a la que se presentó para la tabla cruzada.



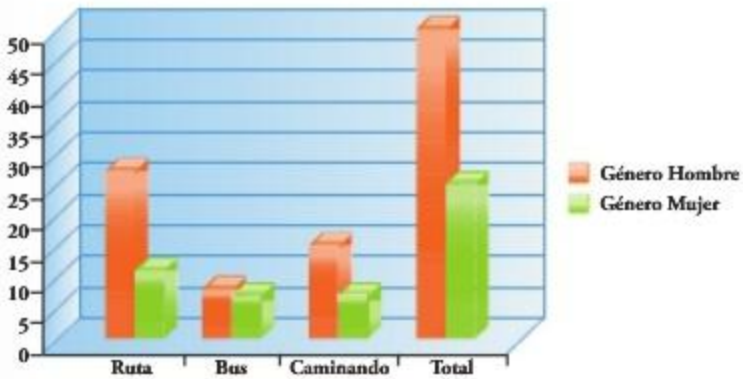
Al observar la gráfica se puede afirmar que entre los hombres está de moda usar la ruta escolar para ir al colegio; en cambio entre las mujeres está de moda ir al colegio en bus.

La tabla marginal para la variable género se construye de manera similar.

Tipo de transporte				
Género	Ruta	Bus	Caminando	Total
Hombre	27/50	8/50	15/50	50/50
Mujer	11/25	7/25	7/25	25

En este caso, los totales que se toman para las respectivas frecuencias relativas son los de las columnas, es decir, 50 para la clase correspondiente a hombres y 25 para mujeres.

La gráfica de barras correspondiente a la tabla marginal relacionada con el género, se muestra a continuación.



De la gráfica se pueden concluir los siguientes aspectos:

- Del total de hombres, 27 va en ruta escolar al colegio y del total de mujeres, 11 va en ruta escolar al colegio.
- Del total de hombres, 8 va en transporte público al colegio y del total de mujeres, 7 va en transporte público al colegio.
- Del total de hombres, 15 va al colegio caminando y del total de mujeres, 7 va al colegio caminando.

En esta gráfica se incluyeron las barras correspondientes a los totales, con lo cual es posible observar los respectivos porcentajes de hombres y de mujeres que se tomaron en la muestra.

Así, por la muestra, se puede determinar que hubo más hombres que mujeres.

Es importante aclarar que cada estudio estadístico que se hace a partir de la información de una base de datos debe tener un objetivo específico. En el ejemplo planteado es posible que el objetivo sea proponer que el colegio asigne más rutas escolares para prestar el servicio, pero esta decisión no se puede tomar sin antes determinar si la población necesita dicho servicio.

Esto permite aclarar que, si bien los estudios estadísticos deben tener objetividad en el análisis de la información, es muy importante que la persona que analiza dicha información conozca la población, sus características y los diferentes aspectos que pueden llegar a influir en ella.

Afianzo COMPETENCIAS

R Razono · **S** Soluciono problemas

R **Con el fin de determinar posibles donantes en un hospital de la ciudad, se aplicó un estudio relacionado con el tipo de sangre y el Rh de sus pacientes.**

El estudio consistió en seleccionar un grupo de pacientes que frecuentaron el hospital en un período de un mes. En estos pacientes se tomó una muestra de sangre y se determinó el grupo (O, A, B, AB) y el factor Rh (+, −).

La muestra fue estratificada, ya que se seleccionó teniendo en cuenta las siguientes secciones del hospital: medicina general (MG), medicina especializada (ME) y urgencias (U).

De la misma manera, se tuvo en cuenta el género de los pacientes: masculino (M) y femenino (F).

Los resultados de la encuesta se clasificaron por género, sección del hospital en la cual estuvo el paciente y el respectivo tipo de sangre, así:

G	T	S	G	T	S	G	T	S	G	T	S	G	T	S
M	O+	MG	F	O−	U	M	AB−	MG	F	B+	U	F	B−	ME
F	O+	ME	M	O+	MG	F	B+	ME	M	O+	MG	F	O+	U
F	A+	MG	M	O+	U	F	A−	ME	F	AB+	ME	M	O+	MG
M	O+	U	F	B+	U	M	A+	U	F	AB−	U	M	A+	ME
F	O+	MG	M	A+	U	F	B+	ME	F	O+	MG	M	AB+	U
F	A+	U	F	B+	U	M	A−	MG	M	A+	U	F	O+	MG
M	O+	U	F	AB+	ME	M	B+	U	F	AB+	MG	M	B−	ME
M	O+	MG	F	O+	U	F	AB+	ME	M	O+	U	M	B+	MG
F	A+	ME	F	B+	U	M	A+	MG	F	O+	ME	M	A−	ME
M	B+	U	M	O−	ME	F	AB+	MG	F	AB−	U	M	AB+	U
F	A+	ME	M	O+	U	F	O−	MG	F	A+	ME	M	AB+	U

R **Completa.**

9. El objetivo que tiene el estudio es____________.
10. La población es ________________ y la muestra es________________.
11. Las variables que se estudiaron en la muestra escogida son________________.
12. Elabora, en tu cuaderno, una tabla de distribución de frecuencias para cada una de las variables del estudio.
13. Responde: ¿Cuál de los métodos para representar la información gráficamente resulta más efectivo en este caso? ¿Por qué?

R **Elabora un diagrama de barras que relacione cada par de variables.**

14. Género y número de personas.
15. Tipo de sangre y número de personas.
16. Sección del hospital y número de personas.

R **Realiza un diagrama circular que relacione las variables dadas en cada caso.**

17. Grupo sanguíneo y número de personas.
18. Rh y número de personas.
19. Utiliza los datos de género y tipo de sangre para construir una tabla cruzada.
20. Construye la tabla marginal asociada a la variable "tipo de sangre".
21. Responde: ¿Qué porcentaje de la muestra corresponde a cada tipo de sangre?
22. ¿Existe alguna relación entre el género y el tipo de sangre? ¿Por qué?
23. Si el hospital en el que se realizó el estudio requiere renovar sus existencias en el banco de sangre convocando a 100 personas, ¿cuántas personas se requiere para cada tipo de sangre?
24. Si se tiene en cuenta solamente la sección de urgencias, ¿cambiarían las cantidades?

R **La Federación Nacional de Agricultores ofrece incentivos económicos a todos los asociados que se inclinen por cultivar alguno de los siguientes productos:**

Café: C Flores: F Banano: B Algodón: A

En un estudio aplicado entre 40 agricultores interesados, algunos decidieron cultivar cada producto de manera total (T) o parcial (P) en sus fincas. Los resultados se presentan a continuación.

Producto	Cultivo
C	T
F	P
A	T
B	T
C	T
F	P
B	T
C	P
A	T
B	P

Producto	Cultivo
F	P
C	T
B	P
C	T
C	T
B	P
A	P
F	P
F	T
C	P

Producto	Cultivo
B	T
C	P
F	T
A	P
B	T
C	P
A	P
F	P
A	T
C	T

Producto	Cultivo
A	T
F	P
B	T
A	P
C	T
F	T
A	T
C	P
B	P
C	T

25. Construye la tabla de distribución de frecuencias para cada variable.

26. Construye el diagrama de barras correspondiente a la variable "productos".

27. Construye el diagrama circular correspondiente a la variable "cultivo".

28. La Asociación Nacional de Agricultores está dispuesta a ofrecer asesorías y abono gratis a los agricultores que se inclinen por cultivar café, siempre y cuando el 30% de los encuestados se comprometan a cultivar el 100% del terreno. ¿Se beneficiarán algunos agricultores con esta oferta?

29. Construye una tabla de contingencia para las dos variables estudiadas y la tabla de contingencia de porcentajes.

S **Un centro de estimulación temprana planea abrir un curso de matrogimnasia para niños. Para tal fin, su administrador pregunta a las mamás de los pacientes de un centro pediátrico si estarían interesadas en asistir al curso y qué día de la semana y qué horario sería el mejor para ellas y sus bebés. Los resultados se muestran a continuación.**

Le interesa	Día	Horario
Sí	Sábado	Mañana
No	Sábado	Mañana
Sí	Sábado	Mañana
No	Miércoles	Tarde
Sí	Miércoles	Tarde
Sí	Sábado	Mañana
Sí	Viernes	Tarde
No	Sábado	Mañana
Sí	Sábado	Tarde
Sí	Sábado	Mañana

Le interesa	Día	Horario
No	Viernes	Tarde
Sí	Viernes	Tarde
No	Miércoles	Tarde
Sí	Viernes	Tarde
Sí	Viernes	Tarde
No	Sábado	Tarde
No	Sábado	Mañana
No	Sábado	Mañana
Sí	Viernes	Mañana
Sí	Miércoles	Tarde

Le interesa	Día	Horario
Sí	Sábado	Mañana
Sí	Sábado	Mañana
Sí	Sábado	Mañana
Sí	Viernes	Mañana
Sí	Viernes	Mañana
Sí	Sábado	Mañana
Sí	Sábado	Tarde
No	Sábado	Mañana
No	Viernes	Tarde
No	Viernes	Tarde

Responde.

30. ¿Tiene sentido para el estudio construir todas las tablas cruzadas que se pueden generar al relacionar las tres variables? Explica tu respuesta.

31. Si fueras la persona encargada de determinar si el curso se hace o no se hace y en qué horario y día se efectuará, ¿qué decidirías? Explica tu respuesta.

3. Caracterización de variables cuantitativas

Enlace web   Recurso imprimible

Es posible caracterizar una variable cuantitativa teniendo en cuenta la forma en la cual se estudiarán los datos. Así, es posible estudiar los datos en forma agrupada y en tal caso la caracterización se hace teniendo en cuenta el diagrama de tallo y hojas, la tabla de distribución de frecuencias, la gráfica de punto, el histograma y la ojiva.

La caracterización en la que se presentan los datos en forma no agrupada será tema del numeral 4 de esta unidad.

3.1 Diagrama de tallo y hojas

Actividad

Un **diagrama de tallo y hojas** es una representación gráfica en la cual los datos se clasifican de acuerdo con la expresión decimal de cada uno de ellos.

En este diagrama es fácil mostrar, en forma simultánea, el orden y la forma de un conjunto de datos.

Para construir un diagrama de tallo y hojas, primero, se ordenan los dígitos principales de cada dato a la izquierda de una línea vertical; esta columna es llamada *tallo*. A la derecha de esta línea se registra el último dígito para cada dato, conforme se revisan las observaciones en el orden que se registraron; esta columna es llamada *hoja*.

EJEMPLO

Realizar el diagrama de tallo y hojas para la siguiente situación.

El departamento de psicología del colegio ha implementado un programa de buen uso del tiempo libre para los estudiantes. Para ello, construyó un gimnasio donde los estudiantes se pueden ejercitar en horario extraclase. Luego, de unos meses de que el gimnasio inicia su funcionamiento, se reporta el número de veces que cada estudiante ha asistido a dicha práctica. Los resultados para 50 estudiantes se presentan a continuación.

21	15	8	13	23	14	5	15	11	15	15	15	18	7	21	14	22
11	7	22	14	8	14	14	11	9	12	29	16	11	19	19	15	6
12	14	18	18	31	12	25	11	19	13	18	15	15	19	22	16	

Primero, se organizan los datos en forma ascendente así:

5	6	7	7	8	8	9	11	11	11	11	11	12	12	12	13	13
14	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	18
18	18	18	19	19	19	19	21	21	22	22	22	23	25	29	31	

Segundo, se determinan los tallos que, para este caso, serán los dígitos de las cifras de la decenas en cada número; para los números de un solo dígito se usará el cero. Tallos: 0, 1, 2, 3.

Luego, se organiza el diagrama poniendo los tallos en la columna de la izquierda y las hojas, en la columna de la derecha, así:

0	5 6 7 7 8 8 9
1	1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 8 8 8 8 9 9 9 9
2	1 1 2 2 2 3 5 9
3	1

3.2 Tabla de distribución de frecuencias

Actividades

Ampliación multimedia

Al igual que para las variables cualitativas, una tabla de distribución de frecuencias es un resumen de los datos. Estos se presentan en forma agrupada y discriminando diferentes aspectos de esta agrupación.

La tabla de distribución de frecuencias está formada por siete columnas en las cuales se incluyen: intervalos de clase, frecuencia f, frecuencia relativa fr, frecuencia acumulada F, frecuencia relativa acumulada Fr, porcentaje % y marca de clase x_i.

Para construir una tabla de distribución de frecuencias se deben tener en cuenta tres aspectos fundamentales:

- Determinar la cantidad de intervalos o clases convenientes para la distribución.
- Determinar el tamaño de cada clase (suele nombrarse como ancho de clase).
- Determinar los límites superior e inferior de cada clase.

EJEMPLO

Una empresa de auditores contables lleva la estadística del tiempo, en días, que requiere cada uno de sus empleados para realizar la auditoría de fin de año de varias empresas que son sus clientes. A continuación se presentan los resultados.

12	**15**	**20**	**22**	**14**	**14**	**15**	**27**	**21**	**18**
19	**18**	**22**	**33**	**16**	**18**	**17**	**23**	**28**	**13**

Organizar los datos en una tabla de distribución de frecuencias. Luego, escribir tres conclusiones.

Primero, se determina el número de intervalos.

$$\text{No. de intervalos} = \sqrt{20}\ 4{,}47 \approx 4$$

Luego, se halla el tamaño de cada intervalo. Para ello, se halla el rango restando el dato menor del dato mayor. Y después se divide este resultado entre el número de intervalos.

$$\text{Rango} = D_M - D_m = 33 - 12 = 21$$

$$\text{Tamaño} = \frac{21}{4} = 5{,}25 \approx 5$$

Finalmente, se organiza la tabla de frecuencias formando los intervalos a partir del dato menor. Así:

Clase	f	fr	F	Fr	%	x_i
12-17	8	8/20	8	8/20	40	14,5
18-23	9	9/20	17	17/20	45	20,5
24-29	2	2/20	19	19/20	10	26,5
30-35	1	1/20	20	20/20	5	32,5

A partir de la información se puede concluir que:

- El 45% de los auditores se demora entre 18 y 23 días haciendo la auditoría de fin de año a los clientes.
- Solo un auditor tarda más de 30 días en hacer el trabajo.
- 17 auditores emplean entre 12 y 23 días en hacer una auditoría.

Recuerda que...

Los métodos para encontrar el número de intervalos en una distribución arrojan datos que, en su mayoría, deben ser aproximados al entero más cercano. Por esta razón, no existen distribuciones de frecuencias únicas para una misma base de datos.

3.3 Gráfica de puntos

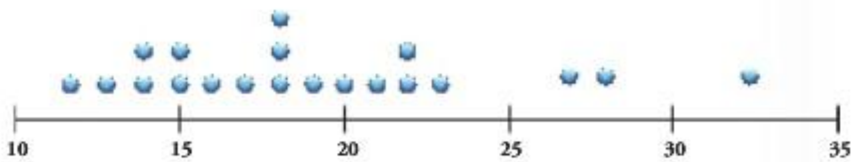
La **gráfica de puntos** es uno de los resúmenes gráficos más sencillos para un conjunto de datos.

Para realizar este diagrama, primero, se dibuja un eje horizontal en el que se muestra el intervalo de los valores para los datos.

Luego, se representa el valor de cada dato con un punto colocado sobre dicho eje.

Finalmente, se observa el diagrama para extraer conclusiones de él.

A continuación, se muestra el diagrama correspondiente al ejemplo anterior:



Así, los tres puntos ubicados sobre el 18 indican que hay tres observaciones de valor 18.

3.4 Histograma

El **histograma** es un resumen gráfico que se organiza a partir de la tabla de distribución de frecuencias.

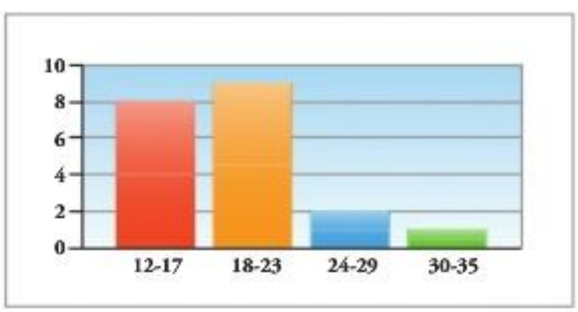
Para trazar un histograma se realiza lo siguiente:

Primero, se dibuja el eje horizontal y se escriben las opciones de la variable de interés.

Segundo, se dibuja el eje vertical y sobre este se escriben la frecuencia, la frecuencia relativa o el porcentaje.

Tercero, se representa cada frecuencia de clase trazando un rectángulo cuya base es el intervalo de clase sobre el eje horizontal y cuya altura es la frecuencia correspondiente.

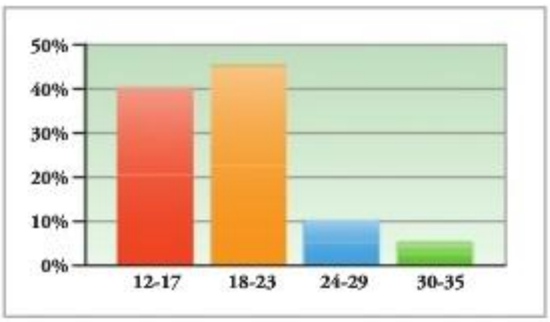
A continuación se presenta el histograma relacionado con los tiempos de los auditores del ejemplo anterior.



En este gráfico se utilizaron las columnas clase y f de la tabla de la página 303, correspondientes al tiempo en días, que se tardan los empleados para realizar las auditorías de fin de año.

El histograma anterior se hizo teniendo en cuenta las frecuencias; a continuación, se presenta un histograma en el cual las barras representan la frecuencia relativa:

En algunas ocasiones es necesario presentar el histograma de porcentajes. El histograma para el ejemplo anterior es el siguiente.



> ***Recuerda que...***
>
> Una gráfica de barras y un histograma son, en esencia, lo mismo. Las dos son representaciones gráficas de un conjunto de datos de una distribución de frecuencias.
>
> Un histograma es solo una gráfica de barras sin ninguna separación entre ellas, pues la separación se considera más adecuada cuando los datos son cualitativos ya que son datos discretos y no hay posibilidad de valores intermedios entre ellos.

3.5 Ojiva

Cuando en un histograma se representan las frecuencias acumuladas, la gráfica de dicha representación recibe el nombre de **ojiva**.

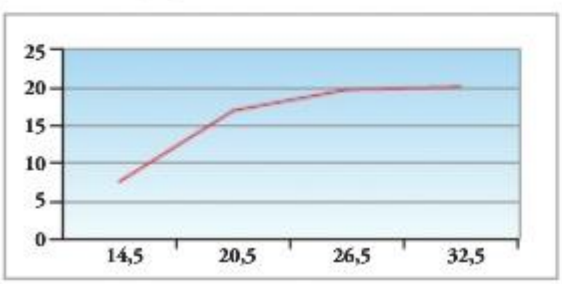
La ojiva se traza de la siguiente manera:

Primero, se ubica la marca de clase (punto medio) de cada intervalo.

Segundo, se ubican puntos en la gráfica. Para ello se toma como referencia la marca de clase del intervalo y la altura correspondiente a la frecuencia acumulada de dicha marca de clase.

Finalmente, se unen estos puntos con líneas rectas.

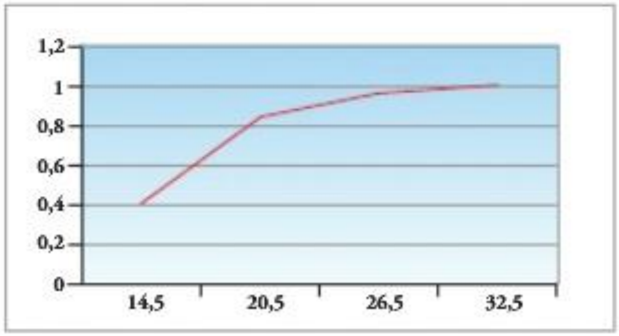
La ojiva correspondiente al ejemplo de los auditores se muestra a continuación:



En el extremo izquierdo de la ojiva se ubicó un punto adicional que da comienzo a la curva e indica que no hay valores menores que la clase del 10 al 17.

Es importante anotar que la ojiva es una curva creciente puesto que se construye a partir de las frecuencias acumuladas.

Es posible elaborar una ojiva a partir de las frecuencias relativas acumuladas. A continuación, se presenta dicho gráfico.



Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Como parte del proceso de selección de los estudiantes de una prestigiosa universidad del país se aplica una prueba de aptitud. A continuación, se registra el número de preguntas que contestaron bien:

112	124	100	92	74	165	100
99	96	7	165	169	90	77
79	99	102	132	127	99	65
86	90	77	89	100	120	132

32. Elabora un diagrama de tallo y hojas para agrupar la información.

33. Completa. La clase en la que se agrupa la mayor cantidad de datos es ______________.

34. Escribe algunas conclusiones con relación a esta clase.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Una tienda de mascotas mantiene diferentes cachorros de la misma raza de perros. Para hacer un seguimiento de su crecimiento y desarrollo, al ingresar a la tienda se registran los pesos de los diferentes cachorros.

A continuación, se presentan los datos obtenidos en los últimos seis meses, el peso está dado en gramos:

4.500	3.590	5.789	3.452	4.500
5.870	4.898	3.789	4.569	5.532
4.002	4.280	3.980	3.300	4.000
4.300	3.230	3.000	4.030	3.780

35. Elabora el diagrama de tallo y hojas para la situación.

36. Completa. En la clase modal hay ________ datos. Y el número de cachorros de menor peso es ______________.

En la última convocatoria realizada por una programadora de televisión se buscaba seleccionar a los participantes de un nuevo *reality*. Dentro del formulario de inscripción se preguntó a los participantes por su grado de escolaridad, medido en número de años, contando desde primero de primaria. Los resultados se muestran a continuación:

11	10	4	8	14	12	14	5	8
9	11	6	10	12	8	11	11	9
5	11	11	4	4	17	6	19	0
18	9	10	12	10	16	11	18	9

37. Completa la siguiente tabla de frecuencias utilizando los rangos establecidos por el sistema educativo colombiano:

Escolaridad	f	fr	F	Fr	%	x_i
0 a 5 años Primaria						
6 a 11 años Secundaria						
12 a 17 años Profesional						
Más de 18 años Especialización						

Responde con respecto a la información anterior.

38. ¿Cuál es la frecuencia relativa del nivel secundaria? ¿Qué significado tiene este dato?

39. ¿Qué nivel educativo predomina entre las personas que se presentaron al *reality*?

40. ¿Qué nivel educativo es el que menos predomina?

41. ¿Se puede afirmar que los aspirantes, en su mayoría, han hecho la secundaria? Justifica la respuesta.

42. Construye el histograma y la ojiva para la situación. Luego, escribe algunas conclusiones al respecto.

43. Elabora la tabla de frecuencias siguiendo los pasos planteados en el tema anterior.

Explica.

44. ¿Cambiaron las frecuencias en la nueva tabla? Justifica tu respuesta.

45. ¿Qué diferencias hay entre los intervalos de las dos tablas?

46. Compara las tablas elaboradas en los numerales 44 y 45. ¿Cuál de las dos es una mejor representación de los datos dados? ¿Por qué?

El alcalde de la ciudad está considerando la posibilidad de implementar un peaje de ingreso. Sus asesores han llegado a la conclusión que existen dos ubicaciones posibles y favorables para ello. El alcalde decide medir el número de automóviles que ingresan a la ciudad por cada uno de los dos puntos durante los últimos 15 días. Los resultados se muestran a continuación:

Punto 1	430	460	501	423	455	473	450	481
	442	429	439	414	475	452	474	
Punto 2	406	153	491	505	467	421	556	470
	348	472	479	403	278	440	234	

47. Construye una tabla de frecuencias para cada uno de los puntos usando intervalos de 49 unidades de ancho e iniciando en 401. Escribe algunas conclusiones.

48. Construye una tabla de frecuencias usando el método propuesto en esta unidad.

49. Compara las dos tablas y escribe algunas conclusiones al respecto.

50. Elabora los histogramas que se generan a partir de las dos tablas.

51. Elabora las ojivas correspondientes.

R **El personal de un consultorio ha estudiado los tiempos de espera de los pacientes que llegan a solicitar el servicio de urgencias.**

Los siguientes fueron los datos reunidos en un período de un mes. Los tiempos están medidos en minutos:

2	5	10	12	4
4	5	17	11	8
9	8	12	21	6
8	7	13	18	3

52. Elabora la tabla de distribución de frecuencias para esta situación.

53. Responde: ¿Qué porcentaje de los pacientes que utilizan el servicio de urgencias tiene tiempo de espera de nueve minutos o menos? Explica cómo conseguiste este resultado.

E **En un estudio relacionado con los niveles de satisfacción en el trabajo se aplicó una serie de pruebas a 50 individuos. Se obtuvieron los siguientes datos:**

87	73	65	46	76	69	92	84	67	61
77	76	58	88	71	78	92	46	70	64
59	85	74	69	41	97	53	76	50	50
43	78	90	47	61	67	75	81	89	74
80	87	84	64	81	75	83	70	60	70

54. Elabora un diagrama de tallo y hojas para la situación.

55. Con base en el diagrama de tallo y hojas, elabora la tabla de distribución de frecuencias para la situación.

56. Elabora un histograma que represente la situación.

57. Escribe algunas conclusiones a partir de esta gráfica.

____

____

____

____

S **En un gimnasio se va a implementar un programa de acondicionamiento físico. Para proporcionar el mejor tipo de entrenamiento se preguntó a algunos de los clientes que asisten en el horario matutino por su tiempo de entrenamiento (medido en minutos). Los resultados se ven reflejados en las siguientes gráficas.**

58. Reconstruye la tabla de distribución de frecuencias correspondiente a las gráficas dadas.

59. Escribe tres conclusiones importantes a partir de la caracterización de la variable estudiada.

____

____

____

____

____

60. Elabora la ojiva relacionada con la situación.

4. Métodos numéricos para la caracterización de variables

Ampliaciones multimedia

En los temas anteriores se describieron métodos variados para resumir datos y caracterizar una variable. Estos son una gran ayuda visual en presentaciones ante individuos o grupos. En los temas siguientes, aprenderás dos métodos que proporcionan otras alternativas para analizar los datos: las medidas de localización y las medidas de variabilidad.

Recuerda que…

Si se calculan las medidas de localización y de variabilidad partiendo de los datos de una muestra, estas se llaman **estadísticos** de la muestra.

Si se calculan a partir de datos de una población se denominan parámetros **poblacionales**.

4.1 Medidas de localización

Las medidas de localización son cinco: la media, la mediana, la moda, los percentiles y los cuartiles.

Media

La media es quizá la medida de localización más usada, también es llamada **promedio** y es una medida de localización central o tendencia central. Si los datos que se usan para calcularla proceden de una muestra, se representa con $\bar{x}$; si los datos son de una población, se utiliza la letra griega μ.

Los valores para los diferentes datos se expresan así: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$

La **media** para una muestra con n datos se calcula aplicando la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

La media es una medida que se ve afectada por el cambio drástico de uno de los datos. Si hay un dato muy grande o un dato muy pequeño con respecto a los demás, la media cambia significativamente.

EJEMPLO

El diseñador de la página web del colegio está lanzando una nueva estrategia para motivar a los estudiantes a consultar las actividades en Internet. Día a día cuenta el número de usuarios que han visitado la página.

Los resultados de los últimos 15 días se muestran a continuación:

150	300	265	123	321	203	400	100
298	209	397	199	234	200	249	

Las directivas del colegio plantean que si el promedio de usuarios es mayor que 300, entonces, mejorará la velocidad del servicio adquiriendo un paquete de datos con velocidad de 20G.

Determinar cuál será la decisión de las directivas teniendo en cuenta los datos de los quince días de prueba del servicio.

Con base en los datos se calcula el promedio así:

$$\bar{x} = \frac{150 + 203 + 209 + 300 + 400 + 397 + 265 + 100 + 199 + 123 + 249 + 234 + 321 + 298 + 200}{15}$$

$\bar{x} = 243{,}2$. Luego la media es 243,2.

A partir del cálculo de la media se puede determinar que las directivas no aumentarán la velocidad en el servicio de Internet ya que el promedio de usuarios es mucho menor de lo propuesto para tal fin.

Mediana

La mediana es otra medida de la localización central de datos. Es el valor intermedio cuando los valores de los datos han sido ordenados en forma ascendente. La mediana se representa como $\widetilde{x}$ si es tomada de una muestra y como $\widetilde{\mu}$, si es de la población.

Matemática*mente*

Si el conjunto de datos tiene valores extremadamente pequeños o extremadamente grandes, ¿qué medida de tendencia central es más acertada en la caracterización de la variable? Justifica tu respuesta.

Cuando hay un número impar de datos, la **mediana** es exactamente el valor intermedio.

Cuando hay un número par de datos, la **mediana** es el promedio entre los dos datos intermedios.

La mediana es una medida que no considera la magnitud de los datos, por ello no se ve afectada por el cambio significativo de uno de ellos. Sin embargo, al no considerar la magnitud no es una medida que describa las características de los datos cuando están lejanos unos de otros.

Para el ejemplo anterior se tiene el conjunto ordenado de datos en forma ascendente, como se muestra a continuación:

100	123	150	199	200	203	209	234
249	265	298	300	321	397	400	

En este caso, el dato central es el que está ubicado en la posición 8, es decir, 234. Así,

$$\widetilde{x} = 234 \text{ usuarios}$$

A partir de la mediana se puede afirmar que el 50% de los días, la página del colegio fue consultada por 234 usuarios o menos.

De la misma manera se puede afirmar que el 50% de los días, la página fue visitada por 234 usuarios o más.

Moda

Una tercera medida de localización es la moda, que se representa $\widehat{x}$ y se define a continuación.

La **moda** de un conjunto de datos es aquel que tiene mayor frecuencia.

Para el caso citado del colegio, se tiene que no hay ningún valor con frecuencia mayor a uno, así que se dice que no existe la moda.

En algunos casos, la máxima frecuencia se presenta en dos o más datos diferentes, por lo cual se dice que en ellos existe más de una moda. Si los datos tienen exactamente dos modas, se dice que son bimodales; si tienen más de dos modas, son multimodales.

En los casos multimodales casi nunca se menciona la moda, pues no ayuda citar tres o más modas para describir la localización de los datos.

A la media, la mediana y la moda se les llama también **medidas de tendencia central** y resultan ser una herramienta muy útil en la interpretación de datos.

Se acostumbra calcular las tres medidas para un mismo conjunto de datos y compararlas; si las tres resultan con valores muy cercanos, es posible hacer una caracterización muy acertada de las variables estudiadas en dicho conjunto de datos.

Percentiles

Recurso imprimible

Un **percentil** se simboliza como p, presenta información sobre cómo se distribuyen los datos en 100 partes porcentualmente iguales.

Para un conjunto de datos en el cual no hay muchos valores repetidos, el p-ésimo percentil divide los datos en dos partes. Más o menos el p por ciento de las observaciones tienen valores menores que el p-ésimo percentil y aproximadamente el 100-p por ciento de las observaciones tienen valores mayores que el p-ésimo percentil.

Para calcular el p-ésimo percentil se utiliza el siguiente método.

Primero, se ordenan los datos de manera ascendente.

Luego, se calcula el índice i: $i = \left(\frac{p}{100}\right)n$, en donde p es el percentil buscado y n es el número de datos.

Finalmente, se tienen en cuenta dos opciones a partir del resultado de i:

- Si i no es entero, se redondea. El valor entero inmediato mayor que i indica la posición del p-ésimo percentil.
- Si i es entero, el p-ésimo percentil es el promedio de los valores de los datos ubicados en los lugares i e $i + 1$.

EJEMPLO

Una bolsa de trabajo universitaria pide a algunos de sus exalumnos información sobre sus salarios iniciales luego de graduarse de su respectiva facultad. Los datos se registran en la siguiente tabla:

Egresado	Salario en dólares
1	2.850
2	2.950
3	3.050
4	2.880
5	2.755
6	2.710

Egresado	Salario en dólares
7	2.890
8	3.130
9	2.940
10	3.325
11	2.920
12	2.880

Calcular el percentil 85.

Primero, se ordenan los datos en forma ascendente, así:

2.710 2.755 2.850 2.880 2.880 2.890 2.920 2.940 2.950 3.050 3.130 3.325

Segundo, se calcula i.

$$i = \left(\frac{85}{100}\right)12 = 10{,}2$$

Finalmente, como i no es entero, se redondea. Así, el lugar del percentil 85 es el siguiente entero mayor que 10,2, es decir, 11. Al observar los datos, el percentil 85 es el valor en la posición 11, es decir, 3.130.

Así, se puede afirmar que el 85% de los egresados ganan 3.130 dólares o menos, para el caso, 9 de ellos. De la misma manera se puede afirmar que un egresado (el 15%) gana 3.130 dólares o más.

Matemática*mente*

Calcula el percentil 50 para el ejemplo de los salarios de los egresados universitarios.

Cuartiles

Actividad

Es frecuente dividir el conjunto de datos en cuatro partes porcentualmente iguales, cada una de las cuales contiene una cuarta parte de ellos (el 25%). A los puntos de división se les llama cuartiles y se representan con Q.

Se definen así:

$$Q_1 = \text{primer cuartil} = \text{percentil } 25 = p_{25}.$$

$$Q_2 = \text{segundo cuartil} = \text{percentil } 50 = p_{50}.$$

$$Q_3 = \text{tercer cuartil} = \text{percentil } 75 = p_{75}.$$

Los **cuartiles** son casos especiales de los percentiles.

Matemáticamente

¿A cuál cuartil corresponde la mediana? Explica tu respuesta.

Para calcular los cuartiles se utiliza el mismo método planteado en la página anterior.

Por ejemplo, para calcular Q_2 realizamos el siguiente procedimiento.

- Calculamos i:

$$i = \left(\frac{50}{100}\right)12 = 6$$

- Como i resultó ser entero, entonces, $Q_2 = p_{50}$ es el promedio entre los valores de las posiciones 6 y 7 del conjunto de datos.

$$Q_2 = \frac{2.890 + 2.920}{2} = 2.905$$

Siguiendo un procedimiento similar se encuentra que para Q_1:

$i = \left(\frac{25}{100}\right)12 = 3$, entonces, Q_1 es el promedio entre los valores de las posiciones 3 y 4; es decir,

$$Q_1 = \frac{2.850 + 2.880}{2} = 2.865$$

Matemáticamente

Investiga qué medida es el rango intercuartílico y cómo se calcula.

Ahora, para Q_3 se tiene que $i = \left(\frac{75}{100}\right)12 = 9$. Es decir,

$$Q_3 = \frac{2.950 + 3.050}{2} = 3.000$$

Los cuartiles han divido el conjunto de datos en cuatro partes, en cada una de las cuales hay un 25% de ellos:

2.710 2.755 2.850 2.880 2.880 2.890 2.920 2.940 2.950 3.050
3.130 3.325

$Q_1 = 2.865$ $Q_2 = 2.905$ $Q_3 = 3.000$

Deciles

Corresponden a la división del grupo de datos en diez partes porcentuales iguales. El cálculo del índice para el decil se puede realizar mediante la expresión:

$$i = \left(\frac{j}{10}\right)n \text{ donde } j = 1, \ldots, 9$$

Y se procede de forma análoga como se hace con los percentiles y los cuartiles.

4.2 Medidas de variabilidad

Al analizar un conjunto de datos también es necesario establecer algunas medidas que determinan la variabilidad o dispersión de los datos entre sí.

Estas medidas son tres: el rango, la varianza y la desviación estándar.

Rango

El **rango** es la medida de variabilidad más sencilla y se define mediante la expresión:

Rango $= D_M - D_m$

Donde D_M es el dato mayor y D_m es el dato menor.

Varianza

La varianza es una medida que emplea todos los datos y se basa en la diferencia entre el valor de cada dato y la media del conjunto. A esta diferencia se le llama desviación de un dato con respecto a la media.

Si se calcula en una muestra, se representa como S^2 y si se calcula en una población, se representa con σ^2.

La **varianza** para una muestra se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Donde $(x_i - \bar{x})$ es la desviación de los datos con respecto a la media y n es el número de datos.

Desviación estándar

La **desviación estándar** se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Para una muestra se define como:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Matemática*mente*

¿Por qué al calcular la varianza es necesario elevar al cuadrado las desviaciones con respecto a la media?

EJEMPLO

El empleado de la tienda escolar debe reportar, en una planilla, el número de fotocopias que pide cada uno de los estudiantes que usa el servicio. Los resultados de las dos últimas semanas, sin incluir domingos, son:

5	12	15	9	20	1
15	79	21	2	3	10

Analizar los datos teniendo en cuenta las medidas de variabilidad.

Recuerda que…

Si se calcula la varianza para una población, se debe usar la expresión

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

donde N es la población.

Para iniciar el análisis, se calcula la media del conjunto de datos. Así:

$$\bar{x} = \frac{5 + 12 + 15 + 9 + 20 + 1 + 15 + 79 + 21 + 2 + 3 + 10}{12}$$

En este caso, se puede determinar que la media es $\bar{x} = 16$ fotocopias.

Para plantear conclusiones más objetivas sobre el conjunto de datos se realiza el cálculo de las medidas de variabilidad.

Primero, se calcula el rango de la distribución así:

Rango $= 79 - 1 = 78$ copias

Luego, se calcula la varianza. Para tal fin es muy útil plantear una tabla con las respectivas variaciones de cada dato en relación con la media y los respectivos cuadrados, así:

No. de copias	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	-11	121
12	-4	16
15	-1	1
9	-7	49
20	4	16
1	-15	225
15	-1	1
79	63	3.969
21	5	25
2	-14	196
3	-13	169
10	-6	36
Suma	0	4.824

Luego, $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{4.824}{12 - 1} = 438,54$ fotocopias^2

Ahora, si la varianza es grande, se puede afirmar que la media no es un buen representante del grupo y que existen datos que están muy dispersos, por tanto, la variabilidad de la muestra es muy alta, como sucede en este caso.

El análisis de la varianza está ligado a las unidades en las que la medida está al cuadrado, lo cual hace complicada su interpretación, por tal razón, se hace necesario calcular la desviación estándar.

Finalmente, se calcula la desviación estándar para poder tener una medida lineal de comparación de los datos.

Así, $S = 20,94$ fotocopias.

Este valor es muy alto para la muestra, por tanto, a partir de la media no se puede hacer una caracterización adecuada de la variable estudiada.

Recuerda que...

El "grande" o "pequeño" de la varianza depende específicamente del conjunto de datos y de las características específicas de la población y la muestra estudiada. Así, la interpretación es casi exclusiva del investigador que conoce su grupo de investigación.

Además, un valor de la varianza puede resultar alto para un grupo de datos, pero puede resultar pequeño para otro grupo.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Razono

A continuación, se relaciona la lista de los sitios de Internet más populares al navegar desde casa y el número de visitantes, en miles:

Sitio	Visitantes
about.com	5.538
altavista.com	7.391
amazon.com	7.986
angelfire.com	8.917
aol.com	23.863
bluemountainarts.com	6.786
ebay.com	8.296
excite.com	10.479
geocites.com	15.321
go.com	14.330
hotbot.com	5.760
hotmail.com	11.791
icq.com	5.052
looksmart.com	5.984
lycos.com	9.950
microsoft.com	15.593
mns.com	23.505
netscape.com	14.470
passport.com	11.299
real.com	6.785
snap.com	5.730
tripod.com	7.970
xoom.com	5.652
yahoo.com	26.796
zdnet.com	5.133
google.com	22.679

61. Calcula la media y la mediana.

62. Responde: ¿Cuál de las dos medidas es mejor como tendencia central para estos datos? Explica tu respuesta.

63. Calcula los cuartiles 1, 2 y 3.

64. Calcula el percentil 85 y escribe una interpretación del mismo.

Una prestigiosa editorial ha hecho un estudio para determinar el número de libros de literatura que leen al año los habitantes de un sector de la ciudad. Para ello, encuestó a 60 personas de dicho sector. Los resultados fueron los siguientes:

5	8	6	9	12	20	1	0	7	2
12	15	1	3	8	10	7	4	4	5
3	4	10	4	1	2	9	3	3	8
6	7	12	6	0	8	1	5	1	7
9	12	4	7	0	11	6	9	1	6
10	11	1	2	4	2	6	8	0	4

65. Calcula la media, la mediana y la moda (si existe).

66. Encuentra los percentiles 25 y 70, y elabora una interpretación de ellos.

67. Determina el rango, la varianza y la desviación estándar de la muestra.

Responde.

68. ¿La muestra tiene mucha o poca variabilidad? Justifica tu respuesta.

69. ¿La media es un buen representante de la muestra? Explica tu respuesta.

En las afueras de una ciudad registraron la cantidad de automóviles que pasan por 16 puntos diferentes de un peaje, entre las 6:00 a. m. y las 6:30 a. m. Los datos se muestran a continuación.

180	170	210	190	195	200	205
200	199	186	197	201	210	201

70. Calcula la media y la mediana del número de vehículos.

71. Calcula e interpreta el percentil 65.

72. Determina el rango, la varianza y la desviación estándar de la muestra.

Responde.

73. En este caso, ¿la media puede considerarse un buen representante del conjunto de datos?

74. Si la Secretaría de Tránsito de dicha ciudad propone la creación de un nuevo punto en el peaje, y si la media supera los 200 vehículos y la desviación estándar es pequeña, ¿cuál será la decisión?

5. Técnicas de conteo

Enlace web

Las **técnicas de conteo** son herramientas que se utilizan para encontrar el número de elementos del espacio muestral de acuerdo con las características que tenga una muestra.

5.1 Clases de muestra

Dado un experimento aleatorio y una muestra de él se pueden presentar dos criterios para clasificar dicha muestra que son: el orden y la repetición.

Matemática*mente*

¿Cuál crees que es la función del diagrama de árbol dentro del estudio de las técnicas de conteo?

Se dice que una muestra tiene **repetición** cuando para formarla se puede repetir varias veces el mismo elemento de la población.

Se dice que una muestra tiene **orden** si al conformarla es importante el orden en el que se ubiquen los elementos de la población.

EJEMPLO

Un profesor tiene que elegir a dos estudiantes de un grupo de tres candidatos, para representar al colegio en las olimpiadas. Los candidatos son Felipe, Martha y Lucía. Determinar cuál es la población y cuál es la muestra.

En este caso, la población del experimento está formada por los tres candidatos, así que $N = 3$; además, el profesor debe escoger dos de esos tres estudiantes, por tanto, la muestra $n = 2$. Ya que un estudiante no puede ocupar dos de los cupos disponibles, se dice que la muestra no tiene repetición.

Si el experimento se realiza eligiendo uno a uno los tres estudiantes, no importa si es elegido de primero o de segundo, ya que al final, va a ocupar uno de los tres cupos disponibles para representar al colegio en la prueba. La muestra, entonces, no tiene orden.

5.2 Principio de multiplicación

Si en un experimento aleatorio se tiene una población de tamaño N y una muestra de tamaño n en la cual hay orden y repetición, entonces, el número de elementos del experimento $\#(S)$ se expresa como: $\#(S) = N^n$

EJEMPLO

Determinar cuántos resultados se pueden obtener al lanzar cuatro monedas al aire una vez.

Primero, se determina N. Como los elementos con los cuales se construirá el espacio muestral son dos: cara y sello, se tiene que $N = 2$.

Luego, se determina n. Para ello, es útil construir un elemento del espacio muestral, así: (cara, cara, sello, sello) es un elemento del espacio muestral, por tanto, $n = 4$.

En este experimento hay orden y repetición, por tanto, el número de elementos del espacio muestral es: $\#(S) = 2^4 = 16$

Entonces, el número de resultados al lanzar las cuatro monedas es 16.

5.3 Permutaciones

Ampliación multimedia

Dado un experimento aleatorio con población N y muestra n en donde la muestra tiene orden, pero no repetición, el número de elementos del espacio muestral se determina a partir de la permutación de n en N, que está dado por:

$$_NP_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Donde $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ y $0! = 1$

Matemática*mente*

Si $n = N$, ¿cuál será la expresión que determina el número de elementos del espacio muestral?

La permutación es una operación definida en los números naturales y para la cual es necesario que $n \leq N$. Además, el resultado de toda permutación es un número natural.

EJEMPLOS

1. **Determinar la muestra, la población y el número de elementos del espacio muestral del siguiente experimento aleatorio.**

Un empleado de una tienda femenina debe organizar la vitrina del almacén. El administrador le pide que vista tres maniquíes con cuatro vestidos de la última colección. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Se puede afirmar que $N = 4$ y $n = 3$. En n se dice que hay orden pues es diferente poner el vestido 1 en el maniquí 2 que en el maniquí 3. Además, no hay repetición pues el mismo vestido no se le puede poner a dos maniquíes distintos.

Así que el número de elementos del espacio muestral está dado por:

$$_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!} = 24$$

Luego, el empleado tiene 24 opciones diferentes de poner los cuatro vestidos en los tres maniquíes.

Es importante aclarar que en algunos casos se necesita hallar el número de elementos del espacio muestral, pero hay otros en los cuales se puede tomar específicamente alguno de los elementos de dicho espacio; en tal caso, se debe hacer, una por una, todas las posibles opciones del espacio muestral. Así, para este caso se tendría que:

$$S = \{(V_1, V_2, V_3), (V_1, V_2, V_4), (V_1, V_3, V_4), (V_2, V_1, V_4), \ldots\}$$

El lector podrá encontrar, siguiendo un proceso organizado, todos los elementos del espacio muestral de este experimento aleatorio.

2. **Una prueba de admisión para un colegio de la ciudad pide a un niño que forme un número de dos cifras diferentes, usando cuatro fichas con los números 1, 2, 5 y 7. ¿Cuántos números distintos puede formar el niño en la prueba?**

Primero, se determinan N y n.

En este caso $N = 4$, porque hay cuatro fichas, y $n = 2$, porque los números que debe formar el niño deben tener dos cifras.

Segundo, por las condiciones del problema, se puede determinar que en la muestra hay orden, pues es un conjunto numérico y no hay repetición, ya que en el experimento se aclara que los dígitos deben ser diferentes.

Luego, se aplica la fórmula de permutaciones para calcular el número de elementos del espacio muestral, así:

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Luego, el niño puede formar 12 números en la prueba con esas cuatro fichas.

3. **Para la elección de la junta directiva del consejo de propietarios de un conjunto residencial se han postulado siete candidatos. En los estatutos de la junta de administración del conjunto se ha estipulado que una vez realizada la elección, el candidato con mayor votación será el presidente, el segundo en número de votos será el tesorero y el tercero será el secretario. ¿De cuántas maneras distintas se puede conformar la junta directiva del consejo de propietarios?**

Para este caso se determina que $N = 7$, ya que son siete candidatos, y $n = 3$, ya que son tres personas que se deben elegir. En la muestra hay orden, pues no es igual quedar de primero, de segundo o de tercero; además no hay repetición, pues la misma persona no puede ocupar dos cargos. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que:

$$_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

En conclusión, hay 210 formas distintas de conformar el consejo con los siete candidatos disponibles.

5.4 Combinatoria

Dado un experimento aleatorio con una población N y una muestra n sin orden ni repetición, se dice que el número de elementos del espacio muestral es la **combinatoria** de n en N, así:

$$_{N}C_{n} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

EJEMPLOS

1. **Para la fiesta de fin de año de una importante multinacional se planea contratar una empresa de banquetes. La empresa escogida ofrece siete opciones de menú diferentes según las necesidades de los clientes.**

Si la multinacional desea que los empleados puedan acceder a cinco menús diferentes, ¿de cuántas maneras puede hacer la elección?

En este caso $N = 7$ y $n = 5$. Al analizar la situación se puede determinar que la muestra no es ordenada, pues no importa en qué orden se seleccionen los diferentes menús, además no hay repetición pues un menú no se puede seleccionar más de una vez. Teniendo en cuenta lo anterior, el número de elementos del espacio muestral se calcula así:

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{(7-5)!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Por tanto, la multinacional tiene 21 opciones de combinar los menús.

2. **Un nuevo modelo de lotería emplea una selección aleatoria de seis números entre un grupo de 47 posibles. En una urna, se depositan balotas numeradas del 1 al 47 y el experimento consiste en extraer una balota de la urna y ponerla en una fila. El ganador será quien tenga un boleto de lotería cuyos seis números, sin importar el orden, sean los mismos que se obtengan al extraer las balotas. ¿Cuántas opciones hay de combinar dicha selección?**

Para esta situación se tiene que $N = 47$ y $n = 6$.

Al analizar las características de la muestra se observa que no hay repetición, pues una balota que ha sido seleccionada no se devuelve a la urna y no es importante el orden, pues es una aclaración específica de este estilo de lotería.

Con base en el anterior análisis, se tiene que el número de elementos del espacio muestral está dado por:

$$\binom{47}{6} = \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41!}{(47-6)!6!} =$$

$$= \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43 \times 42}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10.737.573$$

Así que hay 10.737.573 posibles combinaciones en la selección.

Recuerda que...

La combinatoria entre dos números naturales es otro número natural, además, para los de la población y la muestra $n \leq N$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

75. **Un experimento aleatorio tiene tres etapas, con tres resultados posibles en la primera, dos en la segunda y cuatro en la tercera.**

¿Cuántos resultados existen para el experimento?

76. **En un concesionario se están ofertando vehículos por ser fin de año. La oferta ofrece dos tipos de vehículo: mecánico y automático. Además, cada uno tiene la opción de un lujo: vidrios eléctricos, aire acondicionado o sistema de audio. Hay disponibilidad en cinco colores: rojo córdoba, gris bretaña, dorado oro, verde pasión y negro.**

¿De cuántas maneras un cliente puede escoger el vehículo que va a comprar? Explica tu respuesta.

Para la final del Campeonato nacional de fútbol colombiano clasificaron cuatro equipos: Tolima, Once Caldas, Cúcuta y Equidad.

77. Escribe una pregunta para este contexto que se pueda responder mediante el principio de multiplicación.

78. Escribe una pregunta para este contexto que se pueda responder utilizando las permutaciones.

El menú de una tienda de comidas rápidas ofrece las siguientes opciones para preparar una hamburguesa.

¡Arma tu hamburguesa!

Tipos de carne	Tipos de queso
• Pollo	• Mozarela
• Res ahumada	• Doble crema
• Res al carbón	• Campesino

Acompañamientos dulces	Acompañamientos salados
• Piña	• Tocineta
• Mora	• Huevo
• Ciruela	• Guacamole

79. ¿De cuántas maneras diferentes puede un cliente pedir su hamburguesa?

80. Si un día determinado se decide no ofrecer acompañamientos dulces, ¿de cuántas maneras se puede formar la hamburguesa?

En una universidad, los estudiantes de las diferentes carreras deben tomar cada semestre, además de las asignaturas propias de la carrera, tres materias más. Cada una de esas materias debe estar contenida en alguno de los cuatro grupos que se plantean a continuación:

Grupo 1. Desarrollo profesional
Materia 1: Ética
Materia 2: Teoría de las buenas maneras
Materia 3: Comunicación y símbolos

Grupo 2. Desarrollo personal
Materia 1: Yoga
Materia 2: Pilates
Materia 3: Taichí

Grupo 3. Psicología de la sociedad
Materia 1: Psicología evolutiva
Materia 2: Entrenamiento empresarial
Materia 3: Psicoanálisis del cliente

Grupo 4. Desarrollo físico
Materia 1: Danzas
Materia 2: Vocal
Materia 3: Plástica
Materia 4: Teatro

81. ¿De cuántas maneras puede un estudiante escoger si solo tiene en cuenta los grupos?

82. ¿De cuántas maneras puede escoger sus tres materias si se decide por los grupos 1, 2 y 3?

83. ¿Cambiaría el número anterior si decide escoger los grupos 2, 3 y 4? Explica tu respuesta.

Para la semana cultural del jardín infantil "Mis primeros pasos" se ha organizado un reinado.

Las finalistas son: Sofía, Ana María, Juliana, Fernanda, Camila y Laura.

84. ¿De cuántas maneras podrían quedar como reina, virreina y primera princesa?

85. Si a última hora Juliana no participa en la final, ¿de cuántas maneras puede quedar la elección?

86. Si se sabe que Laura tiene que quedar entre las tres elegidas, ¿de cuántas maneras se podrá hacer la elección?

En un concurso de cocina profesional los participantes pueden seleccionar cuatro ingredientes entre seis para adobar su plato. Las opciones son:

Orégano
Páprika
Ajo
Jengibre
Tomillo
Cebollín

87. ¿De cuántas maneras un participante del concurso puede hacer la elección?

88. Si el primer participante seleccionó cebollín y jengibre y solo se puede elegir uno de estos ingredientes en común, ¿de cuántas maneras podrían hacer los otros concursantes la elección?

En una ciudad las diligencias de cambio de zonificación siguen un proceso de dos etapas: una revisión por parte de la comisión de planeación y una decisión final por parte del consejo ciudadano.

En el paso 1, la comisión de planeación revisa la petición de cambio de zonificación y emite una recomendación positiva o negativa acerca del cambio. En el paso 2, el consejo ciudadano revisa la recomendación de la comisión de planeación y vota aprobándola o rechazándola.

El constructor de un conjunto residencial acaba de presentar una solicitud de cambio de zonificación.

89. Si el procesamiento de la solicitud se considera un experimento aleatorio, ¿de cuántas maneras se podría dar la respuesta?

90. Escribe las posibles opciones que se presentarían en el numeral anterior.

Para los juegos intercursos se propuso diseñar una bandera que represente a cada grado.

Las condiciones para todas las banderas son las mismas. Hay cuatro franjas y seis colores disponibles: azul, rojo, verde, amarillo, morado y blanco.

91. ¿Cuántas banderas diferentes se podrá diseñar?

92. ¿Cuántas banderas se podrá diseñar si los colores verde y rojo no pueden quedar seguidos?

Se ponen dentro de una bolsa las letras de la palabra *abuelito*.

93. ¿Cuántas palabras, con o sin significado, se pueden formar con estas letras?

Los estudiantes del grado noveno de un colegio de la ciudad deben presentar la prueba Saber. El colegio ha decidido que para motivarlos a sacar buenos resultados premiará los tres mejores promedios, teniendo en cuenta lo siguiente:

Al mejor puntaje le dará un iPad.

Al segundo puntaje le dará un iPod touch de 32G.

Al tercer puntaje le dará un iPod nano de 8G.

94. Si en grado noveno hay 45 estudiantes, determina de cuántas maneras podrían obtener el premio los estudiantes.

95. Si el día de la prueba faltan 7 estudiantes, ¿cambiará el número de posibilidades de los resultados? ¿Por qué?

Se meten dentro de una bolsa tarjetas con los dígitos del 0 al 4. El experimento consiste en sacar dos tarjetas, en orden, y formar un número de dos cifras.

96. ¿Cuántos números podrán formarse?

97. Si la tarjeta con el número 0 sale primera, se saca otra tarjeta más. En este caso, ¿cuántos números podrán formarse?

98. Si ahora el experimento consistiera en sacar la tarjeta y devolverla a la bolsa, ¿cuántos números se podrían formar?

99. ¿En cuál de los numerales 96, 97 o 98 se presenta un caso con un mayor número de posibilidades? Explica tu respuesta.

Un cliente se acerca a una empresa de telefonía celular para adquirir un teléfono móvil.

El asesor de servicios le ofrece móviles de gama alta o gama media. Además, para cualquiera de las dos gamas, le ofrece planes de telefonía con cuenta controlada o abiertos. Para el caso de cuenta controlada le ofrece tres planes distintos en los cuales no se cobra el IVA; y para los planes abiertos, le ofrece cuatro opciones de beneficios adicionales como: seguro para hogar, seguro para vehículo, descuentos en establecimientos y bono para accesorios.

100. Si un cliente decide comprar un celular de gama alta, ¿cuántos planes diferentes podrá adquirir?

101. Si un cliente decide que su plan debe ser de cuenta controlada, ¿de cuántas maneras distintas pueden ofrecerle un plan?

102. Si un cliente piensa que el mejor beneficio será el estar exento de IVA, ¿cuántos planes diferentes le podrán ofrecer?

Para formar el Concejo de Bogotá se han postulado 70 candidatos, de los cuales solo 45 podrán ocupar una curul. Suponiendo que la elección fuera aleatoria y no por voto popular:

103. ¿De cuántas maneras distintas podrían los 70 candidatos ocupar las 45 curules?

104. Si se sabe que de los 70 candidatos ya es seguro que 10 serán concejales, ¿de cuántas maneras podrán ser seleccionados los otros?

Un programa de concurso premia a los participantes teniendo en cuenta que respondan correctamente una pregunta; para premiar el concursante más rápido, también tienen en cuenta el tiempo que toma en elaborar la respuesta.

105. Si se asume que la elección de los finalistas es aleatoria, ¿de cuántas maneras posibles pueden clasificar 10 de los 30 participantes?

106. Si se sabe que para los cinco primeros clasificados los premios serán los mismos, pero del sexto al décimo clasificado recibirán premios mayores entre menos tiempo hayan empleado en la elaboración de la respuesta, ¿de cuántas maneras se podrán premiar los 10 finalistas?

Para el Torneo nacional de gimnasia olímpica, el entrenador del Valle debe seleccionar entre Lina, Mariana, Andrea, Alejandra, Tatiana, María Camila, Luisa y Natalia, las cuatro deportistas que representarán al departamento.

107. Responde: Si todas las deportistas tienen el mismo nivel físico, ¿de cuántas maneras puede hacer el entrenador la elección?

108. Suponiendo que Natalia y Luisa son las mejores gimnastas y obligatoriamente deben representar al departamento, ¿de cuántas maneras se puede conformar el equipo completo?

Ángela va a ir de compras a un centro comercial; busca un almacén de cosméticos que está ubicado en el segundo piso. El centro comercial tiene cuatro vías de acceso, seis entradas y tres formas de subir al segundo piso.

109. ¿De cuántas formas puede llegar Ángela al almacén?

110. Si el día que Ángela va al centro comercial una de las escaleras está cerrada por mantenimiento, ¿de cuántas formas puede llegar?

6. Probabilidad y conteo

Recurso imprimible · Actividad · Ampliación multimedia

Es posible asignar probabilidades a los resultados experimentales. Así, dado un experimento aleatorio, en el cual se determinan unos eventos, es posible conocer específicamente la probabilidad de ocurrencia de alguno de ellos.

Para hacerlo es importante tener en cuenta las propiedades de la probabilidad, la fórmula clásica de probabilidad y cómo se organicen las muestras tomadas de la población dada, es decir, tener en cuenta el orden y la repetición.

EJEMPLO

Para la elección del nuevo equipo que presentará la sección de deportes en un importante canal de televisión se presentaron seis comunicadores sociales con amplia experiencia en la narración deportiva y conocimientos en varios deportes.

Los candidatos fueron: Javier, Manuel, Óscar, David, Roberto y Julián.

Si el equipo de presentadores estará formado por una pareja, ¿cuál es la probabilidad de que Roberto y Julián sean elegidos?

Para determinar la probabilidad de que los dos candidatos sean los presentadores, primero se debe encontrar el número de elementos del espacio muestral. Como en la elección no importa el orden y no hay repetición, tenemos el caso de una combinatoria, así:

$$\#(S) = {}_6C_2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Ahora, sea E el evento que consiste en que Roberto y Julián sean la pareja elegida, así:

$$\#(E) = 1$$

Luego, la probabilidad de ocurrencia de E está dada por:

$$P(E) = \frac{1}{15} = 6{,}6\%$$

Si para este mismo caso se quisiera encontrar la probabilidad de que, por ejemplo, Óscar fuera elegido, tendríamos que de los cinco comunicadores restantes solo se escogería uno. Así, sea E_2 el evento que consiste en que Óscar sea elegido, entonces:

$$\#(E_2) = {}_5C_1 = 5$$

Así, la probabilidad de que Óscar sea uno de los seleccionados está dada por:

$$P(E_2) = \frac{5}{15}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{3} = 33,3\%$$

De la misma manera, la probabilidad de que David, por ejemplo, sea uno de los elegidos es 33,3%. Así, cada uno de estos eventos puede considerarse equiprobable.

Recuerda que...

1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$

   La probabilidad de ocurrencia de un evento siempre está entre 0 y 1.

2. Si $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ y $E_i \cap E_j = \varnothing$ con $i \neq j$, entonces, $P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$

   La suma de las probabilidades de todos los eventos del espacio muestral debe ser 1.

3. $P(\varnothing) = 0$
4. $P(S) = 1$

Matemáticamente

¿Qué significa que dos eventos sean equiprobables?

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Una persona selecciona dos cartas de una baraja. Si se tiene en cuenta que las letras J, Q, K se consideran figuras:

111. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean figuras?

112. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las cartas sean figuras?

113. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una carta sea figura?

114. Explica la manera de calcular la probabilidad de que las dos cartas sean ases.

115. Escribe una pregunta para esa situación tal que la probabilidad sea 0,5.

El equipo científico de un importante hospital infantil del país se ha dedicado a investigar sobre las enfermedades huérfanas en los niños de estratos 1, 2 y 3. Dicho equipo publicó un documento que se propuso para un congreso mundial de enfermedades infantiles, razón por la cual dos de los médicos investigadores deberán viajar a Londres a presentar los resultados de su investigación.

El equipo está conformado por tres hombres y dos mujeres, así:

Juan Andrés	Neurocirujano
Pedro	Oncólogo
Daniel	Cardiólogo
Lucía	Neumóloga
Martina	Endocrinóloga

116. Determina la probabilidad de que Lucía y Martina sean quienes viajen a presentar los resultados.

117. Halla la probabilidad de que dos de los hombres sean los que viajen a Londres.

118. Encuentra la probabilidad de que viajen un hombre y una mujer a Londres.

119. Halla la probabilidad de que Martina y Juan Andrés sean quienes viajen a presentar los resultados en Londres.

En una de las válidas de Fórmula Uno, seis de los competidores se consideran favoritos para obtener la *pole* y los cinco lugares siguientes para la arrancada del gran premio.

Los pilotos son nombrados como P1, P2, P3, P4, P5 y P6.

120. ¿De cuántas maneras diferentes podrán quedar ubicados los pilotos en la pista el día del gran premio?

121. ¿Cuál es la probabilidad de que P1 se ubique en la *pole*?

122. ¿Cuál es la probabilidad de que P5 se ubique en la *pole*?

123. ¿Cuál es la probabilidad de que P4 se ubique en la *pole* y P2 se ubique en el segundo lugar?

124. ¿Cuál es la probabilidad de que P3 no quede ubicado en la *pole*?

Una persona que apuesta todos los días la lotería decide determinar qué posibilidades tiene de ganar. Para ello, analiza que el billete de lotería que compra juega con un número de cuatro dígitos y una serie de dos dígitos que va del 00 al 30.

125. Si esta persona compra un billete de lotería, ¿qué probabilidad tiene de ganar el premio?

S **El programador de los comerciales de televisión de un canal privado tiene disponibles cuatro comerciales para alternarlos en la franja familiar de las noches. Los dos primeros comerciales tienen una duración de dos minutos cada uno, el tercer comercial tiene una duración de tres minutos y el cuarto comercial, una duración de cuatro minutos.**

Cada comercial puede repetirse las veces que sea necesario para completar cada franja de comerciales.

Si la primera tanda de comerciales es de seis minutos:

126. ¿Cuál es la probabilidad de que se programen los cuatro comerciales?

127. ¿Cuál es la probabilidad de que se programen tres comerciales?

128. ¿Cuál es la probabilidad de que se programen al menos dos comerciales?

129. Si el programador decide eliminar todas las secuencias en las cuales el mismo comercial se repite dos o más veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de que en la franja de seis minutos se programen cuatro comerciales?

E **Para la elaboración de una pieza electrónica que se incluirá en un juguete de control a distancia, se ha incluido un dispositivo que debe pasar por cuatro procesos distintos:**

Proceso 1: Dibujo del circuito.

Proceso 2: Fijación del mapa en lámina de cobre.

Proceso 3: Eliminación de sobrantes en el mapa.

Proceso 4: Ensamble sobre la lámina.

En el proceso 1 trabajan tres operarios distintos (O1, O2, O3); en el proceso 2 trabajan dos operarios (P1, P2); en el proceso 3 trabajan cinco operarios (Q1, Q2, Q3, Q4, Q5) y en el proceso 4 trabajan dos operarios (R1, R2).

130. Halla la probabilidad de que en el ensamble del dispositivo haya participado R_2.

131. Halla la probabilidad de que en el ensamble del dispositivo haya participado Q_4.

132. Halla la probabilidad de que en el ensamble del dispositivo participaran O_1, P_2 Q_3, R_4.

E **Una bolsa negra contiene tres bolas rojas, dos bolas azules y una bola verde. Una persona extrae una bola y anota su color, luego, la devuelve a la bolsa y selecciona otra bola para anotar su color.**

133. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola seleccionada sea roja?

134. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola seleccionada sea roja?

135. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola seleccionada sea roja y la segunda, sea verde?

136. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas seleccionadas sean de colores distintos?

S **Los competidores de una carrera ciclística son Carlos, Lorenzo y Ramón. Hernando apostará pensando en los dos primeros lugares de la carrera.**

137. Si Hernando apuesta que Lorenzo ganará la carrera, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

138. Si Hernando apuesta que la premiación será para la pareja (Lorenzo, Carlos), en cualquier orden, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

139. Si apuesta a que el orden correcto para la premiación será primero Lorenzo y segundo Ramón, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

Análisis de una variable cualitativa

Según las últimas encuestas, los cuatro programas más vistos en los canales de televisión en la franja de las 7:00 p. m. a las 8:00 p. m. son: Talentos, Noches de acción, Adivine y Cuentacuentos. A continuación se presentan los datos de la encuesta:

Talentos	Adivine	Noches de acción	Adivine	Talentos
Noches de acción	Talentos	Noches de acción	Adivine	Talentos
Talentos	Talentos	Adivine	Noches de acción	Talentos
Talentos	Adivine	Adivine	Talentos	Talentos
Talentos	Cuentacuentos	Talentos	Talentos	Noches de acción
Adivine	Cuentacuentos	Talentos	Noches de acción	Talentos
Cuentacuentos	Noches de acción	Talentos	Adivine	Talentos
Talentos	Noches de acción	Noches de acción	Talentos	Talentos
Noches de acción	Talentos	Noches de acción	Talentos	Noches de acción
Talentos	Talentos	Noches de acción	Talentos	Cuentacuentos

140. ¿Los datos corresponden a una variable cualitativa o cuantitativa? Explica tu respuesta.

141. Elabora, en tu cuaderno, la distribución de frecuencias correspondiente para estos datos.

142. Elabora una gráfica de barras que represente la información.

143. De acuerdo con la encuesta, ¿qué programa es el de mayor teleaudiencia en la franja mencionada?

Caracterización de dos variables cualitativas

Se preguntó a un grupo de deportistas de alto rendimiento por la bebida hidratante que consumen después de un entrenamiento. Los resultados se clasificaron teniendo en cuenta el género, así:

	Hombre	Mujer
Agua	24	34
Bebida energizante	35	22
Suero oral	12	9
Jugo	0	3

144. Elabora la tabla marginal asociada a la variable género y escribe algunas conclusiones a partir de ella.

145. Elabora la tabla marginal relacionada en la variable tipo de bebida. Escribe algunas conclusiones con base en ella.

146. Elabora, en tu cuaderno, un diagrama de barras que describa claramente los resultados presentados en la tabla marginal de porcentajes.

Caracterización de variables cuantitativas

A continuación se presentan los datos de los salarios de 50 presidentes de mercadeo de diferentes empresas del sector de alimentos congelados. Los datos están dados en miles de dólares.

145	95	148	112	132
140	162	118	170	144
145	127	148	165	138
173	113	104	141	142
116	178	123	141	138
127	143	134	136	137
155	93	102	154	142
134	165	123	124	124
138	160	157	138	131
114	135	151	138	157

147. Elabora, en tu cuaderno, la ojiva para esta situación y escribe algunas conclusiones sobre la variable estudiada.

148. Calcula las medidas de tendencia central y escribe algunas conclusiones con base en ellas.

149. Encuentra la desviación estándar y determina si la media es un buen representante en este caso.

Probabilidad y conteo

Una heladería ofrece en su carta un helado especial que contiene tres sabores y dos salsas. Los sabores entre los que se puede escoger son: fresa, chicle, pistacho, almendra, chocolate, maracuyá, *brownie* y frutos rojos. Las salsas pueden ser: agrás, arequipe y mandarina.

150. ¿Qué probabilidad hay de que un cliente pida un helado que tenga salsa de mandarina?

151. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sabores elegidos sean maracuyá, fresa y frutos rojos?

PROBLEMAS PARA REPASAR

Para las vacaciones de fin de año, una agencia de turismo ofrece a sus clientes una "Aventura extrema". Dicho plan de vacaciones plantea varias opciones para disfrutar al máximo de diferentes actividades con deportes no comunes. A continuación se presentan las opciones:

Desplazamiento al lugar: Nuestra empresa ofrece la posibilidad de desplazarse en vuelo directo o por tierra. En cualquiera de las dos opciones usted disfrutará de la compañía de nuestros guías expertos.

Ofrecemos tres tipos de acomodación según sus necesidades:

Acomodación doble en habitación.

Acomodación triple en habitación

Acomodación cuádruple en cabaña.

Ofrecemos tres tipos de deportes.

Alto riesgo: ofrecemos todos los dispositivos de seguridad para que su diversión sea extrema, pero tranquila.

Mediano riesgo: disfrutará de la interacción con la naturaleza y sus paisajes.

Bajo riesgo: en forma tranquila interactuará con los paisajes naturales del entorno.

¿De cuántas formas diferentes puede un cliente programar sus vacaciones según la oferta anterior?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿De cuántas formas diferentes puede un cliente programar sus vacaciones?

¿Cuáles son los datos del problema?

Las opciones de viaje son dos: vuelo y tierra.

Los tipos de acomodación son tres: doble en habitación, triple en habitación, cuádruple en cabaña.

Los tipos de deportes son tres: alto riesgo, mediano riesgo, bajo riesgo.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para resolver la pregunta se debe aplicar el principio de multiplicación. Para ello, se multiplica el número de opciones de viaje por el número de tipos de acomodación por el número de tipos de deporte. Así: $2 \times 3 \times 3 = 18$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifican las operaciones y se concluye que el cliente tiene 18 opciones para programar sus vacaciones.

Un juego de aptitud matemática, que se juega en parejas, consiste en adivinar el número del contrincante.

Mateo y Camila se enfrentan en el juego; para ello cada uno escribe en forma secreta un número de tres cifras. En orden, cada uno le dice a su contrincante un número de tres dígitos y este a su vez debe decirle si las cifras del número están o no están en su propio número. Así se continúa el juego hasta que alguno logre adivinar el número de su contrincante.

152. ¿Cuántos números de tres cifras puede escribir cada jugador? ________________

153. Si los números se pueden repetir, ¿cuántas opciones de números podría escribir cada jugador?

____

____

154. Si se pone como regla que el cero no puede ser el primer dígito del número, ¿cuántos números resultarán?

155. Si Camila le dice a Mateo que dos de los números que él le dijo forman parte de su número y que además están en la posición correcta, ¿cuántos números podría decir Mateo para ganar el juego?

156. Si Mateo le dice a Camila que los tres números que le ha dicho forman parte de su número, ¿cuántas posibilidades de números tiene Camila?

En una bolsa se tienen cinco tarjetas y cada una está numerada con los dígitos impares. Si se seleccionan al azar dos tarjetas en forma consecutiva:

157. Halla la probabilidad de que el número formado termine en nueve.

158. Determina la probabilidad de que el número formado no termine en tres.

159. Encuentra la probabilidad de que la suma de las cifras del número formado sea un número impar.

160. Encuentra la probabilidad de que la suma de las cifras del número formado sea un número par.

161. Encuentra la probabilidad de que las cifras del número formado sean mayores que 4.

...Para diseñar juegos para los parques de diversiones.

Galería de imágenes

¿Cómo se determina si un juego diseñado para un parque de diversiones se puede poner en funcionamiento?

El ingeniero mecánico de un parque de diversiones ha diseñado un nuevo juego que debe ser probado antes de ponerlo en funcionamiento.

Para tal prueba se estudiaron datos específicos de diez individuos que constituyeron una muestra (hombres y mujeres entre 18 y 35 años) de la población que frecuenta el parque.

La experiencia se basó en mediciones del perímetro craneal P_c y el perímetro abdominal P_a de dichos individuos y, además, se sometieron a un estímulo eléctrico t_r, producido por una batería de 9 voltios. El equipo de seguridad del parque, conformado por varios ingenieros, determinó que si la expresión $(P_a - P_c) \times t_r$ es menor o igual a 33, entonces, se pondrá en funcionamiento el juego. A continuación se presentan los resultados de dichas mediciones:

	Mediciones									
Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Perímetro craneal (cm)	56	57	56	56	55	58	61	57	55	56
Perímetro abdominal (cm)	83	82	80	81	81	83	87	84	83	81

	Mediciones									
Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo (s)	1	2	2	3	2	1	2	1	1	1

1. **Determina cuáles son las variables que se están estudiando en la investigación.**
2. **Elabora un diagrama de tallo y hojas para las variables que consideres necesario y útil hacerlo.**
3. **En este caso, ¿la ojiva constituye un elemento útil para analizar la información? Justifica tu respuesta.**
4. **Elabora una tabla en donde relaciones las tres variables estudiadas y escribe conclusiones con base en ella.**
5. **Basado en el análisis de la información, determina si es posible poner en funcionamiento el juego.**
6. **Imagina que eres el responsable de entregar los resultados al comité que aprueba el funcionamiento del juego. Con base en lo anterior, elabora un informe que presente a dicho comité el proceso estudiado y las conclusiones.**

...También sirve para saber las posibilidades de ganar una apuesta.

En la actualidad, el mundo de las apuestas crece a pasos agigantados y es tal el furor que tiene, que cada vez existe mayor diversidad en las modalidades de juego, y ese es el caso de las **apuestas combinadas**.

Las apuestan tienen variantes como el monto que se va a apostar y lo que se paga por el acierto que se obtiene. Las apuestas combinadas se dan cuando se apuesta a que dos sucesos ocurran simultáneamente. En los deportes se pueden realizar fácilmente y se ganan acertando dos marcadores en cualquier evento.

Por ejemplo, en una apuesta por un partido de fútbol entre Colombia y Argentina pagan 2 veces el valor apostado a favor de Argentina, 3,5, veces el valor apostado a favor de Colombia y por el empate, 2,5 veces por el valor apostado. Si se hace una apuesta sencilla de \$10.000 a favor de Argentina pagan \$20.000. Ahora si existiera otro partido de fútbol entre Brasil y Venezuela y pagaran 5 veces a favor de Venezuela y 3 veces a favor de Brasil, al apostar \$10.000 a que gana Brasil se ganaría \$30.000.

Pero si se hiciera una apuesta combinada de \$20.000 porque ganaran Argentina y Brasil en sus respectivos encuentros, la ganancia se hallaría multiplicando el dinero apostado por el valor que pagan los dos aciertos así: $20.000 \cdot 2 \cdot 3$. Se obtendría así una ganancia de \$120.000, siempre y cuando se acierten los dos eventos simultáneamente.

La apuesta combinada resulta más seductora para el apostador porque tiene una ganancia neta de \$100.000 mientras que, en dos apuestas sencillas, la ganancia neta sería de \$30.000 apostando los mismos \$20.000.

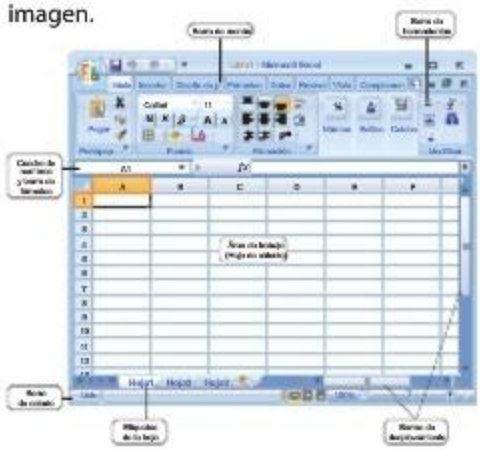
1. **¿En qué caso es más probable ganar? Explica tu respuesta.**
2. **Si se apostara \$50.000 a favor de Colombia y Venezuela, ¿cuál sería la ganancia neta?**
3. **Halla la probabilidad de ganar en una apuesta combinada de dos partidos de fútbol.**
4. **Si la apuesta combinada se hiciera en el tenis, ¿la probabilidad de ganar respecto a la apuesta en fútbol cambiaría?**

Trabaja con Excel

Objetivo: organizar, procesar y analizar cualquier tipo de datos, realizando cálculos, manejo de fórmulas y la creación de gráficos.

Descripción: determinar la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y la frecuencia porcentual de un conjunto de datos.

1. Activa Microsoft Excel. Luego, visualiza la planilla de cálculos de Excel con sus diversas herramientas, como se muestra en la siguiente imagen.



2. Para organizar los resultados de un test en una tabla de frecuencias, con intervalos de tamaño 10, por ejemplo:

19	50	21	26	40	7	23	11	37	20	32
32	15	1	21	49	26	39	8	16	6	25
7	35	43	49	1	12	31	9	41	18	45
47	12	5	4	38	48	37	9	5	30	27
40	13	45	2	29	48					

Primero, se ingresa cada dato en una celda y se construye la tabla de distribución de frecuencias. Así:

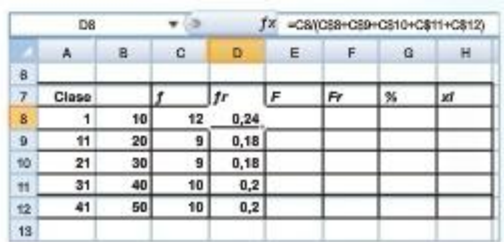
A1 f_x 19

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	19	50	21	26	40	7	23	11
2	37	20	32	32	15	1	21	49
3	26	39	8	16	6	25	7	35
4	43	49	1	12	31	9	41	18
5	45	47	12	5	4	38	48	37
6	9	5	30	27	40	13	45	2
7		29	48					
8								
9	Clase	f	fr	F	Fr	%	xf	
10	1-10							
11	11-20							
12	21-30							
13	31-40							
14	41-50							
15								

3. Luego, para determinar la frecuencia *f* de los datos anteriores se usa la función =CONTAR.SI(). Por tanto, se obtiene la cantidad de datos en cada intervalo. Después, se pega la fórmula en el resto de la columna, como se muestra en la figura.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	19	50	21	26	40	7	23	11	20	37
2	32	32	15	1	21	49	39	8	26	16
3	6	25	7	35	40	1	12	43	31	9
4	41	18	47	12	5	4	45	30	48	37
5	5	38	27	48	13	9	45	2	29	48
6										
7	Clase		f	fr	F	Fr	%	xf		
8	1	10	12							
9	11	20	9							
10	21	30	9							
11	31	40	10							
12	41	50	10							
13										
14										

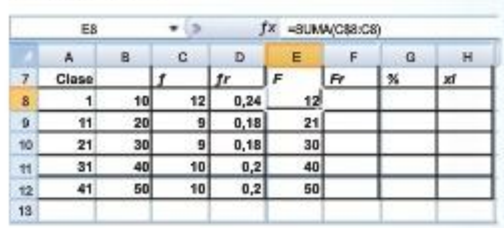
4. Halla la frecuencia relativa *f*, usando la siguiente fórmula. Luego, pega la fórmula en el resto de la columna.



D8 f_x =C8/(C$8+C$9+C$10+C$11+C$12)

	A	B	C	D	E	F	G	H
6								
7	Clase		f	fr	F	Fr	%	xf
8	1	10	12	0,24				
9	11	20	9	0,18				
10	21	30	9	0,18				
11	31	40	10	0,2				
12	41	50	10	0,2				
13								

5. Calcula las frecuencias acumuladas ***F*** con la función =**SUMA()**. Recuerda usar el símbolo $ para que la suma empiece siempre desde el primer valor. Luego, pega la fórmula en el resto de la columna.



E8 f_x =SUMA(C$8:C8)

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	Clase		f	fr	F	Fr	%	xf
8	1	10	12	0,24	12			
9	11	20	9	0,18	21			
10	21	30	9	0,18	30			
11	31	40	10	0,2	40			
12	41	50	10	0,2	50			
13								

6. Calcula las frecuencias relativas acumuladas ***Fr*** con la función =**SUMA()**. Utiliza el símbolo $ para que la suma comience siempre desde el primer valor. Luego, pega la fórmula en el resto de la columna.

F8 f_x =SUMA(D$8:D8)

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	Clase		*f*	*fr*	*F*	*Fr*	%	*xi*
8	1	10	12	0,24	12	0,24		
9	11	20	9	0,18	21	0,42		
10	21	30	9	0,18	30	0,6		
11	31	40	10	0,2	40	0,8		
12	41	50	10	0,2	50	1		

7. Calcula la frecuencia porcentual %, con la expresión =D8*100, como se muestra en la siguiente figura.

G8 f_x =D8*100

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	Clase		*f*	*fr*	*F*	*Fr*	%	*xi*
8	1	10	12	0,24	12	0,24	24	
9	11	20	9	0,18	21	0,42	18	
10	21	30	9	0,18	30	0,6	18	
11	31	40	10	0,2	40	0,8	20	
12	41	50	10	0,2	50	1	20	

8. Verifica que la suma de los resultados de la frecuencia porcentual es 100, aplicando la herramienta Σ **Autosuma** a las celdas **G8** hasta **G12**. Como se muestra en la figura.

G8 f_x =D8*100

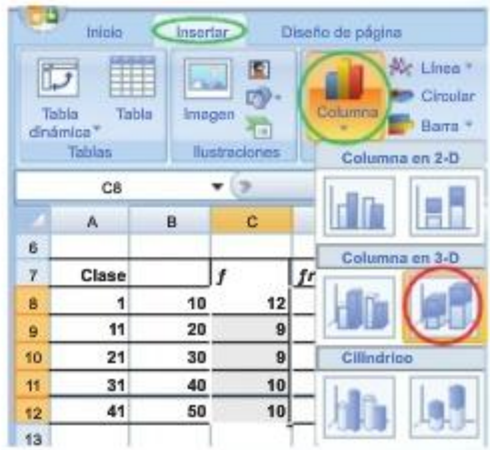
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	Clase		*f*	*fr*	*F*	*Fr*	%	*xi*	
8	1	10	12	0,24	12	0,24	24		
9	11	20	9	0,18	21	0,42	18		
10	21	30	9	0,18	30	0,6	18		
11	31	40	10	0,2	40	0,8	20		
12	41	50	10	0,2	50	1	20		
13							100		

9. Determina la marca de clase x_i con la expresión =(A9+B9)/2, como se muestra en la figura.

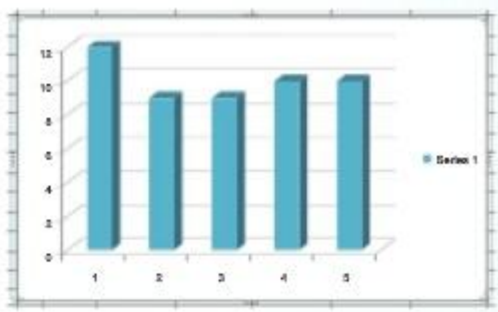
H8 f_x =(A8+B8)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	Clase		*f*	*fr*	*F*	*Fr*	%	*xi*
8	1	10	12	0,24	12	0,24	24	5,5
9	11	20	9	0,18	21	0,42	18	15,5
10	21	30	9	0,18	30	0,6	18	25,5
11	31	40	10	0,2	40	0,8	20	35,5
12	41	50	10	0,2	50	1	20	45,5

10. Para realizar el histograma, selecciona las celdas relacionadas con la frecuencia absoluta, para este caso **C8** hasta **C12**. Luego, ubica en el menú **Insertar**, la herramienta **Columna** y haz clic en Columna 3-D, como se muestra en la figura.



Observa el diagrama que se despliega.



11. Para mejorar el aspecto del diagrama anterior, utiliza la herramienta **Diseños de gráfico**.

12. Utiliza Excel para organizar la información del ejemplo de la página 303 en una tabla de frecuencia. Luego, verifica los datos.

13. Utiliza Excel para elaborar la tabla de frecuencias del ejercicio 37 de la página 307.

GLOSARIO

A

Ángulos alternos externos: ángulos que se forman en distinto lado respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos alternos internos: ángulos que se forman internamente, en distinto lado respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos opuestos por el vértice: ángulos que tienen un vértice común donde los lados de uno son semirrectos opuestos a los lados del otro.

Ángulos suplementarios: ángulos cuyas medidas suman 180°.

B

Baricentro: punto en que concurren las medianas de un triángulo.

Binomio: expresión algebraica que tiene dos términos.

Bisectriz: recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

C

Coeficiente: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado perfecto: número que se obtiene al elevar otro al cuadrado.

D

Decimal exacto: número decimal cuya parte decimal es finita.

Decimal periódico: número decimal cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

Desigualdad: relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es mayor o cuál es menor.

Desviación media: suma del valor absoluto de las desviaciones respecto a la media, dividida entre el número de datos de una distribución estadística.

División sintética: método abreviado para hallar el cociente y el residuo, cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$.

Dominio: conjunto compuesto por las primeras componentes de los pares ordenados de una función.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo es cierta para algún o algunos valores de las variables.

Ecuación exponencial: ecuación en la que la variable figura en el exponente.

Ecuaciones equivalentes: ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Espacio muestral: conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Experimento aleatorio: experimento del cual no se puede prever el resultado.

Expresión algebraica: toda expresión compuesta por números y por letras separadas por los signos de la operaciones fundamentales. Por ejemplo: $3ax$, $5 + a - 3b$.

Expresión algebraica irracional: expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

Expresión algebraica racional: expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Fracción algebraica: cociente de dos polinomios.

Función: en general, una función de una variable x es una regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada valor de x del dominio un único número en el rango.

Función afín: función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

Función cuadrática: función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, diferente de cero. Su gráfica es siempre una parábola.

Función exponencial: función de la forma $y = a^x$. Su gráfica es una línea curva cuya orientación depende del valor de a.

Función lineal: función de la forma $y = mx$, donde m es una constante.

Función logarítmica: función de la forma $y = \text{Log}_a x$.

G

Grado de polinomio: el mayor de los exponentes de las partes literales de los términos que componen un polinomio.

Gráfica de una función: dibujo en el plano cartesiano que indica la relación entre dos variables.

I

Incógnita: cada una de las letras distintas que aparecen en una ecuación.

Inecuación: relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

M

Máximo común denominador: mayor número que divide exactamente a dos o más números.
Mediatriz: recta que pasa por el eje de simetría de un segmento.
Medidas de dispersión: medidas estadísticas que permiten determinar qué tan concentrados o determinados se encuentran los datos de una distribución.
Medidas de tendencia central: valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.
Mínimo común múltiplo: menor múltiplo compartido por dos o más números.
Monomio: expresión algebraica en la que se operan solo productos y potencias. Por tanto, está compuesto por un solo término.

N

Número complejo: todo número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.
Número imaginario: todo número que elevado al cuadrado da como resultado un número real negativo. La unidad imaginaria se simboliza por i y se define como $i^2 = -1$.
Número irracional: aquel que no se puede escribir como la razón entre dos números enteros.
Número racional: número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros.
Números reales: conjunto que tiene todos los números racionales e irracionales.

P

Poliedro: todo sólido limitado por caras en forma de polígonos.
Polígonos semejantes: dos polígonos se dicen semejantes si existe una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.
Polinomio: expresión algebraica que consta de uno o más términos.
Polinomio irreductible: polinomio que no se puede expresar como el producto de menor grado.
Progresión aritmética: sucesión de números reales en la que cada número, excepto el primero, se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante.
Progresión geométrica: sucesión de números reales en la que cada número, excepto el primero, se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad constante.

R

Rango: en estadística, diferencia entre el dato mayor y el dato menor de una colección de datos.
Recorrido: en álgebra, conjunto compuesto por las segundas componentes de los pares ordenados de una función.

S

Sistema de ecuaciones lineales: conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas.

T

Teorema: proposición que afirma un hecho demostrable.
Término: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica. Por ejemplo, la expresión $2a + 5b$ tiene dos términos.
Triángulos congruentes: triángulos en los que hay una correspondencia entre vértices, de manera que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

V

Valor numérico de un monomio: número que se obtiene al sustituir las letras por números.
Variable algebraica: cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión. Por ejemplo, $2a - 3ab + b$ tiene dos variables a y b.
Variable dependiente: variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable dependiente.
Variable independiente: variable a la cual se le asignan valores arbitrarios en una función.

BIBLIOGRAFÍA

- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. *Informe PISA 2009*, Volumen I, España, Editorial Santillana, 2010.
- Ministerio de Educación Nacional. *Decreto 1960 de agosto 3 de 1994.*
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*, Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Matemáticas. Lineamientos curriculares*, Bogotá, 1998.
- Ministerio de Educación Nacional. *Resolución número 2343 de junio 5 de 1996.*
- AA. VV. *Matemáticas I*. 1 Bachillerato, España, Editorial Santillana, 2008, pp. 7, 93, 110.
- AA. VV. *Matemáticas 3 ESO*, España, Editorial Santillana, 2007, pp. 95, 171, 191, 211, 245.
- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*, Bogotá, Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alvarenga, B. y Máximo, A. *Física general con experimentos sencillos*, México, Harla, S. A., 1983.
- Ángel, Allen R. *Álgebra intermedia*, México, Pearson Educación, 2008.
- Ash, Russell. *El asombroso libro de las comparaciones*, Madrid, Santillana S. A., 1997.
- Baldor. *Geometría plana y del espacio y trigonometría*, México, Publicaciones Cultural, 1998.
- Barnett, Rich. *Serie de competencias Schaum. Teorías y problemas de geometría plana con coordenadas*, México, McGraw Hill, 1970.
- Bobillo, N. *Matemáticas. Ciencias de la naturaleza y la salud*, Madrid, Santillana S. A.
- Bueche, F. *Fundamentos de física I*. Colombia, McGraw Hill Latinoamericana S. A., 1988.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis; Castro, Enrique. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 2*, España, Editorial Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*, España, Editorial Síntesis, 1997.
- Clemens; Et Ál. *Serie Awli. Geometría*, México, Addison Wesley, Pearson Educación, 1998.
- Corbalán, F. *Taller de matemáticas*, Madrid, Grupo Santillana de Ediciones S. A.
- Del Olmo Romero, María Ángeles; Moreno Carretero, María Francisca; Gil Cuadra, Francisco. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 19*. España, Editorial Síntesis, 1993.
- Díaz Godino, Juan; Batanero Bernabéu, María del Carmen; Cañizares Castellanos, María Jesús. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 27*, España, Editorial Síntesis, 1996.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. *El aprendizaje de las matemáticas*, Madrid, Mec/Labor, 1991.
- Fiol, M.; Fortuny, J. *Proporcionalidad directa. La forma y el número*, Madrid, Síntesis, 1990.
- Fiol Mora, María Luisa; Fortuny Aynemí, Josep María. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 20*, España, Editorial Síntesis, 1990.
- González, José Luis; Iriarte, María; Jimeno, Manuela; Ortiz, Alfonso; Sanz, Esteban; Vargas Machuca, Inmaculada. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 6*, España, Editorial Síntesis, 1990.
- Guillén Soler, Gregoria. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 15*, España, Editorial Síntesis, 1997.
- López, P. *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*, Madrid, Santillana S. A.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Madrid, Mec/Labor, 1992.
- Moisés, E. y Downs, F. *Geometría Moderna*. Estados Unidos, Addison Wesley publishing company, 1996.
- Moreno, M.; Gil, F.; Del Olmo, M. *Superficie y volumen*, Madrid, Síntesis, 1993.
- Paul G., Hewitt. *Física conceptual*, tercera edición, Pearson Educación, 1999.
- Perelman, Y. *Aritmética recreativa*, Moscú, Mir, 1986.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1989.
- Pozo, Juan Ignacio; Et Ál. *La solución de problemas*, Madrid, Santillana, 1994.
- Sánchez, D.; Cerezo, J. *Proyectos de tecnología*, Madrid, Grupo Santillana de Ediciones S. A.
- Sestier, Andrés. *Historia de las matemáticas*, México, Limusa, 1983.
- Stephen, F. M. *Historia de la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial.
- Sullivan, Michael. *Álgebra y trigonometría*, México, Pearson Educación, 2006.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 1988.
- Triola, Mario F. *Estadística*, México, Pearson Educación, 2009.
- Vásquez, C. *Geometría plana y del espacio*, Madrid, Biblioteca Santillana de consulta.
- Vásquez, Carmen. *Estadística básica*, Biblioteca Santillana de consulta, tomo 8, Madrid, Santillana, 1984.
- Wenthworth, George; Et Ál. *Geometría plana y del espacio*, México, Porrúa, 1988.
- Zill, Dennis G.; Dewar, Jacqueline M. *Precálculo con avances de cálculo*, México D. F., Mc Graw Hill, 2008.

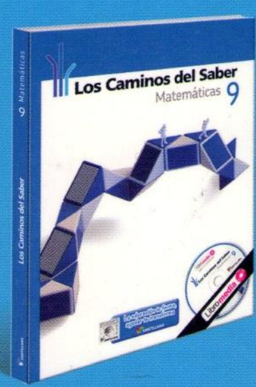
Fuentes de Internet

- www.dane.gov.co
- www.etniasdecolombia.org
- www.lablaa.org

Proyecto Los Caminos del Saber

Es un **programa de educación** que te ofrece múltiples recursos, impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro.

¿Qué te ofrece el programa para el área de Matemáticas?



Un libro del estudiante
que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de competencias.

Un Libromedia
en DVD, que:

- Contiene una amplia variedad de recursos digitales.
- Es fácil de manejar y no requiere conectividad.
- Se vincula a tu salón de clases y a tu hogar como una oportunidad para aumentar tu eficacia en el aprendizaje.

Un sitio Web
www.santillanaplus.com.co
con más recursos ***interactivos*** y ***multimedia*** que agregan valor a tu desarrollo escolar.

www.santillanaplus.com.co

61042863-1214
ISBN 978-958-24-2268-4
9 789582 422684

SANTILLANA